

## Práctico 2: Elementos de reescritura

**Observación:** La terminología y las notaciones de este práctico vienen de:  
F. Baader, T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press, 1998.

Se llama *sistema de reducción abstracto* (ARS) a todo par  $(A, \rightarrow)$  formado por un conjunto  $A$  equipado con una relación binaria  $(\rightarrow) \subseteq A \times A$ . Dado un sistema de reducción abstracto  $(A, \rightarrow)$ , se definen las siguientes relaciones sobre el conjunto  $A$ :

$\overset{0}{\rightarrow}$	$:= \{(x, x) : x \in A\}$	<b>identidad</b>
$\overset{i+1}{\rightarrow}$	$:= \overset{i}{\rightarrow} \circ \rightarrow$	<b>reducción en <math>i + 1</math> pasos</b>
$\overset{+}{\rightarrow}$	$:= \bigcup_{i>0} \overset{i}{\rightarrow}$	<b>clausura transitiva</b>
$\overset{*}{\rightarrow}$	$:= \overset{+}{\rightarrow} \cup \overset{0}{\rightarrow}$	<b>clausura reflexiva-transitiva</b>
$\overset{=}{\rightarrow}$	$:= \rightarrow \cup \overset{0}{\rightarrow}$	<b>clausura reflexiva</b>
$\leftarrow$	$:= (\rightarrow)^{-1}$	<b>relación inversa</b>
$\leftrightarrow$	$:= \rightarrow \cup \leftarrow$	<b>clausura simétrica</b>
$\overset{+}{\leftrightarrow}$	$:= (\leftrightarrow)^+$	<b>clausura simétrica-transitiva</b>
$\overset{*}{\leftrightarrow}$	$:= (\leftrightarrow)^*$	<b>clausura reflexiva-simétrica-transitiva</b>

Dado un elemento  $x \in A$ , se dice que:

- $x$  es *reducible* cuando existe  $y \in A$  tal que  $x \rightarrow y$ ;
- $x$  es *en forma normal* (notación:  $x \nrightarrow$ ) cuando  $x$  no es reducible;
- $y$  es *una forma normal de  $x$*  cuando  $x \overset{*}{\rightarrow} y \nrightarrow$ .  
Cuando la forma normal de  $x$  existe y es única, se escribe  $\Downarrow x$ ;
- $y$  es un *sucesor directo* de  $x$  cuando  $x \rightarrow y$ ;
- $y$  es un *sucesor* de  $x$  cuando  $x \overset{+}{\rightarrow} y$ .

Además, se dice que la relación de reducción  $\rightarrow$  es:

- *normalizante* cuando todo elemento  $y \in x$  tiene (al menos) una forma normal;
- *fuertemente normalizante* cuando no existe ninguna sucesión infinita de reducciones  $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$ , o de modo equivalente, cuando la relación  $\leftarrow$  está bien fundada;
- *localmente confluyente* cuando para todos  $x, y_1, y_2 \in A$ :  
las condiciones  $x \rightarrow y_1$  y  $x \rightarrow y_2$  implican que  $y_1 \overset{*}{\rightarrow} z$  e  $y_2 \overset{*}{\rightarrow} z$  para algún  $z \in A$ .
- *semi confluyente* cuando para todos  $x, y_1, y_2 \in A$ :  
las condiciones  $x \rightarrow y_1$  y  $x \overset{*}{\rightarrow} y_2$  implican que  $y_1 \overset{*}{\rightarrow} z$  e  $y_2 \overset{*}{\rightarrow} z$  para algún  $z \in A$ .
- *confluyente* cuando para todos  $x, y_1, y_2 \in A$ :  
las condiciones  $x \overset{*}{\rightarrow} y_1$  y  $x \overset{*}{\rightarrow} y_2$  implican que  $y_1 \overset{*}{\rightarrow} z$  e  $y_2 \overset{*}{\rightarrow} z$  para algún  $z \in A$ .
- *Church-Rosser* cuando para todos  $x_1, x_2 \in A$ :  
la condición  $x_1 \overset{*}{\leftrightarrow} x_2$  implica que  $x_1 \overset{*}{\rightarrow} y$  e  $x_2 \overset{*}{\rightarrow} y$  para algún  $y \in A$ .
- *convergente* cuando  $\rightarrow$  es confluyente y fuertemente normalizante.

En los ejercicios que siguen, se trabaja con un sistema de reducción abstracto  $(A, \rightarrow)$ .

