El cálculo de secuentes clásico (LK)

Alexandre Miquel

3 de noviembre de 2020

Sistemas de deducción

Existen múltiples sistemas de deducción en lógica clásica:

- Los sistemas de Hilbert [Frege 1879, Hilbert 1925]
- Los sistemas de deducción natural [Gentzen 1934]
- Los cálculos de secuentes [ídem]

Todos definen la misma clase de fórmulas demostrables en lógica clásica (es decir: las tautologías del cálculo de predicados)

- En las clases anteriores, vimos una presentación de la deducción natural clásica con secuentes explícitos: el sistema NK
- Hoy, veremos el cálculo de secuentes (clásico): el sistema LK

Observación: Los 4 sistemas NK/NJ y LK/LJ fueron introducidos en un mismo artículo de Gerhard Gentzen (1909–1945):

- Gerhard Gentzen. „Untersuchungen über das logische Schließen. I. & II.“ *Mathematische Zeitschrift.* 39(2):176–210, 39(3):405–431. 1935.

De la deducción natural clásica (NK)...

- Secuentes asimétricos de la forma $\Gamma \vdash \psi$ (consecuencia única)
- Oposición entre:
  - Reglas de introducción (¿cómo probar una construcción?)
  - Reglas de eliminación (¿cómo utilizar una construcción?)

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}$$

$+$ regla axioma $\overline{\Gamma \vdash \psi}^{\,(\psi \in \Gamma)}$ (comunicación entre Γ y ψ)

- Reglas estructurales (permut., debilit., contracción) admisibles

$$\frac{\Gamma, \phi_1, \phi_2, \Gamma' \vdash \psi}{\Gamma, \phi_2, \phi_1, \Gamma' \vdash \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi} \qquad \frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}$$

- Sistema más adaptado a la lógica intuicionista (NJ); se recupera la lógica clásica (NK) mediante un truco (regla del absurdo)

… al cálculo de secuentes (LK)

- Secuentes simétricos de la forma $\Gamma \vdash \Delta$ (múltiples consecuencias)
- Dos formas de reglas de introducción: reglas izquierdas y derechas

$$\frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \qquad \Gamma', \psi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta, \Delta'} \qquad\qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta}$$

¡No hay reglas de eliminación!

- Reglas de eliminación remplazadas por una única regla de corte:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \phi, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

- Reglas estructurales (permut., debilit., contracción) primitivas
- Sistema LK más adaptado a la lógica clásica debido a
  - la simetría entre hipótesis (izquierda) y consecuencias (derecha)
  - $=$ simetría entre una fórmula ϕ y su negación $\neg\phi$

Plan

Plan

Secuentes del sistema LK

- El sistema LK utiliza secuentes simétricos de la forma

$$\Gamma \vdash \Delta$$

  donde Γ (el antecedente) y Δ (el consecuente) son listas finitas de fórmulas (posiblemente vacías)

- El secuente $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ tiene el mismo significado que la fórmula:

$$\forall \vec{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \psi_i \right)$$

- Casos particulares:
  - $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi_1$ (secuentes asimétricos, NJ/NK)
  - $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash$ («$\phi_1, \ldots, \phi_n$ son contradictorias»)
  - $\vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$ («una de $\psi_1, \ldots, \psi_m$ se cumple»)
  - $\vdash \psi_1$ («ψ_1 es una tautología»)
  - $\vdash$ (secuente vacío: contradiccíon absoluta)

Reglas del sistema LK (1/3)

- Axioma y regla de corte:

(Axioma, Corte) $\dfrac{}{\phi \vdash \phi}$ $\qquad \dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \phi, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$

- Reglas estructurales, izquierdas y derechas:

(Permutación) $\dfrac{\Gamma, \phi, \psi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \psi, \phi, \Gamma' \vdash \Delta}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \phi, \Delta'}$

(Debilitamiento) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}$

(Contracción) $\dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}$

Observación: En lo siguiente, se usan las reglas de permutación de modo implícito (como si Γ, Δ fueran multiconjuntos)

Reglas del sistema LK (2/3)

- Reglas lógicas, izquierdas y derechas:

