Práctico 7: Aritmética de Peano

El *lenguaje de la aritmética* es el lenguaje de primer orden definido a partir de un símbolo de constante 0 («cero»), un símbolo de función unario s («sucesor»), dos símbolos de función binarios $+$ («suma»), $\times$ («producto») y el único símbolo de predicado binario $=$ («igualdad»). La *aritmética de Peano* (notación: PA) es la teoría de primer orden sobre el lenguaje anterior, cuyos axiomas son los siguientes:

(A_1) $\forall x\,(x + 0 = x)$
(A_2) $\forall x\,\forall y\,(x + s(y) = s(x + y))$
(A_3) $\forall x\,(x \times 0 = 0)$
(A_4) $\forall x\,\forall y\,(x \times s(y) = (x \times y) + x)$
(A_5) $\forall x\,\forall y\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
(A_6) $\forall x\,(s(x) \neq 0)$
(A_7) $\forall \vec{z}\,(\phi[x := 0] \wedge \forall x\,(\phi \Rightarrow \phi[x := s(x)]) \Rightarrow \forall x\,\phi)$
para toda fórmula ϕ con variables libres $\vec{z} \equiv x_1, \ldots, x_k$ y x.

Ejercicio 1. — Derivar la siguientes fórmulas en PA:

(1) $\forall x\,(x = 0 \vee \exists y\,(x = s(y)))$
(2) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((x + y) + z = x + (y + z))$
(3) $\forall x\,(0 + x = x)$
(4) $\forall x\,\forall y\,(s(x) + y = s(x + y))$
(5) $\forall x\,\forall y\,(x + y = y + x)$
(6) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \times (y + z) = x \times y + x \times z)$

Orden En PA, se definen las relaciones $x \leq y$ y $x < y$ por las abreviaturas:

$$x \leq y \;:\equiv\; \exists z\,(x + z = y) \quad \text{y} \quad x < y \;:\equiv\; s(x) \leq y.$$

Ejercicio 2. — Derivar la siguientes fórmulas en PA:

(1) $\forall x\,(x \leq x)$
(2) $\forall x\,\forall y\,(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$
(3) $\forall x\,\forall y\,(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$

Ejercicio 3 (Buen orden)**.** — Sea $\phi(x)$ una fórmula de PA que depende de x, y posiblemente de otras variables $\vec{z}$ (que actúan como parámetros).

(1) Demostrar por inducción sobre x que:
$\forall x\,[\phi(x) \;\Rightarrow\; \exists x_0\,(\phi(x_0) \wedge \forall y\,(\phi(y) \Rightarrow x_0 \leq y))]$
(2) Deducir de lo anterior el principio de buen orden:
$\exists x\,\phi(x) \;\Rightarrow\; \exists x\,(\phi(x) \wedge \forall y\,(\phi(y) \Rightarrow x \leq y))$.

Consistencia computacional A cada entero externo[1] $n \in \mathbb{N}$ se asocia un término cerrado $\overline{n}$ del lenguaje de la aritmética, llamado *entero de Peano* n y definido por

$$\overline{n} \equiv s^n(0) \equiv \underbrace{s(\cdots s}_{n \text{ veces}}(0)\cdots)$$

A cada término cerrado t del lenguaje de la aritmética, se asocia un entero externo $\mathrm{Val}(t) \in \mathbb{N}$, llamado el *valor de* t y definido por inducción estructural sobre t con las ecuaciones:

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathrm{Val}(0) & = & 0 & \qquad & \mathrm{Val}(t+u) & = & \mathrm{Val}(t) + \mathrm{Val}(u) \\ \mathrm{Val}(s(t)) & = & \mathrm{Val}(t) + 1 & & \mathrm{Val}(t \times u) & = & \mathrm{Val}(t) \cdot \mathrm{Val}(u) \end{array}$$

Por definición, es claro que $\mathrm{Val}(\overline{n}) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. — En este ejercicio, se trabaja en $\mathrm{PA}^- := \mathrm{PA} - (A_7)$, es decir: en la aritmética de Peano sin esquema de inducción.

(1) Verificar que $\mathrm{PA}^- \vdash \overline{n} = \overline{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Demostrar que para todos $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$, tenemos que: $\mathrm{PA}^- \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$. (*Sugerencia:* la derivación se construye por inducción externa sobre $\mathrm{mín}(n, m)$.)

