Práctico 6: Cálculo de secuentes

Las reglas de deducción del Cálculo de secuentes (sistema LK) son las siguientes:

Axioma y regla de corte

(Axioma, Corte) $\dfrac{}{\phi \vdash \phi}$ $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \phi, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$

Reglas estructurales

(Permutación) $\dfrac{\Gamma, \phi, \psi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \psi, \phi, \Gamma' \vdash \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \phi, \Delta'}$

(Debilitamiento) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}$

(Contracción) $\dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}$

Reglas lógicas

($\neg$) $\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}$ $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\phi, \Delta}$

($\bot$, $\top$) $\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$ $\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}$

($\wedge$) $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta}$ $\dfrac{\Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi, \Delta}$

($\vee$) $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi, \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi, \Delta}$

($\Rightarrow$) $\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma', \psi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta, \Delta'}$ $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta}$

($\forall$) $\dfrac{\Gamma, \phi[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, \phi \vdash \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\, \phi, \Delta}$ (si $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$)

($\exists$) $\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, \phi \vdash \Delta}$ (si $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$) $\dfrac{\Gamma \vdash \phi[x := t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\, \phi, \Delta}$

($=$) $\dfrac{\Gamma, \phi[x := u] \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \phi[x := t], \Delta'}{\Gamma, \Gamma', t = u \vdash \Delta, \Delta'}$ $\dfrac{}{\vdash t = t}$

Ejercicio 1. — Derivar las siguientes fórmulas en el sistema LK, y comparar las derivaciones obtenidas con las derivaciones correspondientes en el sistema NK (Práctico 5):

- Equivalencias notables del cálculo proposicional:

$\phi \wedge \phi \Leftrightarrow \phi$	$\phi \vee \phi \Leftrightarrow \phi$
$\phi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \phi$	$\phi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \phi$
$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \Leftrightarrow \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\phi \vee \psi) \vee \chi \Leftrightarrow \phi \vee (\psi \vee \chi)$
$\phi \wedge \top \Leftrightarrow \phi$	$\phi \vee \bot \Leftrightarrow \phi$
$\phi \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$	$\phi \vee \top \Leftrightarrow \top$
$\phi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$	$\phi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$
$(\phi \Rightarrow \psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\phi \Rightarrow \chi)$	$(\phi \Rightarrow \psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \psi) \vee (\phi \Rightarrow \chi)$
$(\phi \wedge \psi \Rightarrow \chi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \chi) \vee (\psi \Rightarrow \chi)$	$(\phi \vee \psi \Rightarrow \chi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \chi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)$
$(\top \Rightarrow \phi) \Leftrightarrow \phi$	$(\phi \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \neg\phi$
$(\bot \Rightarrow \phi) \Leftrightarrow \top$	$(\phi \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$
$(\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Leftrightarrow (\phi \wedge \psi \Rightarrow \chi)$	

- Equivalencias notables del cálculo de predicados:

$\forall x\, (\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\, \phi \wedge \forall x\, \psi$		$\exists x\, (\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\, \phi \vee \exists x\, \psi$	
$\forall x\, \phi \vee \forall x\, \psi \Rightarrow \forall x\, (\phi \vee \psi)$		$\exists x\, (\phi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x\, \phi \wedge \exists x\, \psi$	
$\forall x\, \phi \Leftrightarrow \phi$	(si $x \notin FV(\phi)$)	$\exists x\, \phi \Leftrightarrow \phi$	(si $x \notin FV(\phi)$)
$\forall x\, (\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \phi \wedge \forall x\, \psi$	(si $x \notin FV(\phi)$)	$\exists x\, (\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \phi \vee \exists x\, \psi$	(si $x \notin FV(\phi)$)
$\forall x\, (\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \phi \vee \forall x\, \psi$	(si $x \notin FV(\phi)$)	$\exists x\, (\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \phi \wedge \exists x\, \psi$	(si $x \notin FV(\phi)$)
$\forall x\, (\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \forall x\, \psi)$	(si $x \notin FV(\phi)$)	$\exists x\, (\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \exists x\, \psi)$	(si $x \notin FV(\phi)$)
$\forall x\, (\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\exists x\, \phi \Rightarrow \psi)$	(si $x \notin FV(\psi)$)	$\exists x\, (\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\forall x\, \phi \Rightarrow \psi)$	(si $x \notin FV(\psi)$)

- Tautologías clásicas y leyes de De Morgan:

$\neg\neg\phi \Leftrightarrow \phi$	$\phi \vee \neg\phi$
$\neg\top \Leftrightarrow \bot$	$\neg\bot \Leftrightarrow \top$
$\neg(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$	$\neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$
$\neg(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \phi \wedge \neg\psi$	$(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \vee \psi$
$\neg\forall x\, \phi \Leftrightarrow \exists x\, \neg\phi$	$\neg\exists x\, \phi \Leftrightarrow \forall x\, \neg\phi$
$((\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi$	(ley de Peirce)

Ejercicio 2 (Paradoja de los bebedores)**.** — En lógica de primer orden, se supone implícitamente que el «universo del discurso» no es vacío.