	Izquierda		Derecha
$(\neg)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\phi, \Delta}$
$(\Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \qquad \Gamma', \psi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta, \Delta'}$		$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta}$
$(\wedge)$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta}$		$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \qquad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi, \Delta}$
$(\vee)$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \Delta}$		$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi, \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi, \Delta}$
$(\top)$	$\varnothing$		$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
$(\bot)$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$		$\varnothing$

Reglas del sistema LK (3/3)

- Reglas lógicas, izquierdas y derechas (continuación):

$$(\forall)\qquad \frac{\Gamma, \phi[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, \phi \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\, \phi, \Delta}\ (\text{si } x \notin FV(\Gamma, \Delta))$$

$$(\exists)\qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, \phi \vdash \Delta}\ (\text{si } x \notin FV(\Gamma, \Delta)) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi[x := t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\, \phi, \Delta}$$

$$(=)\qquad \frac{\Gamma, \phi[x := u] \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \phi[x := t], \Delta'}{\Gamma, \Gamma', t = u \vdash \Delta, \Delta'} \qquad\qquad \frac{}{\vdash t = t}$$

- **Observación:** El sistema LK no tiene reglas para la equivalencia lógica $\phi \Leftrightarrow \psi$, que siempre puede ser definida por

$$\phi \Leftrightarrow \psi \quad :\equiv \quad (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$$

Ejemplos (1/4)

- Conmutatividad de $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\ (\mathsf{Ax})}{\phi \wedge \psi \vdash \psi}\ (\wedge_{L_2}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\ (\mathsf{Ax})}{\phi \wedge \psi \vdash \phi}\ (\wedge_{L_1})}{\dfrac{\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi}{\vdash \phi \wedge \psi \Rightarrow \psi \wedge \phi}\ (\Rightarrow_R)}\ (\wedge_R)$$

- Conmutatividad de $\vee$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\ (\mathsf{Ax})}{\phi \vdash \psi \vee \phi}\ (\vee_{R_2}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\ (\mathsf{Ax})}{\psi \vdash \psi \vee \phi}\ (\vee_{R_1})}{\dfrac{\phi \vee \psi \vdash \psi \vee \phi}{\vdash \phi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \phi}\ (\Rightarrow_R)}\ (\vee_L)$$

Ejemplos

- Tercer excluido + equivalencia con la doble negación

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,(\mathsf{Ax})}{\vdash \phi,\ \neg\phi}\,(\neg_R)}{\vdash \phi,\ \phi \lor \neg\phi}\,(\lor_{R_2})}{\vdash \phi \lor \neg\phi,\ \phi \lor \neg\phi}\,(\lor_{R_1})}{\vdash \phi \lor \neg\phi}\,(\mathsf{Contr}_R)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,(\mathsf{Ax})}{\phi, \neg\phi \vdash}\,(\neg_L)}{\phi \vdash \neg\neg\phi}\,(\neg_R)}{\vdash \phi \Rightarrow \neg\neg\phi}\,(\Rightarrow_R)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,(\mathsf{Ax})}{\vdash \neg\phi, \phi}\,(\neg_R)}{\neg\neg\phi \vdash \phi}\,(\neg_L)}{\vdash \neg\neg\phi \Rightarrow \phi}\,(\Rightarrow_R)$$

- Equivalencia con el contrarrecíproco:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,(\mathsf{Ax})}{\vdash \phi, \neg\phi}\,(\neg_R) \quad \dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,(\mathsf{Ax})}{\psi, \neg\psi \vdash}\,(\neg_L)}{\phi \Rightarrow \psi,\ \neg\psi \vdash \neg\phi}\,(\Rightarrow_L)}{\phi \Rightarrow \psi \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\phi}\,(\Rightarrow_R)}{\vdash (\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\phi)}\,(\Rightarrow_R)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,(\mathsf{Ax})}{\vdash \neg\psi, \psi}\,(\neg_L) \quad \dfrac{\dfrac{}{\phi \vdash \phi}\,(\mathsf{Ax})}{\vdash \neg\phi, \phi}\,(\neg_R)}{\neg\psi \Rightarrow \neg\phi,\ \phi \vdash \psi}\,(\Rightarrow_L)}{\neg\psi \Rightarrow \neg\phi \vdash \phi \Rightarrow \psi}\,(\Rightarrow_R)}{\vdash (\neg\psi \Rightarrow \neg\phi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \psi)}\,(\Rightarrow_R)$$

