Introducción al Análisis no estándar

Alexandre Miquel

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY
FACULTAD DE INGENIERIA
EQUIPO DE LÓGICA UDELAR

24 de junio de 2015, Centro de Matemática

Los infinitesimales de Leibniz (1/2)

Cuando introdujo el cálculo infinitesimal, Leibniz definió las nociones de continuidad y de derivabilidad utilizando infinitesimales dx, dy, etc.

- Continuidad de f en x:

$$f(x+dx) \;\simeq\; f(x)$$

- Derivabilidad de f en x:

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \;\simeq\; \frac{df}{dx}(x)$$

(donde $x \simeq y$ significa: $x - y$ es infinitesimal)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Él justificaba la existencia de los infinitesimales utilizando enteros infinitamente grandes, más grandes que todos los 'enteros usuales':

$$dx = 1/N \quad \text{donde} \quad N > n \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ usual})$$

Los infinitesimales de Leibniz (2/2)

Durante siglos (y todavía hoy), los matemáticos, físicos y ingenieros utilizaron los infinitesimales de Leibniz para hacer cálculos correctos

Desgraciadamente, los infinitesimales de Leibniz no tenían fundamentos lógicos sólidos, y podían llevar paradojas:

- ¿Qué es un entero infinitamente grande?
- ¿Cuál es el más pequeño entero infinitamente grande?

Cuando establecieron las fundaciones modernas del Análisis, los matemáticos del siglo 19 renunciaron a los infinitesimales, remplazándolos por el método dicho de "ε/δ":

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en el punto x si:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a, b])(|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

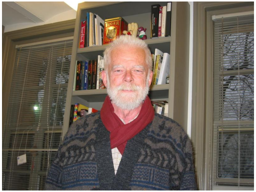
[Cantor, Dedekind, Cauchy, Bolzano, Weierstrass]

Análisis no estándar (de Robinson a Nelson)

En los años 1960, Robinson descubrió un método para introducir números infinitesimales en análisis, con fundamentos lógicos sólidos:

- Introducción de elementos no estándar
  $\Rightarrow$ Análisis no estándar
- Construcción muy general, basada sobre la noción de hiper-extensión (o ultrapotencia)

Abraham Robinson (1918–1974)



Edward Nelson (1932–2014)

En 1977, Nelson aplicó el método de Robinson a toda la teoría de conjuntos

- **IST:** Internal Set Theory
- Extiende la teoría de conjuntos **ZFC** con:
  - elementos no estándar
  - axiomas específicos para describirlos

Plan

Plan

Objetivo

Objetivo: Construir un conjunto ${}^*\mathbb{R}$ de números hiperreales tal que:

1. ${}^*\mathbb{R}$ contiene todos los reales estándar: $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$
2. Las operaciones de cuerpo $(+, -, \times, /)$ y el orden total $(\leq)$ de $\mathbb{R}$ se extienden a ${}^*\mathbb{R}$, manteniendo sus propiedades
3. ${}^*\mathbb{R}$ contiene números infinitamente grandes y infinitesimales

Idea de la construcción

Idea: Definir los hiperreales a partir de las sucesiones de reales usuales:

- Cada número real estándar $x \in \mathbb{R}$ será representado por la sucesión constante $\mathrm{cst}(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida por $\mathrm{cst}(x)_i = x \qquad (\forall i \in \mathbb{N})$
- Los hiperreales infinitesimales serán representados por las sucesiones $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no nulas que convergen hacia 0: $\lim_{i\to\infty} u_i = 0, \quad u_i \neq 0$
- Los hiperreales infinitamente grandes serán representados por las sucesiones $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que tienden hacia ∞: $\lim_{i\to\infty} u_i = \infty$

Además, vamos a identificar las sucesiones que coinciden a partir de algún índice (para ignorar su comportamiento en los primeros términos)

Primer ensayo de construcción

Idea: Definir los hiperreales a partir de las sucesiones de reales usuales, identificando las sucesiones que coinciden a partir de algún índice

Formalmente:

1. Se escribe $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones de números reales
2. Se define la relación binaria $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por:

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i_0 \in \mathbb{N})(\forall i \geq i_0)\ u_i = v_i$$

Proposición: $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

3. Se define:

$$^*\mathbb{R} \ := \ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim \qquad \text{(cociente de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ por la relación } \sim\text{)}$$

Transferencia del orden (1/2)

Deseamos transferir el orden usual de $\mathbb{R}$ al conjunto ${}^*\mathbb{R}$

- Para todas sucesiones $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}, v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se escribe:

$$u \leq v \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i_0 \in \mathbb{N})(\forall i \geq i_0)\ u_i \leq v_i$$

- Esta relación $\leq$ sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es compatible con la equivalencia $\sim$. Entonces, induce una relación binaria $\leq$ sobre ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\!\sim$:

$$[u] \leq [v] \quad \Leftrightarrow \quad (\exists i_0 \in \mathbb{N})(\forall i \geq i_0)\ u_i \leq v_i$$

Proposición: La relación $[u] \leq [v]$ es un orden parcial sobre ${}^*\mathbb{R}$

- **Problema:** El orden $[u] \leq [v]$ sobre ${}^*\mathbb{R}$ no es total:
  - $u_i = i \bmod 2$ para todo $i \in \mathbb{N}$ (sucesión alternando 0 y 1)
  - $v_i = 1/2$ para todo $i \in \mathbb{N}$ (sucesión constante igual a $1/2$)
  - Tenemos $[u] \not\leq [v]$ y $[v] \not\leq [u]$ ($[u]$, $[v]$ no comparables)

Transferencia del orden (2/2)