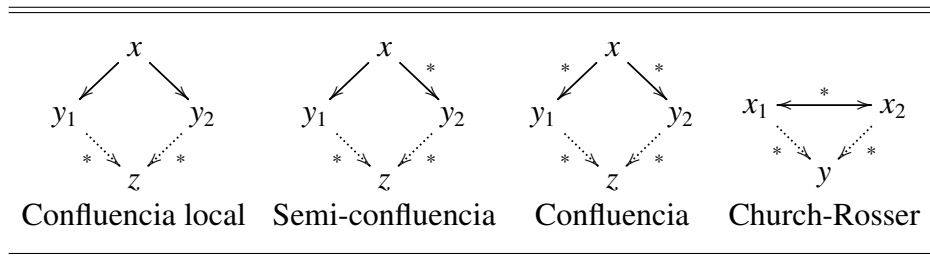


Figura 1: Nociones de confluencia

**Ejercicio 1** (Confluencia, semi-confluencia y Church-Rosser).

- (1) Demostrar que las siguientes tres propiedades son equivalentes:
  - (a)  $\rightarrow$  es semi-confluente;
  - (b)  $\rightarrow$  es confluente;
  - (c)  $\rightarrow$  es Church-Rosser.
- (2) Demostrar que si  $\rightarrow$  es confluente, entonces la forma normal de cualquier elemento  $x \in A$ , cuando existe, es única.
- (3) Demostrar que si todo  $x \in A$  tiene forma normal única, entonces  $\rightarrow$  es confluente.

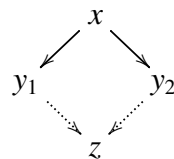
**Ejercicio 2** (Confluencia local y lema de Newman).

- (1) Hallar un ARS  $(A, \rightarrow)$  localmente confluente pero no confluente.
  - (a) Dar un ejemplo donde  $A$  es finito (obs.: la relación  $\rightarrow$  puede tener ciclos).
  - (b) Dar otro ejemplo donde la relación  $\rightarrow$  no tiene ciclos (obs.:  $A$  puede ser infinito).
- (2) Demostrar el lema de Newman:

**Lema (Newman).** *Toda relación  $\rightarrow$  fuertemente normalizante y localmente confluente es confluente (y por lo tanto es convergente).*

*Sugerencia:* Razonar por inducción bien fundada sobre la relación  $y \leftarrow x$ .

**Ejercicio 3** (Diamante y confluencia fuerte). Se dice que la relación  $\rightarrow$  cumple la propiedad del *diamante* cuando para todos  $x, y_1, y_2 \in A$ , las condiciones  $x \rightarrow y_1$  y  $x \rightarrow y_2$  implican que  $y_1 \rightarrow z$  e  $y_2 \rightarrow z$  para algún  $z \in A$ :



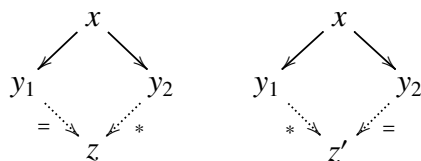
Se nota que la relación  $\rightarrow$  es confluente si y sólo si su clausura reflexiva-transitiva  $\xrightarrow{*}$  cumple la propiedad del diamante.

- (1) Demostrar que si  $\rightarrow$  cumple la propiedad del diamante, entonces es confluente.

En la práctica, es poco frecuente que la relación  $\rightarrow$  cumpla la propiedad del diamante, pero es mucho más frecuente que su clausura reflexiva  $\xrightarrow{=}$  cumpla dicha propiedad.

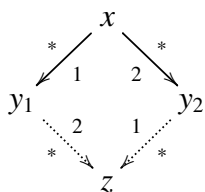
- (2) Deducir que si  $\xrightarrow{=}$  cumple la propiedad del diamante, entonces  $\rightarrow$  es confluente.

Más generalmente, se dice que la relación  $\rightarrow$  es *fuertemente confluente* cuando para todos  $x, y_1, y_2 \in A$ , las condiciones  $x \rightarrow y_1$  y  $x \rightarrow y_2$  implican que  $y_1 \xrightarrow{=} z$  e  $y_2 \xrightarrow{*} z$  para algún  $z \in A$ . Se observa que por simetría (con respecto a  $y_1$  e  $y_2$ ), las mismas condiciones también implican que  $y_1 \xrightarrow{*} z'$  e  $y_2 \xrightarrow{=} z'$  para algún  $z' \in A$ .



(3) Demostrar que si  $\rightarrow$  es fuertemente confluente, entonces es confluente.

**Relaciones conmutantes** Dadas relaciones  $\rightarrow_1$  y  $\rightarrow_2$  sobre un mismo conjunto  $A$ , se dice que  $\rightarrow_1$  y  $\rightarrow_2$  *conmutan* cuando para todos  $x, y_1, y_2 \in A$ , las condiciones  $x \xrightarrow{*}_1 y_1$  y  $x \xrightarrow{*}_2 y_2$  implican que  $y_1 \xrightarrow{*}_2 z$  e  $y_2 \xrightarrow{*}_1 z$  para algún  $z \in A$ :



Se nota que una relación  $\rightarrow$  es confluente si y sólo si conmuta consigo misma.