Ejemplos

- La ley de Peirce:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\phi \vdash \phi$}
\RightLabel{(Weak_R)}
\UnaryInfC{$\phi \vdash \psi, \phi$}
\RightLabel{($\Rightarrow_R$)}
\UnaryInfC{$\vdash \phi \Rightarrow \psi,\ \phi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\phi \vdash \phi$}
\RightLabel{($\Rightarrow_L$)}
\BinaryInfC{$(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \phi \vdash \phi,\ \phi$}
\RightLabel{(Contr_R)}
\UnaryInfC{$(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \phi \vdash \phi$}
\RightLabel{($\Rightarrow_R$)}
\UnaryInfC{$\vdash ((\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi$}
\end{prooftree}
$$

Ejemplos

- Paradoja de los bebedores:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p(y) \vdash p(y)}\ (\mathrm{Ax})}{p(y) \vdash p(y), \forall z\, p(z)}\ (\mathrm{Weak}_R)}{p(x_0), p(y) \vdash p(y), \forall z\, p(z)}\ (\mathrm{Weak}_L)}{p(x_0) \vdash p(y),\ p(y) \Rightarrow \forall z\, p(z)}\ (\Rightarrow_R)}{p(x_0) \vdash p(y),\ \exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))}\ (\exists_R)}{p(x_0) \vdash \forall y\, p(y),\ \exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))}\ (\forall_R)}{\vdash p(x_0) \Rightarrow \forall y\, p(y),\ \exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))}\ (\Rightarrow_R)}{\vdash \exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y)),\ \exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))}\ (\exists_R)}{\vdash \exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))}\ (\mathrm{Contr}_R)
$$

- **Obs.:** ¡Los ejemplos anteriores nunca usan la regla de corte!

Reglas admisibles

- Las reglas de permutación, debilitamiento y de contracción son primitivas en LK, a la vez por la izquierda y por la derecha:

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \psi, \phi, \Gamma' \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \phi, \Delta'} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}$$

- **Proposición:** La regla de debilitamiento generalizado es admisible:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'} \qquad (\text{si } \Gamma \subset \Gamma',\ \ \Delta \subset \Delta')$$

- **Proposición:** La regla de sustitutividad es admisible:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma[x := u] \vdash \Delta[x := u]}$$

Demostración: Por inducción sobre la derivación de $\Gamma \vdash \Delta$

Plan

La regla de corte (1/3)

- La regla de corte es una generalización de la regla de contradicción y de la regla de modus ponens:

$$\frac{\phi \vdash \qquad \vdash \phi}{\vdash} \qquad\qquad \frac{\phi \vdash \psi \qquad \vdash \phi}{\vdash \psi}$$

- Estas reglas se pueden generalizar

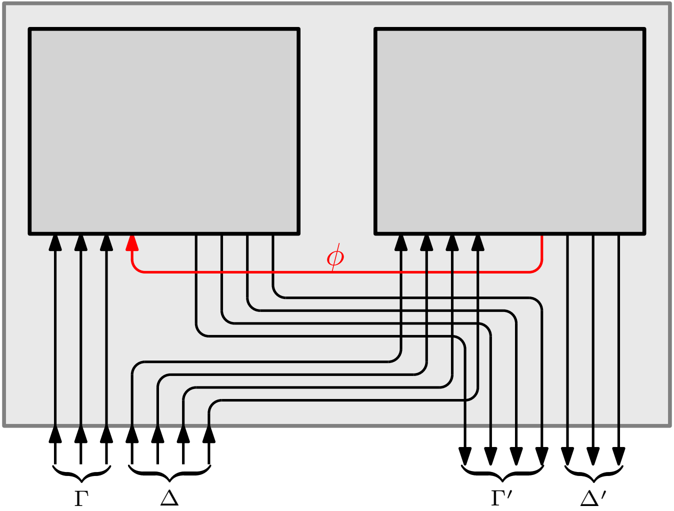
$$\frac{\phi \vdash \Delta \qquad \vdash \phi}{\vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\phi \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \phi}{\Gamma' \vdash \Delta}$$

hasta la forma general de la regla de corte:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \phi, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \ (\mathrm{cut})$$