Sin embargo, ya tenemos los infinitamente grandes/pequeños deseados

- **Recordatorio:** Cada número real estándar $x \in \mathbb{R}$ es representado por el elemento $*x \in {}^*\mathbb{R}$ definido por: $*x = [\mathrm{cst}(x)]$

Proposición (Existencia de números infinitamente grandes)

Sea $\omega = [u]$, con $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definida por $u_i = i$ $(\forall i \in \mathbb{N})$.
Entonces $\omega \in {}^*\mathbb{R}$ es más grande que todos los reales estándar:

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \omega > *x$$

Proposición (Existencia de números infinitesimales)

Sea $\varepsilon = [v]$, con $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definida$^{(\dagger)}$ por $v_i = 1/i$ $(\forall i \geq 1)$.
Entonces $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ es más pequeño que todos los reales estándar > 0:

$$\varepsilon > *0 \ \wedge\ (\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geq 1 \ \Rightarrow\ \varepsilon < *(1/n))$$

(†) Se puede tomar v_0 cualquiera, no cambia nada a través del cociente

Transferencia de la estructura de cuerpo

Deseamos transferir la estructura de cuerpo de $\mathbb{R}$ al conjunto ${}^*\mathbb{R}$

- Se definen las operaciones $(+)$ y $(\times)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por:

$$\begin{aligned} (u_i)_{i\in\mathbb{N}} + (v_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (u_i + v_i)_{i\in\mathbb{N}} \\ (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \times (v_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (u_i \times v_i)_{i\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

- Las operaciones $(+), (\times) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ son compatibles con $\sim$. Entonces, inducen operaciones $(+), (\times) : {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ a través del cociente: $[u] + [v] = [u + v]$, $[u] \times [v] = [u \times v]$

Proposición (Estructura de anillo)

$({}^*\mathbb{R}, +, *0, \times, *1)$ es un anillo (conmutativo)... pero no es un cuerpo

- Contra-ejemplo: $u_i = i \bmod 2 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ (sucesión alternando 0 y 1)
  - Tenemos $u \not\sim \mathrm{cst}(0)$, luego: $[u] \neq *0$
  - No existe ningún $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $u \times v \sim \mathrm{cst}(1)$: $[u]$ no es invertible

Un fracaso parcial

- El ensayo de construcción es un fracaso:
  - Se pierde la propiedad de orden total
  - Se pierde la estructura de cuerpo
- Pero es un fracaso parcial:
  - Se mantiene la existencia de un orden
  - Se mantiene la estructura de anillo
  - Aparecen los números infinitamente grandes/pequeños deseados
- Razón del fracaso:
  - Existen sucesiones "vacilantes", por ej.: $u_i = i \bmod 2 \qquad (\forall i \in \mathbb{N})$
    - No es comparable con $*1/2$, no es ni nula ni invertible
  - La equivalencia $\sim$ no hace bastantes identificaciones: tenemos que elegir una equivalencia que hace más identificaciones
- Hilo conductor: resolver el caso de las sucesiones vacilantes

Plan

Observación

En el primer ensayo de construcción, identificamos las sucesiones que representaban el mismo número hiperreal utilizando la equivalencia:

$$\begin{aligned}(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists i_0 \in \mathbb{N})(\forall i \geq i_0)\ u_i = v_i \\ &\Leftrightarrow \quad \{i \in \mathbb{N} \ :\ u_i \neq v_i\} \ \text{ finito} \\ &\Leftrightarrow \quad \{i \in \mathbb{N} \ :\ u_i = v_i\}^c \ \text{ finito}\end{aligned}$$

Notación: $I^c = \mathbb{N} - I$ (complementario de I en $\mathbb{N}$)

Definición (Filtro de Fréchet)

1. Un subconjunto $I \subseteq \mathbb{N}$ es cofinito si I^c $(= \mathbb{N} - I)$ es finito
2. El conjunto $\mathcal{F}r\acute{e}chet = \{I \subseteq \mathbb{N} : I \text{ cofinito}\}$ formado por todos los subconjuntos $I \subseteq \mathbb{N}$ cofinitos se llama el filtro de Fréchet

La equivalencia del primer ensayo de construcción se reformula así:

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\{i \in \mathbb{N} : u_i = v_i\}}_{\text{índices de coincidencia}} \in \underbrace{\mathcal{F}r\acute{e}chet}_{\text{partes cofinitas de } \mathbb{N}}$$

Filtros

Definición (Filtro)

Un conjunto de partes $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ es un filtro si:

(F1) $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ (contiene la parte llena)

(F2) $I \in \mathcal{F} \;\wedge\; I \subseteq J \subseteq \mathbb{N} \;\Rightarrow\; J \in \mathcal{F}$ (cerrado por encima)

(F3) $I \in \mathcal{F} \;\wedge\; J \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; (I \cap J) \in \mathcal{F}$ (estable por intersección binaria)

(F4) $\varnothing \notin \mathcal{F}$ (parte vacía prohibida)

Ejemplo (Filtro de Fréchet)

El conjunto $\mathcal{F}r\acute{e}chet = \{I \subseteq \mathbb{N} : I \text{ cofinito}\} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ es un filtro

- **Observaciones:** Para todo filtro $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$:
  - $I \in \mathcal{F} \;\wedge\; J \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; I \cap J \neq \varnothing$
  - $I \in \mathcal{F} \;\wedge\; I \cap J = \varnothing \;\Rightarrow\; J \notin \mathcal{F}$ (caso particular: $J = I^c$)
  - Para todo $I \subseteq \mathbb{N}$: a lo sumo uno de I o I^c pertenece a $\mathcal{F}$

