Práctico 8: Teoría de modelos

Recordatorio Sea $\mathscr{T}$ una teoría de primer orden sobre un lenguaje $\mathscr{L}$. Se llama *modelo* de $\mathscr{T}$ a toda $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$ que satisface todos los teoremas de $\mathscr{T}$ (notación: $\mathscr{M} \models \mathscr{T}$). Cuando $\mathscr{T}$ es una teoría axiomática (i.e. generada por un conjunto de axiomas $\mathrm{Ax}(\mathscr{T})$), una $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$ es un modelo de $\mathscr{T}$ si y sólo si satisface todos los axiomas de $\mathscr{T}$:

$$\mathscr{M} \models \mathscr{T} \qquad \text{sii} \qquad \mathscr{M} \models \phi \ \text{ para todo } \phi \in \mathrm{Ax}(\mathscr{T}).$$

Los principales teoremas de la teoría de modelos son los siguientes:

- ***Teorema de completitud (dos formulaciones equivalentes)***:
  (1) *Une teoría $\mathscr{T}$ es consistente si y sólo si $\mathscr{T}$ admite un modelo.*
  (2) $\mathscr{T} \vdash \phi$ *si y sólo si* $\mathscr{M} \models \phi$ *para todo modelo* $\mathscr{M} \models \mathscr{T}$.
- ***Teorema de compacidad***: *Una teoría axiomática $\mathscr{T}$ (i.e. generada por un conjunto de axiomas) admite un modelo si y sólo si todas sus subteorías finitas admiten un modelo.*

  (Obs.: Una subteoría finita de una teoría axiomática $\mathscr{T}$ es una subteoría $\mathscr{T}_0 \subseteq \mathscr{T}$ con un subvocabulario finito, y generada por un subconjunto finito de $\mathrm{Ax}(\mathscr{T})$.)
- ***Teorema de Löwenheim-Skolem (caso finito o numerable)***: *Toda teoría consistente cuyo vocabulario es finito o numerable admite un modelo finito o numerable.*

Ejercicio 1. — Para cada uno de los siguientes lenguajes (dados por su vocabulario Σ), hallar una fórmula que separa las dos estructuras $\mathscr{M}_1$ y $\mathscr{M}_2$ dadas con el lenguaje[1]:

(1)	$\Sigma = \{\leq\}$	$\mathscr{M}_1 = (\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$	$\mathscr{M}_2 = (\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$
(2)	$\Sigma = \{\leq\}$	$\mathscr{M}_1 = (\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$	$\mathscr{M}_2 = (\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$
(3)	$\Sigma = \{*\}$	$\mathscr{M}_1 = (\mathbb{N}, \times_{\mathbb{N}})$	$\mathscr{M}_2 = (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \cap)$
(4)	$\Sigma = \{c, *\}$	$\mathscr{M}_1 = (\mathbb{N}, 1, \times_{\mathbb{N}})$	$\mathscr{M}_2 = (\mathbb{Z}, 1, \times_{\mathbb{Z}})$
(5)	$\Sigma = \{c, d, *\}$	$\mathscr{M}_1 = (\mathbb{R}, 0, 1, \times_{\mathbb{R}})$	$\mathscr{M}_2 = (\mathbb{Q}, 0, 1, \times_{\mathbb{Q}})$

Ejercicio 2. — Sea $\mathscr{T}$ la teoría axiomática cuyo lenguaje $\mathscr{L}$ contiene un único símbolo de predicado binario $r(\_,\_)$, y cuyos axiomas son:

$$\begin{array}{llll} (A_1) & \exists x\, \exists y\, r(x,y) & (A_3) & \forall x\, \forall y\, \forall z\, (r(x,y) \land r(y,z) \Rightarrow r(x,z)) \\ (A_2) & \forall x\, \neg r(x,x) & (A_4) & \forall x\, \forall y\, (r(x,y) \Rightarrow \exists z\, (r(x,z) \land r(z,y))) \end{array}$$

(1) Dar varios modelos de $\mathscr{T}$, no isomorfos. Deducir que $\mathscr{T}$ es consistente.

(2) Demostrar que todo modelo de $\mathscr{T}$ es infinito.

(3) Demostrar que para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, la teoría $\mathscr{T} \setminus (A_i)$ admite un modelo finito. Se exhibirá un modelo finito (de cardinal) minimal para cada valor de $i \in \{1,2,3,4\}$.

(4) Deducir que los cuatro axiomas (A_1)–(A_4) son independientes.