- **Intuición:** La fórmula cortada ϕ representa un lema...
  - ... que se demuestra en $\Gamma' \vdash \phi, \Delta'$
  - ... que se utiliza en $\Gamma, \phi \vdash \Delta$

La regla de corte (2/3)



La regla de corte (3/3)

La regla de corte permite simular las reglas de eliminación de la deducción natural

- Eliminación de $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\phi \vdash \phi}\ (\mathsf{Ax})}{\phi \wedge \psi \vdash \phi}\ (\wedge_{L_1}) \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash \phi \wedge \psi, \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}\ (\mathsf{cut})$$

- Eliminación de $\Rightarrow$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\phi \vdash \phi}\ (\mathsf{Ax}) \quad \overline{\psi \vdash \psi}\ (\mathsf{Ax})}{\phi \Rightarrow \psi, \phi \vdash \psi}\ (\Rightarrow_L) \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta\end{array}}{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}\ (\mathsf{cut}) \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma' \vdash \phi, \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi, \Delta, \Delta'}\ (\mathsf{cut})$$

- $+$ eliminación de $\vee$, $\forall$, $\exists$, etc. (¡Ejercicio!)

Propiedades de inversión

La regla de corte también permite demostrar las siguientes equivalencias:

Proposición (Equivalencias de inversión)

En el sistema LK:

$$\Gamma, \phi, \psi \vdash \Delta \quad \text{sii} \quad \Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta$$

$$\Gamma \vdash \phi, \psi, \Delta \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash \phi \vee \psi, \Delta$$

$$\Gamma \vdash \Delta \quad \text{sii} \quad \Gamma, \top \vdash \Delta$$

$$\Gamma \vdash \Delta \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash \bot, \Delta$$

$$\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta$$

Si $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$: $\quad \Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \text{sii} \quad \Gamma, \exists x\, \phi \vdash \Delta$

Si $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$: $\quad \Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash \forall x\, \phi, \Delta$

Demostración: Ejercicio

Corolario

En el sistema LK: $\quad \Gamma \vdash \Delta \quad \text{sii} \quad \vdash \forall \vec{x} \left(\bigwedge \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \right)$

El teorema de corte-eliminación

- La regla de corte permite demostrar el carácter admisible (en LK) de muchas reglas útiles en la práctica:
  - reglas de eliminación (en el estilo de la deducción natural),
  - reglas de inversión, equivalencia con la fórmula asociada, etc.
- Sin embargo, no se necesita usar la regla de corte en las derivaciones concretas (véase los ejemplos anteriores)
- Esto está debido al siguiente resultado:

Teorema (Corte-eliminación, Gentzen 1934)

Todo secuente derivable en el sistema LK tiene una derivación sin cortes

- Dicho de otro modo, la regla de corte es admisible en $\mathrm{LK} \setminus \mathrm{corte}$
- **Idea de la demostración:** (afuera del programa)

  Algoritmo de reorganización/cancelación de los cortes
  (en las derivaciones) + prueba de terminación

Reducción de cortes (1/3)

(En lo siguiente se usa la raya doble para indicar los cortes)

- Cancelación de corte:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \vdots\, d \\ \Gamma, \phi \vdash \Delta \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ \hline \phi \vdash \phi \end{array}\ (\mathsf{Ax}) \\
\hline\hline
\Gamma, \phi \vdash \Delta
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{c} \vdots\, d \\ \Gamma, \phi \vdash \Delta \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \\ \hline \phi \vdash \phi \end{array}\ (\mathsf{Ax})
\qquad
\begin{array}{c} \vdots\, d' \\ \Gamma' \vdash \phi, \Delta' \end{array} \\
\hline\hline
\Gamma' \vdash \phi, \Delta'
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{c} \vdots\, d' \\ \Gamma' \vdash \phi, \Delta' \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \\ \hline \Gamma, \phi, \perp \vdash \Delta \end{array}\ (\perp_L)
\qquad
\begin{array}{c} \vdots\, d' \\ \Gamma' \vdash \phi, \Delta' \end{array} \\
\hline\hline
\Gamma, \Gamma', \perp \vdash \Delta, \Delta'
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{c} \\ \hline \Gamma, \Gamma', \perp \vdash \Delta, \Delta' \end{array}\ (\perp_L)
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \vdots\, d \\ \Gamma, \phi \vdash \Delta \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ \hline \Gamma', \perp \vdash \phi, \Delta' \end{array}\ (\perp_L) \\
\hline\hline
\Gamma, \Gamma', \perp \vdash \Delta, \Delta'
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{c} \\ \hline \Gamma, \Gamma', \perp \vdash \Delta, \Delta' \end{array}\ (\perp_L)
$$