Equivalencia inducida por un filtro

Cada filtro $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ induce una relación binaria sobre las sucesiones:

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\{i \in \mathbb{N} : u_i = v_i\}}_{\text{índices de coincidencia}} \ \in \ \underbrace{\mathcal{F}}_{\text{filtro}}$$

Proposición (Equivalencia)

1. $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $A^{\mathbb{N}}$ (A conjunto cualquiera)
2. $\sim$ nunca identifica dos sucesiones constantes distintas:

$$x \neq y \ (\in A) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cst}(x) \not\sim_{\mathcal{F}} \mathrm{cst}(y)$$

Demostración: 1. La relación $\sim_{\mathcal{F}}$ es reflexiva por (F1), simétrica (trivial) y transitiva por (F3), (F2) 2. Si $x \neq y$, entonces $\{i : \mathrm{cst}_i(x) = \mathrm{cst}_i(y)\} = \varnothing \notin \mathcal{F}$ por (F4) $\square$

Observación: Más grande es $\mathcal{F}$, más identificaciones hace la relación $\sim_{\mathcal{F}}$. Entonces, necesitamos un filtro estrictamente más grande que *Fréchet*

Ultrafiltros

Definición (Ultrafiltro)

Un ultrafiltro es un filtro $\mathcal{U} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ tal que para todo $I \subseteq \mathbb{N}$:

$$I \in \mathcal{U} \quad \text{o bien} \quad I^c \in \mathcal{U} \qquad (\text{“o” exclusivo})$$

Intuición: Para todo $I \subseteq \mathbb{N}$, un ultrafiltro elige exactamente una de las dos partes I o I^c, de tal modo que las partes elegidas formen un filtro.

Dicho otramente: un ultrafiltro es un filtro maximal (no se puede agrandar)

Proposición (Caracterización)

Un conjunto $\mathcal{U} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ es un ultrafiltro si y sólo si para todos $I, J \subseteq \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lrcl}
(\mathrm{U}_\neg) & I^c \in \mathcal{U} & \Leftrightarrow & I \notin \mathcal{U} \\
(\mathrm{U}_\wedge) & (I \cap J) \in \mathcal{U} & \Leftrightarrow & I \in \mathcal{U} \ \wedge \ J \in \mathcal{U} \\
(\mathrm{U}_\vee) & (I \cup J) \in \mathcal{U} & \Leftrightarrow & I \in \mathcal{U} \ \vee \ J \in \mathcal{U}
\end{array}$$

Interés de la noción de ultrafiltro

Como todo filtro, un ultrafiltro $\mathcal{U} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ induce una relación de equivalencia sobre las sucesiones:

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\{i \in \mathbb{N} : u_i = v_i\}}_{\text{índices de coincidencia}} \in \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{ultrafiltro}}$$

- Sea $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión vacilante entre dos valores x_1 y x_2:
$$(\forall i \in \mathbb{N})\,(u_i = x_1 \vee u_i = x_2)$$
- Se escribe: $I_1 = \{i \in \mathbb{N} : u_i = x_1\}$, $I_2 = \{i \in \mathbb{N} : u_i = x_2\}$.
Como $I_1 \cup I_2 = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, tenemos por $(\mathrm{U}_\vee)$:
    - o bien $I_1 \in \mathcal{U}$, de tal modo que $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim \mathrm{cst}(x_1)$
    - o bien $I_2 \in \mathcal{U}$, de tal modo que $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim \mathrm{cst}(x_2)$

Más generalmente:

Proposición (Desaparición de las sucesiones vacilantes a través de $\sim$)

Si $u \in \{x_1, \ldots, x_n\}^{\mathbb{N}}$, entonces: $u \sim \mathrm{cst}(x_k)$ (para algún $k = 1, \ldots, n$)

Existencia de ultrafiltros

¿Existen los ultrafiltros?

Ultrafiltros triviales

Para todo índice $i_0 \in \mathbb{N}$ (fijado), el conjunto $\mathcal{U}_{i_0} = \{I \subseteq \mathbb{N} : i_0 \in I\}$ es un ultrafiltro. Tales ultrafiltros se llaman ultrafiltros triviales

Los ultrafiltros triviales son los solos ultrafiltros que se pueden construir explícitamente... pero no tienen ningún interés

Por suerte, el Axioma de la Elección (AE) permite demostrar lo siguiente:

Proposición (Existencia de ultrafiltros no triviales)

Para todo filtro $\mathcal{F}$, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$

Idea de la demostración (no constructiva): Por el lema de Zorn (AE), existe un filtro maximal $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$. Pero un filtro maximal $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

En lo siguiente, tomaremos un ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}réchet$

Plan

El ultrafiltro $\mathcal{U}$

En lo siguiente, se fija un ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}\textit{réchet}$ $\qquad (\subset \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$

- No se puede construir explícitamente un tal ultrafiltro
  (Existencia no constructiva, dada por el Axioma de la Elección)
- Lo que se sabe sobre un tal conjunto $\mathcal{U} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$:
  - Sólo contiene partes infinitas $I \subseteq \mathbb{N}$
  - Contiene todas las partes cofinitas $I \subseteq \mathbb{N}$
  - Es cerrado por encima: $I \in \mathcal{U},\ I \subseteq J \subseteq \mathbb{N} \ \Rightarrow\ J \in \mathcal{U}$
  - Es estable por intersección binaria: $I \in \mathcal{U},\ J \in \mathcal{U} \ \Rightarrow\ (I \cap J) \in \mathcal{U}$
  - Para todo $I \subseteq \mathbb{N}$, exactamente uno de I o I^c pertenece a $\mathcal{U}$
- Por ejemplo:
  - $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ par}\} \in \mathcal{U}$ o $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ impar}\} \in \mathcal{U}$ (exclusivo)
  - $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ primo}\} \in \mathcal{U}$ o $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ no primo}\} \in \mathcal{U}$ (exclusivo)
  - Si $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ primo}\} \in \mathcal{U}$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ par}\} \notin \mathcal{U}$