[1] Es decir una fórmula ϕ tal que $\mathscr{M}_1 \models \phi$ y $\mathscr{M}_2 \not\models \phi$ (o viceversa).

Ejercicio 3 (Rojo y negro)**.** — Se considera la teoría $\mathscr{T}$ de primer orden cuyo lenguaje $\mathscr{L}$ está definido a partir de un símbolo de función unario f y dos símbolos de predicado unarios R («rojo») y N («negro»), y cuyos axiomas son:

$$\begin{aligned}&\forall x\,(R(x) \Leftrightarrow \neg N(x))\\&\forall x\,\forall y\,(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)\\&\forall x\,(R(x) \Leftrightarrow N(f(x)))\end{aligned}$$

(1) Dar dos modelos no isomorfos de $\mathscr{T}$.
(2) Demostrar en $\mathscr{T}$ las fórmulas $\forall x\,(R(x) \vee N(x))$ y $\forall x\,(N(x) \Leftrightarrow R(f(x)))$.
(3) Demostrar que todo modelo finito de $\mathscr{T}$ es de cardinal par, y que para todo entero par $n = 2p \geq 1$, $\mathscr{T}$ admite un modelo finito de cardinal n.
(4) Demostrar que la teoría no es completa, exhibiendo una fórmula cerrada ϕ de $\mathscr{L}$ tal que $\mathscr{T} \nvdash \phi$ y $\mathscr{T} \nvdash \neg\phi$.

Ejercicio 4. — Se considera la teoría $\mathscr{T}$ de primer orden cuyo lenguaje $\mathscr{L}$ está definido a partir de un símbolo de constante 0, un símbolo de función unario s y un símbolo de predicado binario $\leq$, y cuyos axiomas son:

$$\begin{array}{ll}\forall x\,(0 \leq x) & \forall x\,\forall y\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)\\ \forall x\,\forall y\,(x \leq y \wedge y \leq x \;\Leftrightarrow\; x = y) & \forall x\,(x \leq s(x) \wedge x \neq s(x))\\ \forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \leq y \wedge y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z) & \forall x\,\forall y\,(y \leq x \wedge y \leq s(x) \;\Rightarrow\; y = x \vee y = s(x))\end{array}$$

(1) Dar dos modelos no isomorfos de $\mathscr{T}$.
(2) ¿Puede hallar una fórmula que separa estos dos modelos?

Ejercicio 5 (Espectro de una teoría)**.** — Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden cualquiera.

(1) Para cada entero $n \geq 1$, formalizar en $\mathscr{L}$ las siguientes aserciones:
   - ϕ_n: «el universo del discurso tiene al menos n objetos distintos»;
   - ψ_n: «el universo del discurso tiene a lo sumo n objetos distintos»;
   - χ_n: «el universo del discurso tiene exactamente n objetos distintos».
(2) Verificar que las $\mathscr{L}$-estructuras $\mathscr{M}$ tales que $\mathscr{M} \models \phi_n$ (resp. $\mathscr{M} \models \psi_n$, $\mathscr{M} \models \chi_n$) son las que tienen al menos (resp. a lo sumo, exactamente) n elementos.

Dada una teoría de primer orden $\mathscr{T}$ sobre el lenguaje $\mathscr{L}$, se llama *espectro de* $\mathscr{T}$ y se escribe $Sp(\mathscr{T})$ al conjunto de todos los cardinales de los modelos finitos de $\mathscr{T}$.

(3) Dar ejemplos de teorías que tienen los siguientes espectros:

$$\varnothing, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}^*, \quad \{42\}, \quad \{30, 6, 2016\}, \quad 2\mathbb{N}^*, \quad \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ no es primo}\}$$

(4) Demostrar que toda teoría cuyo espectro es infinito admite un modelo infinito.
(*Sugerencia:* se puede aplicar el teorema de compacidad con $\mathscr{T}' := \mathscr{T} + \{\phi_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, donde $(\phi_n)_{n\geq 1}$ es la familia de fórmulas construida en el ítem (1).)
(5) Deducir que la teoría de los grupos finitos no es axiomatizable al primer orden, es decir: no existe ninguna teoría de primer orden $\mathscr{T}$ cuyos modelos son los grupos finitos.