Reducción de cortes (2/3)

(En lo siguiente se usa la raya doble para indicar los cortes)

- Propagación de corte:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d \\ \Gamma \vdash \phi, \Delta \end{matrix}}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}\,(\neg_L) \qquad \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d' \\ \Gamma', \phi \vdash \Delta' \end{matrix}}{\Gamma' \vdash \neg\phi, \Delta'}\,(\neg_R)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d' \\ \Gamma', \phi \vdash \Delta' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots\, d \\ \Gamma \vdash \phi, \Delta \end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d_i \\ \Gamma, \phi_i \vdash \Delta \end{matrix}}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \Delta}\,(\wedge_{L_i}) \qquad \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d'_1 \\ \Gamma' \vdash \phi_1, \Delta' \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vdots\, d'_2 \\ \Gamma' \vdash \phi_2, \Delta' \end{matrix}}{\Gamma' \vdash \phi_1 \wedge \phi_2, \Delta'}\,(\wedge_R)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d_i \\ \Gamma, \phi_i \vdash \Delta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots\, d'_i \\ \Gamma' \vdash \phi_i, \Delta' \end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d_1 \\ \Gamma, \phi_1 \vdash \Delta \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vdots\, d_2 \\ \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta \end{matrix}}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \vdash \Delta}\,(\vee_L) \qquad \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d'_i \\ \Gamma' \vdash \phi_i, \Delta' \end{matrix}}{\Gamma' \vdash \phi_1 \vee \phi_2, \Delta'}\,(\vee_{R_i})}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix} \vdots\, d_i \\ \Gamma, \phi_i \vdash \Delta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots\, d'_i \\ \Gamma' \vdash \phi_i, \Delta' \end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Reducción de cortes (3/3)

(En lo siguiente se usa la raya doble para indicar los cortes)

- Propagación y duplicación de corte ($\Rightarrow$)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\; d_1$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Gamma_1 \vdash \phi, \Delta_1$}
\AxiomC{$\vdots\; d_2$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Gamma_2, \psi \vdash \Delta_2$}
\RightLabel{$(\Rightarrow_L)$}
\BinaryInfC{$\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta_1, \Delta_2$}
\AxiomC{$\vdots\; d'$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Gamma', \phi \vdash \psi, \Delta'$}
\RightLabel{$(\Rightarrow_R)$}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta'$}
\doubleLine
\BinaryInfC{$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta'$}
\end{prooftree}
\rightsquigarrow
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\; d_1$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Gamma_1 \vdash \phi, \Delta_1$}
\AxiomC{$\vdots\; d_2$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Gamma_2, \psi \vdash \Delta_2$}
\AxiomC{$\vdots\; d'$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Gamma', \phi \vdash \psi, \Delta'$}
\doubleLine
\BinaryInfC{$\Gamma_2, \Gamma', \phi \vdash \Delta_2, \Delta'$}
\doubleLine
\BinaryInfC{$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta'$}
\end{prooftree}
$$

- $+$ muchos otros casos de reducción de cortes
- $+$ muchos casos de conmutación de reglas (no mostrados aquí)

Recordatorio: el sistema LK sin corte

(Axioma)	$\dfrac{}{\phi \vdash \phi}$	
(Perm.)	$\dfrac{\Gamma, \phi, \psi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \psi, \phi, \Gamma' \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \phi, \Delta'}$
(Deb., Contr.)	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta} \quad \dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}$
($\neg$)	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\phi, \Delta}$
($\Rightarrow$)	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma', \psi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta, \Delta'}$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta}$
($\wedge$)	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta} \quad \dfrac{\Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi, \Delta} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
($\vee$)	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \Delta} \quad \dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi, \Delta} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi, \Delta}$
($\forall$)	$\dfrac{\Gamma, \phi[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, \phi \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\, \phi, \Delta}$ (si $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$)
($\exists$)	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, \phi \vdash \Delta}$ (si $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$)	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi[x := t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\, \phi, \Delta}$
($=$)	$\dfrac{\Gamma, \phi[x := u] \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \phi[x := t], \Delta'}{\Gamma, \Gamma', t = u \vdash \Delta, \Delta'}$	$\dfrac{}{\vdash t = t}$