Hiper-extensión de un conjunto (1/2)

Dado un conjunto A cualquiera, se considera la relación de equivalencia sobre $A^{\mathbb{N}}$ definida por:

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\{i \in \mathbb{N} : u_i = v_i\}}_{\text{índices de coincidencia}} \in \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{ultrafiltro}}$$

Definición (Hiper-extensión de A)

La hiper-extensión de A es el conjunto ${}^*A$ definido por: ${}^*A := A^{\mathbb{N}}/\sim$

Si los elementos de A se llaman cosas, los elementos de ${}^*A$ se llamarán hiper-cosas

- Cada $x \in A$ es representado en ${}^*A$ por la clase $*x = [\mathrm{cst}(x)]$.
  La función $* : A \to {}^*A$ es inyectiva:
  - Los elementos de ${}^*A$ de la forma $*x$ son los elementos estándar
  - Los otros elementos de ${}^*A$ son los elementos no estándar
- En lo siguiente, se identifica $*x$ con x, considerando que $A \subseteq {}^*A$

Hiper-extensión de un conjunto (2/2)

Proposición

Si A es finito, entonces ${}^*A = A$ (ningún elemento no estándar)

Demostración. Ya vimos que $u \in \{x_1, \ldots, x_n\}^{\mathbb{N}} \;\Rightarrow\; (\exists k = 1, .., n)\; u \sim \mathrm{cst}(x_k)$ □

Proposición

Si A es infinito, entonces ${}^*A$ tiene elementos no estándar

Demostración. Si A es infinito, existe una sucesión $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ inyectiva. Para todo $x \in A$, tenemos $\#\{i \in \mathbb{N} : u_i = x\} \leq 1$, entonces $\{i \in \mathbb{N} : u_i = x\} \notin \mathcal{U}$. Luego $u \not\sim \mathrm{cst}(x)$, es decir: $[u] \neq *x$. □

Ejemplo: Sea ${}^*\mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\!\sim)$ el conjunto de los números hiperreales.
Este conjunto contiene elementos no estándar: ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R} \neq \varnothing$

Lo mismo para ${}^*\mathbb{N}$ (hipernaturales), ${}^*\mathbb{Z}$ (hiperenteros), ${}^*\mathbb{Q}$ (hiperracionales), ${}^*\mathbb{C}$ (hipercomplejos)

Transferencia del orden

- Para todas sucesiones $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}, v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se escribe:

$$[u] \leq [v] \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in \mathbb{N} : u_i \leq v_i\} \in \mathcal{U}$$

Obs: Esta definición sólo depende de las clases de u y de v (ejercicio)

Proposición (Orden total en ${}^*\mathbb{R}$)

La relación $[u] \leq [v]$ es un orden total sobre ${}^*\mathbb{R}$

Demostración. La relación $[u] \leq [v]$ es obviamente un orden. Para demostrar que es total, consideremos dos sucesiones $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}, v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Escribamos $I = \{i \in \mathbb{N} : u_i \leq v_i\}, \quad J = \{i \in \mathbb{N} : u_i \geq v_i\}$
- Como el orden $\leq_{\mathbb{R}}$ es total en $\mathbb{R}$, tenemos: $I \cup J = \mathbb{N} \ (\in \mathcal{U})$
- Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, tenemos por $(U_\vee)$:
  - o bien $I \in \mathcal{U}$, de tal modo que: $[u] \leq [v]$
  - o bien $J \in \mathcal{U}$, de tal modo que: $[v] \leq [u]$ $\square$

Transferencia de la estructura de cuerpo

- Para todas sucesiones $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}, v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se escribe:

$$\begin{aligned} [u] + [v] &= \big[(u_i + v_i)_{i\in\mathbb{N}}\big] \\ [u] \times [v] &= \big[(u_i \times v_i)_{i\in\mathbb{N}}\big] \end{aligned}$$

Obs: Esta definición sólo depende de las clases de u y de v (ejercicio)

Proposición (Estructura de cuerpo totalmente ordenado)

$({}^*\mathbb{R}, +, 0, \times, 1)$ es un cuerpo totalmente ordenado

Demostración. $({}^*\mathbb{R}, +, 0, \times, 1)$ es obviamente un anillo conmutativo. Para demostrar que es un cuerpo, consideremos $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $[u] \neq 0$.

- Como $u \not\sim \mathrm{cst}(0)$, tenemos que $I = \{i \in \mathbb{N} : u_i = 0\} \notin \mathcal{U}$
- Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, tenemos que $I^c = \{i \in \mathbb{N} : u_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$
- Escribamos $v_i = 1/u_i$ para todo $i \in I^c$ (v_i cualquiera para $i \in I$, no importa)
- Tenemos $\{i \in \mathbb{N} : u_i v_i = 1\} = I^c \in \mathcal{U}$, luego: $[u] \times [v] = [\mathrm{cst}(1)]$

(Compatibilidad de la estructura de cuerpo con el orden total: ejercicio) □

Otras propiedades de $^*\mathbb{R}$

Vimos que $^*\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado, que extiende $\mathbb{R}$

Teorema ($^*\mathbb{R}$ no es arquimediano)

$^*\mathbb{R}$ no es arquimediano: existe $\omega \in {}^*\mathbb{R}$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\omega > n)$

Demostración. Tomar $\omega = [u]$, con $u_i = i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ □

Observación: ω es un número hipernatural no estándar: $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.
Más generalmente, se puede demostrar que cada hipernatural no estándar $N \in ({}^*\mathbb{N} - \mathbb{N})$ es mayor que todos los naturales estándar: $(\forall n \in \mathbb{N})\,(N > n)$

Teorema ($^*\mathbb{R}$ no es completo)

$^*\mathbb{R}$ no es completo: existe un subconjunto $X \subseteq {}^*\mathbb{R}$ no vacío que tiene una cota superior, pero que no tiene ningún supremo

Demostración. Sea $X = \mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{R}$; una cota superior es $\omega \in {}^*\mathbb{R}$. Por el absurdo, supongamos que $\mathbb{N}$ tiene un supremo $x \in {}^*\mathbb{R}$. Como $x - 1 < x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x - 1 < n$. Entonces $x = (x-1) + 1 < n + 1 \in \mathbb{N}$: contradicción □

Transferencia de las funciones usuales

Vimos que las operaciones de cuerpo ($+$, $-$, $\times$, $/$) se extienden a ${}^*\mathbb{R}$, manteniendo la estructura de cuerpo totalmente ordenado

- Más generalmente, cada función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (función estándar) se extiende en una función ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, escribiendo:

$$ {}^*f([u]) \;=\; \big[(f(u_i))_{i\in\mathbb{N}}\big] \qquad (u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) $$

Obs: Esta definición sólo depende de la clase de u

- Así se definen las funciones ${}^*\exp, {}^*\cos, {}^*\mathrm{sen} : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, etc.

- Esta extensión mantiene todas las propiedades algebraicas usuales

$$
\begin{array}{rcc}
{}^*\exp x > 0 & {}^*\exp(-x) = 1/{}^*\exp x & {}^*\exp(x+y) = {}^*\exp x\, {}^*\exp y \\
|{}^*\cos x|, |{}^*\mathrm{sen}\, x| \leq 1 & {}^*\cos(-x) = {}^*\cos x & {}^*\cos(x+n\pi) = {}^*\cos x \\
{}^*\cos^2 x + {}^*\mathrm{sen}^2 x = 1 & {}^*\mathrm{sen}(-x) = -{}^*\mathrm{sen}\, x & {}^*\mathrm{sen}(x+n\pi) = {}^*\mathrm{sen}\, x
\end{array}
$$

para todos $x, y \in {}^*\mathbb{R}$, $n \in {}^*\mathbb{N}$ (etc.)

Plan

Estructura de ${}^*\mathbb{R}$ (1/2)

Recordatorio:

1. ${}^*\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado, que extiende $\mathbb{R}$.
   No es ni arquimediano, ni completo, pero contiene números infinitamente grandes ($\omega \in {}^*\mathbb{N}$) y infinitesimales ($\varepsilon = 1/\omega$)

2. Cada función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se extiende en una función ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ (hiper-función estándar). Las propiedades algebraicas de f son mantenidas a través de esta extensión

   En lo siguiente, se escribe f (: ${}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$) la función extendida antes de ${}^*f$

3. Cada sucesión $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ también se extiende en una hiper-sucesión ${}^*u : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ (hiper-sucesión estándar). Las propiedades algebraicas de u son mantenidas igualmente

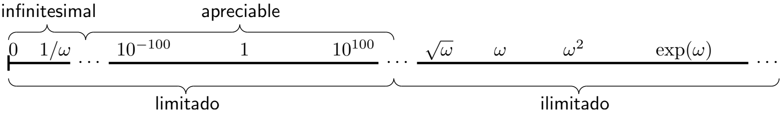
   En lo siguiente, se escribe u (: ${}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$) la sucesión extendida antes de ${}^*u$

Estructura de ${}^*\mathbb{R}$ (2/2)

Definición (Clasificación de los hiperreales)

Se dice que un número $x \in {}^*\mathbb{R}$ es:

- **limitado** si $(\exists n \in \mathbb{N})\ |x| \leq n$
- **ilimitado** si $(\forall n \in \mathbb{N})\ |x| > n$
- **infinitesimal** si $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)\ |x| < 1/n$
- **apreciable** si x es limitado y no infinitesimal



Observación:

- Todos los hiperreales ilimitados son no estándar
- Todos los hiperreales infinitesimales son no estándar, salvo 0
- Los hiperreales limitados y apreciables pueden ser estándar o no estándar

Parte estándar de un hiperreal limitado

Definición (Hiperreales infinitamente cercanos)

Dos hiperreales $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ son infinitamente cercanos (notación: $x \simeq y$) cuando su diferencia es infinitesimal:

$$x \simeq y \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)\ |x - y| < 1/n$$

Teorema (Parte estándar de un hiperreal limitado)

Todo hiperreal limitado $x \in {}^*\mathbb{R}$ es infinitamente cercano de un único número real estándar, llamado la parte estándar de x. Notación: $\mathrm{st}(x)$

$$\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathrm{st}(x) \simeq x$$

Propiedades:

- $\mathrm{st}(x + y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$ $\quad (x, y \in {}^*\mathbb{R}$ limitados$)$
- $\mathrm{st}(xy) = \mathrm{st}(x)\,\mathrm{st}(y)$ $\quad (x, y \in {}^*\mathbb{R}$ limitados$)$
- $\mathrm{st}(1/x) = 1/\,\mathrm{st}(x)$ $\quad (x \in {}^*\mathbb{R}$ apreciable$)$

Reformulación de los conceptos del análisis

Todos los conceptos del análisis se pueden reformular utilizando el languaje del análisis no estándar. Ejemplos:

Teorema (Reformulación de límites)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (estándar) y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (estándar)