(3) Demostrar que para todos $n, m \in \mathbb{N}$: $\mathrm{PA}^- \vdash \overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$.

(4) Demostrar que para todos $n, m \in \mathbb{N}$: $\mathrm{PA}^- \vdash \overline{n} \times \overline{m} = \overline{nm}$.

(5) Deducir de lo anterior que para todo término cerrado t: $\mathrm{PA}^- \vdash t = \overline{n}$, donde $n = \mathrm{Val}(t)$.

(6) Demostrar que para todos términos cerrados t y u:

$$\begin{cases} \mathrm{PA}^- \vdash t = u & \text{si } \mathrm{Val}(t) = \mathrm{Val}(u) \\ \mathrm{PA}^- \vdash t \neq u & \text{si } \mathrm{Val}(t) \neq \mathrm{Val}(u) \end{cases}$$

(7) Demostrar que si PA^- es consistente, entonces para todos términos cerrados t y u:

$$\mathrm{PA}^- \vdash t = u \quad \text{si y sólo si} \quad \mathrm{Val}(t) = \mathrm{Val}(u).$$

¿Qué pasa si PA^- es inconsistente?

(8) Misma pregunta que (7), remplazando PA^- por PA.

Completitud respecto a las fórmulas sin cuantificadores A cada fórmula cerrada ϕ sin cuantificadores del lenguaje de la aritmética, se asocia un entero externo $\mathrm{Val}(\phi) \in \{0, 1\}$, llamado *valor de* ϕ y definido por inducción estructural sobre ϕ con las ecuaciones:

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathrm{Val}(t_1 = t_2) & = & \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{Val}(t_1) = \mathrm{Val}(t_2) \\ 0 & \text{si } \mathrm{Val}(t_1) \neq \mathrm{Val}(t_2) \end{cases} & \qquad & \mathrm{Val}(\top) = 1 & \qquad & \mathrm{Val}(\bot) = 0 \\ \mathrm{Val}(\phi \Rightarrow \psi) & = & \mathrm{máx}(1 - \mathrm{Val}(\phi), \mathrm{Val}(\psi)) & & \mathrm{Val}(\neg\phi) & = & 1 - \mathrm{Val}(\phi) \\ \mathrm{Val}(\phi \wedge \psi) & = & \mathrm{mín}(\mathrm{Val}(\phi), \mathrm{Val}(\psi)) & & \mathrm{Val}(\phi \vee \psi) & = & \mathrm{máx}(\mathrm{Val}(\phi), \mathrm{Val}(\psi)) \end{array}$$

Ejercicio 5. — En este ejercicio, se trabaja de nuevo en $\mathrm{PA}^- := \mathrm{PA} - (A_7)$.

[1] Es decir, un entero natural de la metateoría, en contraste con los enteros abstractos descritos por PA.

(1) Demostrar que PA^- es completa respecto a las fórmulas sin cuantificadores, es decir:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{PA}^- \vdash \phi & \text{si } \mathrm{Val}(\phi) = 1 \\ \mathrm{PA}^- \vdash \neg\phi & \text{si } \mathrm{Val}(\phi) = 0 \end{array}$$

para toda fórmula cerrada ϕ sin cuantificadores.

(2) Demostrar que si PA^- es consistente, entonces

$$\mathrm{PA}^- \vdash \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathrm{Val}(\phi) = 1.$$

para toda fórmula cerrada ϕ sin cuantificadores.

(3) Misma pregunta que (2), remplazando PA^- por PA.

Una aritmética no estándar Dada una teoría axiomática $\mathscr{T}$, se escriben:

- $\mathscr{V}(\mathscr{T})$ el *vocabulario* de $\mathscr{T}$;
- $\mathscr{L}(\mathscr{T})$ el *lenguaje de las fórmulas* de $\mathscr{T}$;
- $\mathscr{L}_0(\mathscr{T})$ el *lenguaje de las fórmulas cerradas* de $\mathscr{T}$;
- $\mathrm{Ax}(\mathscr{T})$ ($\subseteq \mathscr{L}_0(\mathscr{T})$) el *sistema de axiomas* de $\mathscr{T}$.

También se usa el símbolo $\mathscr{T}$ para indicar el conjunto de todos los *teoremas* de $\mathscr{T}$.