Consecuencia del teorema de corte-eliminación

- Se observa que cada regla (y luego: cada derivación) del sistema LK sin cortes tiene al menos una fórmula en su conclusión
- Entonces, el secuente vacío «$\vdash$» no tiene derivación sin cortes
- Por el teorema de corte-eliminación, se deduce que:

Teorema (Consistencia del sistema LK)

El secuente vacío «$\vdash$» no es derivable en el sistema LK

Recordatorio: $\vdash$ derivable en LK sii $\vdash \bot$ derivable en LK

- **Intuición:** Si existiera, una derivación del secuente vacío sería necesariamente de la forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \phi \vdash\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ \vdash \phi\end{array}}{\vdash}$$

(corte no eliminable)

- **Moraleja:** Corte-eliminación $=$ Interpretación computacional de la consistencia del cálculo de predicados

Plan

Equivalencia entre NK y LK: implicación directa

Proposición 1

Si un secuente $\Gamma \vdash \phi$ es derivable en el sistema NK, entonces también lo es en el sistema LK

¡Ningún problema de geometría! Pues:

Secuentes asimétricos de NK $\subset$ Secuentes simétricos de LK

Demostración: Por inducción sobre la derivación de $\Gamma \vdash \phi$ en NK, se construye una derivación del mismo secuente en LK.

En la práctica, basta con simular cada regla de NK en el sistema LK

- Axioma de NK $\rightsquigarrow$ Axioma de LK + debilitamiento (repetido)
- Reglas de introducción (NK) $\rightsquigarrow$ Reglas derechas (LK)
- Reglas de eliminación (NK) $\rightsquigarrow$ Reglas izquierdas (LK) + cortes

Equivalencia entre NK y LK: implicación recíproca (1/2)

Problema de formulación: ¿Cómo traducir los secuentes simétricos de LK en los secuentes asimétricos (i.e. restringidos) de NK?

Dos opciones:

1. $\Gamma \vdash \Delta \quad \rightsquigarrow \quad \Gamma \vdash \bigvee \Delta \qquad$ (con $\bigvee \emptyset \ :\equiv \ \bot$)
2. $\Gamma \vdash \Delta \quad \rightsquigarrow \quad \Gamma, \neg\Delta \vdash \bot \qquad$ (con $\neg(\psi_1, \psi_2, \ldots) \equiv \neg\psi_1, \neg\psi_2, \ldots$)

Proposición 2

Si un secuente $\Gamma \vdash \Delta$ es derivable en el sistema LK, entonces el secuente $\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ es derivable en el sistema NK

Demostración: Basta con verificar que cada regla primitiva de LK se traduce en una regla admisible en NK:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \cdots \quad \Gamma_p \vdash \Delta_p}{\Gamma \vdash \Delta} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Gamma_1, \neg\Delta_1 \vdash \bot \quad \cdots \quad \Gamma_p, \neg\Delta_p \vdash \bot}{\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot}$$

Equivalencia entre NK y LK: implicación recíproca (2/2)

La traducción de cada regla (primitiva) de LK en una regla admisible de NK induce mucha burocracia. Por ejemplo:

- Axioma:

$$\frac{}{\phi \vdash \phi} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\dfrac{}{\phi, \neg\phi \vdash \neg\phi} \quad \dfrac{}{\phi, \neg\phi \vdash \phi}}{\phi, \neg\phi \vdash \bot}$$