- f es continua en un punto $x \in \mathbb{R}$ (estándar) si y sólo si:
$$(\forall \varepsilon \simeq 0)\ f(x+\varepsilon) \simeq f(x)$$
- f es continua sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si:
$$(\forall x, y \text{ limitados})(x \simeq y \ \Rightarrow\ f(x) \simeq f(y))$$
- f es uniformamente continua sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si:
$$(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R})(x \simeq y \ \Rightarrow\ f(x) \simeq f(y))$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $\ell \in \mathbb{R}$ (estándar) si y sólo si:
$$(\forall \omega \text{ ilimitado})\ u_\omega \simeq \ell$$

Derivabilidad

Teorema (Reformulación de la derivabilidad)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (estándar) es derivable en un punto $x \in \mathbb{R}$ (estándar) si y sólo si existe $\ell \in \mathbb{R}$ (estándar) tal que

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \simeq \ell \qquad (\forall \varepsilon \simeq 0,\ \varepsilon \neq 0)$$

En este caso, tenemos: $f'(x) = \ell$

Ejemplo: $f(x) = x^2$. Para todos $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \simeq 0$, $\varepsilon \neq 0$:

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon \simeq 2x$$

Entonces: $f'(x) = 2x$.

Plan

Generalidad de la construcción (1/3)

La noción de hiper-extensión es muy general:

- La hiper-extensión ${}^*A$ se puede definir para todo conjunto A:
  1. Los elementos de $A \ (\subseteq {}^*A)$ son los elementos estándar
  2. Los elementos de ${}^*A - A \ (\subseteq {}^*A)$ son los elementos no estándar

  Obs.: La extensión es trivial si y sólo si A es finito: ${}^*A = A$

- Cada función $f : A^k \to B$ (con k argumentos) se extiende en una función ${}^*f : ({}^*A)^k \to {}^*B$
- Cada relación $R \subseteq A^k$ (con k argumentos) se extiende en una relación ${}^*R \subseteq ({}^*A)^k$
- Además: las propiedades de las funciones y de las relaciones se mantienen a través de la extensión $f \mapsto {}^*f$, $R \mapsto {}^*R$

Generalidad de la construcción (2/3)

- Cada relación binaria $R \subseteq A \times A$ (sobre A) se extiende en una relación binaria ${}^*R \subseteq {}^*A \times {}^*A$ (sobre ${}^*A$)

Proposición (Extensión de las propiedades algebraicas)

Si la relación binaria $R \subseteq A \times A$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, un orden parcial, un orden total, un retículo, ...

... entonces lo mismo para la relación extendida ${}^*R \subseteq {}^*A \times {}^*A$

- Cada operación binaria $\diamond : A \times A \to A$ (sobre A) se extiende en una operación binaria ${}^*\diamond : {}^*A \times {}^*A \to {}^*A$ (sobre ${}^*A$)

Proposición (Extensión de las propiedades algebraicas)

Si la operación binaria $\diamond : A \times A \to A$ es asociativa, conmutativa, distributiva, tiene un elemento neutro, tiene opuestos/inversos...

... entonces lo mismo para la operación extendida ${}^*\diamond : {}^*A \times {}^*A \to {}^*A$

Generalidad de la construcción (3/3)

En particular:

Teorema (Transferencia de las estructuras)

1. Si A es un grupo (resp. un grupo conmutativo, un anillo, un anillo conmutativo, un cuerpo, un cuerpo totalmente ordenado), entonces ${}^*A$ es un grupo (resp. un grupo conmutativo, un anillo, un anillo conmutativo, un cuerpo, un cuerpo totalmente ordenado)
2. Si V es un espacio vectorial (resp. una álgebra) sobre K, entonces ${}^*V$ es un espacio vectorial (resp. una álgebra) sobre ${}^*K$ (etc.)

¡Cuidado! Algunas propiedades no se transfieren:

- la propiedad de Arquímedes (${}^*\mathbb{R}$ no es arquimediano)
- la propiedad de completitud (${}^*\mathbb{R}$ no es completo)

Pregunta: *¿De donde viene lo que (casi) todas las propiedades de A se transfieren a su hiper-extensión ${}^*A$?*

Formalizar el lenguaje matemático

Deseamos demostrar un resultado de la siguiente forma:

Para todo conjunto M (dado con operaciones $\diamond\ldots$ y relaciones $R\ldots$)
Para toda "propiedad" ϕ (sólo utilizando los símbolos $\diamond\ldots$ $R\ldots$)

Si ϕ se cumple para $(M, \diamond, \ldots, R, \ldots)$,
entonces ϕ se cumple para $({}^*M, {}^*\diamond, \ldots, {}^*R, \ldots)$

Deseamos demostrar una propiedad sobre las propiedades
$\Rightarrow$ considerar las fórmulas matemáticas como objetos matemáticos

Observación

Las expresiones matemáticas son hechas a partir de varios símbolos:

- Variables (x, y, z, ...)
- Símbolos de constante (0, 1, π, ...) y de función ($+$, $\times$, $\exp$, ...)
- Símbolos de relación ($=$, $\leq$, $\geq$, $<$, $>$, ...)
- Conectivas ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, ...) y cuantificadores ($\forall$, $\exists$)

Lenguajes del primer orden

Definición (Lenguaje del primer orden)

Un lenguaje del primer orden es definido por:

- Un conjunto de símbolos de constante (notación: c, d, ...)
- Un conjunto de símbolos de función (notación: f, g, ...)
- Un conjunto de símbolos de relación (notación: R, S, ...)