Ejercicio 6 (Modelos no estándar de PA). — Sea $\mathscr{M}$ un modelo de la aritmética de Peano (PA). Se recuerda que el modelo estándar $\mathbb{N}$ de PA se encaja en $\mathscr{M}$ por la función $\phi : \mathbb{N} \to \mathscr{M}$ que asocia a todo $n \in \mathbb{N}$ el punto $\phi(n) \in \mathscr{M}$ definido por $\phi(n) = (s^n(0))^{\mathscr{M}}$.

(1) Verificar que la función $\phi : \mathbb{N} \to \mathscr{M}$ est inyectiva.
(*Sugerencia*: usar el resultado del Práctico 7, Ejercicio 4 (2))

(2) Verificar que para todos $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\phi(n+1) \;=\; s^{\mathscr{M}}(\phi(n)), \qquad \phi(n+m) \;=\; \phi(n) +^{\mathscr{M}} \phi(m), \qquad \phi(nm) \;=\; \phi(n) \times^{\mathscr{M}} \phi(m)$$

(*Sugerencia*: usar los resultados del Práctico 7, Ejercicio 4 (3,4))

El subconjunto $\phi(\mathbb{N}) \subset \mathscr{M}$ constituye un submodelo de $\mathscr{M}$ que es isomorfo al modelo estándar $\mathbb{N}$, y cuyos elementos se llaman los *elementos estándar* de $\mathscr{M}$. Se dice que el modelo $\mathscr{M}$ es *no estándar* cuando $\phi(\mathbb{N}) \neq \mathscr{M}$, es decir: cuando $\mathscr{M}$ admite al menos un elemento no estándar.

En lo siguiente, se supone que $\mathscr{M}$ es un modelo no estándar de PA.

Orden en $\mathscr{M}$ Dados $u, v \in \mathscr{M}$, se escribe $u \leq^{\mathscr{M}} v$ cuando existe $w \in \mathscr{M}$ tal que $u +^{\mathscr{M}} w = v$.

(3) Demostrar que la relación $\leq^{\mathscr{M}}$ es un orden total en $\mathscr{M}$.

(4) Demostrar que si $u \leq^{\mathscr{M}} v$ y si v es estándar, entonces u es estándar.

(5) Construir una sucesión infinita $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{M}$ tal que $u_{i+1} <^{\mathscr{M}} u_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Deducir que $\leq^{\mathscr{M}}$ no es un buen orden sobre $\mathscr{M}$.

Conjuntos definibles Se dice que un subconjunto $E \subset \mathscr{M}$ es *definible* cuando existe una fórmula $\phi(x)$ con una única variable libre x tal que para todo $u \in \mathscr{M}$: $u \in E$ sii $\mathscr{M} \models \phi(u)$.

(6) Sean $E, F \subseteq \mathscr{M}$ conjuntos definibles. Demostrar que los conjuntos E^c $(= \mathscr{M} \setminus E)$, $E \cup F$ y $E \cap F$ son definibles.

(7) Demostrar que si $E \subseteq \mathscr{M}$ es definible y no vacío, entonces E tiene un mínimo, respecto al orden $\leq^{\mathscr{M}}$. Deducir que el conjunto de los elementos no estándar de $\mathscr{M}$ no es definible.

(8) A partir de lo anterior, demostrar que todo conjunto definible que contiene una cantidad infinita de elementos estándar contiene al menos un elemento no estándar.

La relación $\sim$ en $\mathscr{M}$ Se considera la relación binaria $u \sim v$ sobre $\mathscr{M}$ definida por $u \sim v$ sii existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $u +^{\mathscr{M}} \phi(n) = v +^{\mathscr{M}} \phi(m)$.

(9) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathscr{M}$. ¿Cúal es la clase de $0^{\mathscr{M}}$?

(10) Demostrar que si $u_1 \sim u_2$ y $v_1 \sim v_2$, entonces $u_1 +^{\mathscr{M}} v_1 \sim u_2 +^{\mathscr{M}} v_2$.

Se escribe $Q = \mathscr{M}/\!\sim$ al cociente de $\mathscr{M}$ por la relación $\sim$. Dado dos clases $a, b \in Q$, se escribe $a \leq b$ cuando existen $u \in a$ y $v \in b$ tales que $u \leq^{\mathscr{M}} v$.

(11) Demostrar que la relación $a \leq b$ es una relación de orden total en Q, que tiene un mínimo, pero que no tiene máximo.

(12) Usando el hecho que $\mathrm{PA} \vdash \forall x\, \exists y\, (x = 2y \lor x = 2y + 1)$, demostrar que la relación $a \leq b$ sobre Q es un orden denso.