Dadas dos teorías axiomáticas $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}'$, se recuerda que $\mathscr{T}'$ es una *extensión conservativa* de $\mathscr{T}$ cuando $\mathscr{T}' \cap \mathscr{L}_0(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$. Esto implica obviamente que $\mathscr{T}'$ es una extensión de $\mathscr{T}$ (es decir: $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$), pero también implica que las teorías $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}'$ son equiconsistentes.

Ejercicio 6. — Para todo entero externo $n \in \mathbb{N}$, se define la teoría $\mathscr{T}_n$ por:

- $\mathscr{V}(\mathscr{T}_n) = \mathscr{V}(\mathrm{PA}) \uplus \{c\}$, donde c es un nuevo símbolo de constante.
- $\mathrm{Ax}(\mathscr{T}_n) = \mathrm{Ax}(\mathrm{PA}) \cup \{c \neq \overline{m} : m < n\}$

Por construcción, es claro que $\mathrm{PA} \subseteq \mathscr{T}_0$ y $\mathscr{T}_n \subseteq \mathscr{T}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado un entero externo $n \in \mathbb{N}$ y un término t del lenguaje de $\mathscr{T}_n$, se escribe $t[c := \overline{n}]$ el término de PA obtenido remplazando todas las ocurrencias de la constante c en t por el término cerrado $\overline{n}$. Dada una fórmula ϕ, un contexto Γ y una derivación d del lenguaje de $\mathscr{T}_n$, se definen las notaciones $\phi[c := \overline{n}]$, $\Gamma[c := \overline{n}]$ y $d[c := \overline{n}]$ de modo similar.

(1) Verificar que $(t[x := u])[c := \overline{n}] \equiv (t[c := \overline{n}])[x := u[c := \overline{n}]]$ y $(\phi[x := u])[c := \overline{n}] \equiv (\phi[c := \overline{n}])[x := u[c := \overline{n}]]$ para todos ϕ, t, u del lenguaje de $\mathscr{T}_n$.

(2) Demostrar que si d es una derivación del secuente $\Gamma \vdash \phi$ en NK, entonces $d[c := \overline{n}]$ es una derivación (bien formada) del secuente $\Gamma[c := \overline{n}] \vdash \phi[c := \overline{n}]$ en NK.

(3) Demostrar que si $\mathscr{T}_n \vdash \phi$, entonces $\mathrm{PA} \vdash \phi[c := \overline{n}]$.

(4) Deducir que $\mathscr{T}_n$ es una extensión conservativa de PA.

Sea $\mathscr{T}_\omega$ la teoría definida por $\mathscr{T}_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_n$. Su vocabulario es $\mathscr{V}(\mathrm{PA}) \uplus \{c\}$, mientras sus axiomas son los axiomas de Peano, más todos los axiomas de la forma $c \neq \overline{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

(5) Demostrar que $\mathscr{T}_\omega$ es una extensión conservativa de PA, equiconsistente con PA.

(6) Demostrar que $\mathscr{T}_\omega \vdash \overline{n} < c$ para todo entero externo $n \in \mathbb{N}$.
(*Sugerencia:* se puede usar que: $\mathrm{PA} \vdash \forall x\,(\overline{n} < x \Leftrightarrow x \neq \overline{0} \wedge \cdots \wedge x \neq \overline{n})$.)

(7) Demostrar que: $\mathscr{T}_\omega \vdash c < s(c)$, $\mathscr{T}_\omega \vdash s(c) < c + c$, $\mathscr{T}_\omega \vdash c + c < c \times c$.

Se considera la fórmula $\mathrm{Prim}(x) :\equiv x \neq s(0) \wedge \forall y\,\forall z\,(x = y \times z \Rightarrow y = s(0) \vee z = s(0))$,
y se define la teoría $\mathscr{T}'_\omega$ por $\mathscr{V}(\mathscr{T}'_\omega) = \mathscr{V}(\mathscr{T}_\omega)$ y $\mathrm{Ax}(\mathscr{T}'_\omega) = \mathrm{Ax}(\mathscr{T}_\omega) \cup \{\mathrm{Prim}(c)\}$.

(8) ¿Es $\mathscr{T}'_\omega$ una extensión conservativa de PA? ¿una extensión conservativa de $\mathscr{T}_\omega$?