**Ejercicio 4** (Unión de relaciones confluente).

- (1) Hallar un ejemplo de dos relaciones confluente  $\rightarrow_1$  y  $\rightarrow_2$  sobre un mismo conjunto  $A$  cuya unión  $\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$  no es confluente.
- (2) Demostrar que si dos relaciones confluente  $\rightarrow_1$  y  $\rightarrow_2$  sobre un mismo conjunto  $A$  conmutan, entonces su unión  $\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$  también es confluente.
- (3) Definir una noción de conmutación fuerte análoga a la noción de confluencia fuerte del Ejercicio 3, y demostrar que dos relaciones fuertemente conmutantes conmutan.

**Términos de la Aritmética computacional** En esta parte, se considera el conjunto  $T$  de los términos de la Aritmética computacional definido por la gramática:

**Términos**  $t, u \in T ::= x \mid 0 \mid s(t) \mid \text{pred}(t) \mid t + u \mid t \times u$

Se equipa el conjunto  $T$  con la relación binaria  $t \rightarrow t'$  definida inductivamente por las 12 reglas:

$$\begin{array}{l}
 \frac{}{\text{pred}(0) \rightarrow 0} \text{(PredZero)} \qquad \frac{}{\text{pred}(s(t)) \rightarrow t} \text{(PredSucc)} \\
 \frac{}{t + 0 \rightarrow t} \text{(AddZero)} \qquad \frac{}{t + s(u) \rightarrow s(t + u)} \text{(AddSucc)} \\
 \frac{}{t \times 0 \rightarrow 0} \text{(MulZero)} \qquad \frac{}{t \times s(u) \rightarrow (t \times u) + t} \text{(MulSucc)} \\
 \frac{t \rightarrow t'}{s(t) \rightarrow s(t')} \text{(SuccCtx)} \qquad \frac{t \rightarrow t'}{\text{pred}(t) \rightarrow \text{pred}(t')} \text{(PredCtx)} \\
 \frac{t_1 \rightarrow t'_1}{t_1 + t_2 \rightarrow t'_1 + t_2} \text{(AddCtx}_1\text{)} \qquad \frac{t_2 \rightarrow t'_2}{t_1 + t_2 \rightarrow t_1 + t'_2} \text{(AddCtx}_2\text{)} \\
 \frac{t_1 \rightarrow t'_1}{t_1 \times t_2 \rightarrow t'_1 \times t_2} \text{(MulCtx}_1\text{)} \qquad \frac{t_2 \rightarrow t'_2}{t_1 \times t_2 \rightarrow t_1 \times t'_2} \text{(MulCtx}_2\text{)}
 \end{array}$$

**Ejercicio 5** (Propiedades de la relación  $\rightarrow$ ). Se demostrará cada ítem, razonando por inducción sobre la derivación de  $t \rightarrow t'$ , y detallando cada uno de los correspondientes 12 casos.

- (1) Demostrar que si  $t \rightarrow t'$ , entonces  $FV(t') \subseteq FV(t)$ .
- (2) Demostrar que si  $t \rightarrow t'$ , entonces  $t[x := u] \rightarrow t'[x := u]$  (para todos  $x, u$ ).

A cada término  $t$  se asocia un peso  $w(t) \in \mathbb{N}^*$  definido por:

$$\begin{array}{ll} w(x) = 1 & w(0) = 1 \\ w(s(t)) = w(t) + 1 & w(\text{pred}(t)) = w(t) + 1 \\ w(t + u) = w(t) + 2w(u) & w(t \times u) = 3w(t)w(u) \end{array}$$

- (3) Demostrar que si  $t \rightarrow t'$ , entonces  $w(t) > w(t')$ .  
Deducir que la relación  $\rightarrow$  es fuertemente normalizante.

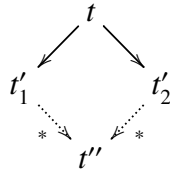
**Ejercicio 6** (Estructura de las formas normales). Se consideran las dos formas de términos **neut** (“neutros”) y **norm** (“normales”) definidas por las gramáticas:

$$\begin{array}{l} \mathbf{neut} ::= x \mid \text{pred}(\mathbf{neut}) \mid \mathbf{norm} + \mathbf{neut} \mid \mathbf{norm} \times \mathbf{neut} \\ \mathbf{norm} ::= \mathbf{neut} \mid 0 \mid s(\mathbf{norm}) \end{array}$$

- (1) Demostrar que un término  $t$  es en forma normal si y sólo si está en la categoría **norm**.  
Se detallarán las inducciones usadas.
- (2) Deducir que los términos cerrados en forma normal son los enteros de Peano.

**Ejercicio 7** (Confluencia de la relación  $\rightarrow$ ).

- (1) Demostrar que la relación  $\rightarrow$  es localmente confluyente:



*Sugerencia:* Razonar por inducción sobre las derivaciones de  $t \rightarrow t'_1$  y  $t \rightarrow t'_2$ , tratando cada uno de los  $12^2 = 144$  pares de reglas. ¡Cuidado! Hay muchos casos imposibles.

- (2) Deducir de lo anterior que la relación  $\rightarrow$  es convergente.