cada símbolo de función o de relación siendo dado con su aridad $k \geq 1$

$=$ cantidad de argumentos a la cual el símbolo tiene que ser aplicado

Cada lenguaje del primer orden define dos tipos de expresiones:

- Los términos, que representan objetos de la estructura considerada
- Las fórmulas, que representan propiedades de estos objetos

Estas expresiones son construidas a partir de:

- Los símbolos específicos del lenguaje (constantes, funciones, relaciones)
- Símbolos no específicos (variables, conectivas, cuantificadores, paréntesis)

Gramáticas de los términos y de las fórmulas

Dado un lenguaje del primer orden $\mathcal{L}$:

Definición (Términos de $\mathcal{L}$)

Los términos de $\mathcal{L}$ (notación: t, u, ...) son generados por la gramática:

$$
\begin{array}{rcll}
t, u & ::= & x & (x \text{ símbolo de variable}) \\
 & | & c & (c \in \mathcal{L} \text{ símbolo de constante}) \\
 & | & f(t_1, \ldots, t_k) & (f \in \mathcal{L} \text{ símbolo de función de aridad } k)
\end{array}
$$

Definición (Fórmulas de $\mathcal{L}$)

Las fórmulas de $\mathcal{L}$ (notación: ϕ, ψ, ...) son generadas por la gramática:

$$
\begin{array}{rcll}
\phi, \psi & ::= & t_1 = t_2 & \\
 & | & R(t_1, \ldots, t_k) & (R \in \mathcal{L} \text{ símbolo de relación de aridad } k) \\
 & | & \neg\phi \quad | \quad \phi \Rightarrow \psi & \\
 & | & \phi \wedge \psi \quad | \quad \phi \vee \psi & \\
 & | & \forall x\, \phi \quad | \quad \exists x\, \phi & (x \text{ símbolo de variable})
\end{array}
$$

Ejemplo: lenguaje de los anillos ordenados

El lenguaje de los anillos ordenados es definido por:

- Dos símbolos de constante 0, 1
- Dos símbolos de función $+$, $\times$ de aridad 2 (notación infija)
- Un símbolo de relación $\leq$ de aridad 2 (notación infija)

Algunos términos:

$$0, \quad x, \quad 1+z, \quad ((1+1)+1)\times(x\times x) \qquad (\equiv 3x^2)$$

$$(x+y)\times z, \quad (((((1+1)+1)+1)+1)+1)+1 \qquad (\equiv 7)$$

Algunas fórmulas

$$x = x, \quad 1 \leq 0, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq x \wedge \neg(x=0)$$

$$\exists x\, \neg(x=x), \quad \forall x\, \forall y\, (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y),$$

$$\exists y\, \big(x = (1+1)\times y \ \vee\ x = ((1+1)\times y)+1\big)$$

Observación:

- Los términos pueden contener variables libres
- Las fórmulas pueden contener variables libres o ligadas

Teorías del primer orden

Definición (Teoría del primer orden)

Una teoría del primer orden $\mathcal{T}$ es un lenguaje del primer orden $\mathcal{L}$ dado con una lista de fórmulas cerradas: los axiomas de $\mathcal{T}$

Ejemplo: La teoría de los cuerpos totalmente ordenados es definida por:

- El lenguaje de los anillos ordenados (cf diapositiva anterior)
- La siguiente lista de 16 axiomas:

$$
\begin{array}{ll}
\forall x\,\forall y\,(x+y=y+x) & \forall x\,\forall y\,(x\times y=y\times x)\\
\forall x\,\forall y\,\forall z\,((x+y)+z=x+(y+z)) & \forall x\,\forall y\,\forall z\,((x\times y)\times z=x\times(y\times z))\\
\forall x\,(x+0=x) & \forall x\,(x\times 1=x)\\
\forall x\,\exists y\,(x+y=0) & \forall x\,(x=0\vee\exists y\,(x\times y=1))\\
\neg(0=1) & \forall x\,\forall y\,\forall z\,((x+y)\times z=x\times z+y\times z)\\
\\
\forall x\,(x\leq x) & \forall x\,\forall y\,(x\leq y\vee y\leq x)\\
\forall x\,\forall y\,(x\leq y\wedge y\leq x\Rightarrow x=y) & \forall x\,\forall y\,\forall z\,(x\leq y\Rightarrow x+z\leq y+z)\\
\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x\leq y\wedge y\leq z\Rightarrow x\leq z) & \forall x\,\forall y\,\forall z\,(x\leq y\wedge 0\leq z\Rightarrow x\times z\leq y\times z)
\end{array}
$$

Interpretación de un lenguaje del primer orden (1/2)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje del primer orden

Definición (Interpretación de un lenguaje)

Una interpretación $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ es definida por:

- un conjunto de base $M \neq \varnothing$ (no vacío)
- un elemento $[\![c]\!]_{\mathcal{M}} \in M$ para cada símbolo de constante c
- una función $[\![f]\!]_{\mathcal{M}} : M^k \to M$ para cada símbolo de función f (aridad k)
- una relación $[\![R]\!]_{\mathcal{M}} \subseteq M^k$ para cada símbolo de relación R (aridad k)

Dada una interpretación $\mathcal{M}$ del lenguaje $\mathcal{L}$, se pueden interpretar:

- cada término $t(x_1, \ldots, x_n)$ (con parámetros $a_i \in M$) en un elemento

$$[\![t(a_1, \ldots, a_n)]\!]_{\mathcal{M}} \qquad (\in M)$$

- cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ (con parámetros $a_i \in M$) en una proposición

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \qquad \text{(verdadera o falsa)}$$

Definición: por inducción sobre la estructura de t / de ϕ

Interpretación de un lenguaje del primer orden (2/2)