- Regla de corte:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \phi, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \phi, \neg\Delta \vdash \bot}}{\Gamma, \neg\Delta, \phi \vdash \bot}}{\Gamma, \neg\Delta \vdash \neg\phi}}{\Gamma, \Gamma', \neg\Delta, \neg\Delta' \vdash \neg\phi} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma', \neg\phi, \neg\Delta' \vdash \bot}}{\Gamma', \neg\Delta', \neg\phi \vdash \bot}}{\Gamma', \neg\Delta' \vdash \neg\neg\phi}}{\Gamma, \Gamma', \neg\Delta, \neg\Delta' \vdash \neg\neg\phi}}{\Gamma, \Gamma', \neg\Delta, \neg\Delta' \vdash \bot}$$

- Reglas estructurales de LK $\rightsquigarrow$ Debilitamiento generalizado en NK
- Reglas lógicas de LK $\rightsquigarrow$ Mucho sudor (en NK)

Equivalencia entre NK y LK: conclusión

Proposición 1

Si un secuente $\Gamma \vdash \phi$ es derivable en el sistema NK, entonces también lo es en el sistema LK

Proposición 2

Si un secuente $\Gamma \vdash \Delta$ es derivable en el sistema LK, entonces el secuente $\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ es derivable en el sistema NK

Teorema

Un secuente asimétrico $\Gamma \vdash \phi$ es derivable en el sistema NK si y sólo si es derivable en el sistema LK

Demostración: $(\Rightarrow)$ Proposición 1.
$(\Leftarrow)$ Si $\Gamma \vdash \phi$ es derivable en LK, entonces $\Gamma, \neg\phi \vdash \bot$ es derivable en NK (Prop. 2), y por lo tanto $\Gamma \vdash \phi$ es derivable en NK (por la regla del absurdo). $\square$

Conclusión: $\boxed{\text{Tautologías de NK} \;=\; \text{Tautologías de LK}}$

El cálculo de secuentes intuicionista: sistema LJ (1/3)

- También existe un cálculo de secuentes intuicionista: el sistema LJ
- El sistema LJ se deduce del sistema LK, restrigiendo éste a los secuentes con 0 o 1 fórmula por la derecha

$$\Gamma \vdash \Xi$$

  (donde Ξ indica una lista de 0 o 1 fórmula)
- El sistema LJ tiene propiedades similares al sistema LK, y es equivalente al sistema NJ.

  También cumple su propio teorema de corte-eliminación

El cálculo de secuentes intuicionista: sistema LJ (2/3)

Notación: $\Xi \quad ::= \quad \emptyset \quad | \quad \psi$ (0 o 1 fórmula)

(Axioma, Corte)	$\dfrac{}{\phi \vdash \phi}$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Xi \qquad \Gamma' \vdash \phi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Xi}$
(Permutación)	$\dfrac{\Gamma, \phi, \psi, \Gamma' \vdash \Xi}{\Gamma, \psi, \phi, \Gamma' \vdash \Xi}$	$\varnothing$
(Debilitamiento)	$\dfrac{\Gamma \vdash \Xi}{\Gamma, \phi \vdash \Xi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \phi}$
(Contracción)	$\dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Xi}{\Gamma, \phi \vdash \Xi}$	$\varnothing$
$(\neg)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash}$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\phi}$
$(\Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma', \psi \vdash \Xi'}{\Gamma, \Gamma', \phi \Rightarrow \psi \vdash \Xi'}$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}$

El cálculo de secuentes intuicionista: sistema LJ (3/3)

$(\wedge)$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Xi}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Xi} \qquad \dfrac{\Gamma, \psi \vdash \Xi}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Xi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}$
$(\vee)$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Xi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Xi}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \Xi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}$
$(\top)$	$\varnothing$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}$
$(\bot)$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Xi}$	$\varnothing$
$(\forall)$	$\dfrac{\Gamma, \phi[x := t] \vdash \Xi}{\Gamma, \forall x\, \phi \vdash \Xi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x\, \phi}$ (si $x \notin FV(\Gamma)$)
$(\exists)$	$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Xi}{\Gamma, \exists x\, \phi \vdash \Xi}$ (si $x \notin FV(\Gamma, \Xi)$)	$\dfrac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x\, \phi}$
$(=)$	$\dfrac{\Gamma, \phi[x := u] \vdash \Xi \qquad \Gamma' \vdash \phi[x := t]}{\Gamma, \Gamma', t = u \vdash \Xi}$	$\dfrac{}{\vdash t = t}$