(1) Derivar las siguientes fórmulas en LK

$$(a)\ \exists x\, \top \qquad (b)\ \exists x\, (x = x) \qquad (c)\ \forall x\, \phi \ \Rightarrow\ \exists x\, \phi$$

y explicar en qué expresan que el universo del discurso no es vacío.

Ahora, se supone que los objetos del discurso son los clientes de algún bar (no vacío), y se considera un predicado unario $p(x)$ que expresa: «el cliente x bebe».

(2) Derivar las siguientes fórmulas en LK (existencia de los bebedores líder y seguidor):
   (a) $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ («existe x tal que, si x bebe, entonces todos beben»)
   (b) $\exists x\, (\exists y\, p(y) \Rightarrow p(x))$ («existe x tal que, si alguien bebe, entonces x bebe»)

   (¡Cuidado con las condiciones de frescura de las variables!)

(3) Derivar las mismas fórmulas en deducción natural (NK). ¿Que se puede observar?

Ejercicio 3 (Equivalencia entre NK y LK)**.**

(1) Demostrar que para toda derivación $d : (\Gamma \vdash \phi)$ en el sistema NK, existe una derivación $d' : (\Gamma \vdash \phi)$ en el sistema LK. Algunas sugerencias:
   - Como siempre, se demuestra la propiedad por inducción sobre el tamaño de la derivación d, distinguiendo los casos en función de la última regla aplicada en d.
   - Las reglas de introducción de NK se simulan fácilmente en LK usando las reglas derechas (y posiblemente, las reglas estructurales).
   - Las reglas de eliminación de NK se simulan en LK combinando las reglas izquierdas con la regla de corte (y posiblemente, las reglas estructurales).

Dado un contexto $\Gamma \equiv \phi_1, \ldots, \phi_n$, se escribe $\neg\Gamma \equiv \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n$.

(2) Demostrar que para toda derivación $d : (\Gamma \vdash \Delta)$ en el sistema LK, existe una derivación $d' : (\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot)$ en el sistema NK.

Observación: los casos en (2) son mucho más técnicos que en (1), debido al desplazamiento del contexto Δ por la izquierda bajo una negación. Se usan masivamente las reglas admisibles de NK —para reorganizar el contexto— así como la regla del absurdo.

(3) Deducir de (2) que si $\Gamma \vdash \phi$ es derivable en LK, entonces $\Gamma \vdash \phi$ es derivable en NK.

Ejercicio 4 (Forma prenexa y forma normal conjuntiva)**.** — Se dice que una fórmula ϕ es *en forma prenexa* cuando ϕ es de la forma $\phi \equiv Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \phi_0$, donde $Q_1, \ldots, Q_n$ $(n \geq 0)$ son cuantificadores y donde ϕ_0 es una fórmula sin cuantificadores (el *cuerpo* de la forma prenexa).

(1) Demostrar que toda fórmula es equivalente a alguna fórmula en forma prenexa.
(2) Suponiendo que la fórmula $\phi(x)$ es sin cuantificadores, dar dos formas prenexas distintas del principio de inducción: $\psi \equiv \phi(0) \wedge \forall x\,(\phi(x) \Rightarrow \phi(s(x))) \Rightarrow \forall x\,\phi(x)$.
(3) Escribir la siguiente fórmula en forma prenexa:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon\,(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta\,(\delta > 0 \wedge \forall x\,\forall y\,(d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon))) \\ &\quad \Rightarrow \ \forall x\,\forall \varepsilon\,(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta\,(\delta > 0 \wedge \forall y\,(d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon))) \end{aligned}$$

Se llaman:

- *fórmula atómica* a toda fórmula ϕ de la forma $\phi \equiv (t_1 = t_2)$ o $\phi \equiv p(t_1, \ldots, t_k)$[1];
- *literal* a toda fórmula que es o bien una fórmula atómica, o bien su negación;
- *cláusula* a toda disyunción finita de literales (donde $\bot$ es la cláusula vacía);
- *forma normal conjuntiva* (FNC) a toda conjunción finita de cláusulas (donde $\top$ es la forma normal conjuntiva trivial).

(4) Demostrar que toda fórmula sin cuantificadores es equivalente a alguna FNC.
(5) Escribir los cuerpos de las formas prenexas obtenidas en (2) y (3) en FNC.

Observación: Los resultados de este ejercicio sólo se cumplen en lógica clásica.

[1] En esta definición, se excluyen las unidades $\top$ y $\bot$ de la noción de fórmula atómica.