Interés: La misma fórmula ϕ se puede interpretar de varios modos, cambiando el conjunto de base M o las operaciones y relaciones que interpretan los símbolos del lenguaje $\mathcal{L}$

Ejemplo 1: Sea $\phi \equiv \exists x\,(x \times x = 1 + 1)$

- Tenemos: $\mathbb{N} \not\models \phi$, $\mathbb{Z} \not\models \phi$, $\mathbb{Q} \not\models \phi$, $\mathbb{R} \models \phi$
- Pero, tenemos: $\mathbb{N} \models \phi$ si:
  - se interpretan ambos símbolos $+$, $\times$ por la adición en $\mathbb{N}$
  - se interpretan ambos símbolos $+$, $\times$ por la multiplicación en $\mathbb{N}$
  - se interpreta el símbolo 1 por $18 \in \mathbb{N}$ (interpretación usual para $+$, $\times$)

Ejemplo 2: Sea $\psi \equiv \forall x \forall y\,(x < y \Rightarrow \exists z\,(x < z \wedge z < y))$

- Tenemos: $\mathbb{N} \not\models \psi$, $\mathbb{Z} \not\models \psi$, $\mathbb{Q} \models \psi$, $\mathbb{R} \models \psi$
- Pero: $\mathbb{N} \models \psi$ si:
  - se interpreta el símbolo $<$ por el orden amplio en $\mathbb{N}$
  - se interpreta el símbolo $<$ por la igualdad en $\mathbb{N}$

Modelos

Definición (Modelo de una teoría $\mathcal{T}$ del primer orden)

Un modelo de una teoría $\mathcal{T}$ es una interpretación $\mathcal{M}$ del lenguaje de $\mathcal{T}$ que satisface todos los axiomas de $\mathcal{T}$. Notación: $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$

- **Ejemplo:** Un modelo de la teoría $\mathcal{T}$ definida por los axiomas

$$\begin{aligned}&\forall x\,(x \leq x)\\ &\forall x\,\forall y\,(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y) \qquad\qquad (\text{sobre } \mathcal{L} = \{\leq\})\\ &\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)\}\end{aligned}$$

  es un conjunto $M \neq \varnothing$ con una relación binaria $R \subseteq M \times M$ a la vez reflexiva, antisimétrica y transitiva $\Rightarrow$ conjunto ordenado

Más generalmente:

- Los modelos de la teoría de grupos... son los grupos
- Los modelos de la teoría de cuerpos... son los cuerpos

La mayoría de las estructuras matemáticas (pero no todas) se pueden caracterizar como los modelos de una teoría del primer orden dada

El teorema de transferencia

Teorema (Transferencia semántica)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje del primer orden.

1. Toda interpretación $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ sobre un conjunto M se extiende en una interpretación ${}^*\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ sobre el conjunto ${}^*M$ (hiper-extensión)
   - Cada símbolo de función f interpretado por $f_{\mathcal{M}} : M^k \to M$ (en $\mathcal{M}$) será interpretado por la función ${}^*f_{\mathcal{M}} : ({}^*M)^k \to {}^*M$ (en ${}^*\mathcal{M}$)
   - Cada símbolo de relación R interpretado por $R_{\mathcal{M}} \subseteq M^k$ (en $\mathcal{M}$) será interpretado por la relación ${}^*R_{\mathcal{M}} \subseteq ({}^*M)^k$ (en ${}^*\mathcal{M}$)
2. Además, para toda teoría $\mathcal{T}$ del primer orden (sobre $\mathcal{L}$):

$$\text{Si} \quad \mathcal{M} \models \mathcal{T}, \quad \text{entonces:} \quad {}^*\mathcal{M} \models \mathcal{T}$$

Demostración: Uso intensivo de las propiedades del ultrafiltro: $(U_\neg)$, $(U_\wedge)$, $(U_\vee)$

Observación: Algunas propiedades no se pueden expresar al primer orden (por ej.: completitud de $\mathbb{R}$). Es la razón por la cual no se pueden transferir

Plan

Conclusión (1/2)

El método de la **hiper-extensión** (o **ultrapotencia**): un método muy general para añadir elementos no estándar a los conjuntos infinitos

- Añade automáticamente números infinitamente grandes a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y números infinitesimales a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- Permite demostrar resultados de análisis utilizando infinitesimales (Justificación a posteriori de las intuiciones de Leibniz)
- Basado sobre los ultrafiltros (y sus propiedades mágicas)

Más generalmente:

- Se aplica a cualquier conjunto + es functorial:
  - cada operación / relación definida sobre los objetos estándar se extiende automáticamente a todos los elementos no estándar
  - todas las propiedades del primer orden se mantienen
- **Punto de vista de la lógica:** un método para extender cualquier modelo de una teoría del primer orden en un modelo más grande

Conclusión (2/2)

Observación de Nelson:

- La teoría de conjuntos **ZFC** es una teoría de primer orden
- Si es consistente, tiene un modelo (Teorema de completitud de Gödel)
- Entonces, se puede aplicar el método a un modelo de **ZFC**

Así se obtiene un modelo de una nueva teoría de conjuntos
IST = Internal Set Theory (extensión conservativa de **ZFC**)

- Supone que todos los conjuntos infinitos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc.) ya contienen elementos no estándar (desconocidos en ZFC)
- Introduce símbolos + axiomas para describirlos. Ejemplo:

Principio de transferencia

Si una propiedad ϕ estándar (= de ZFC) se cumple para todos los objetos estándar del universo, entonces se cumple para todos los objetos del universo

- Si **IST** $\vdash \phi$ (ϕ estándar), entonces **ZFC** $\vdash \phi$ (Conservatividad)