Introducción a la correspondencia entre pruebas y programas:

El cálculo lambda simplemente tipado

Alexandre Miquel

abril de 2021

Introducción

El cálculo lambda: un formalismo simplísimo pero muy expresivo: todas las funciones computables (recursivas) son representables

Sin embargo: muchas paradojas...

- Funciones sin dominio ni codominio: auto-aplicación posible: $MM, \quad \Delta \;:\equiv\; \lambda x\,.\,x\,x, \quad \Delta\,\Delta \to_\beta \Delta\,\Delta$
- Todas las funciones tienen un punto fijo: $\mathbf{Y}\,M \;\cong_\beta\; M\,(\mathbf{Y}\,M)$ con $\mathbf{Y} \;:\equiv\; \lambda f\,.\,(\lambda x\,.\,f\,(x\,x))\,(\lambda x\,.\,f\,(x\,x))$
- Inconsistencia lógica: $\phi \;\cong\; \neg\phi$, con $\phi \;:\equiv\; \mathbf{Y}\,\neg$
  (sea lo que sea la definición de $\neg$)

Idea sencilla para evitar las paradojas: Restringir el dominio de la abstracción, usando tipos: $\lambda x : A\,.\,M$

$\Rightarrow$ Cálculo lambda simplemente tipado

Plan

Plan

Sintaxis

Definición (Tipos)

Tipos $\qquad A, B \quad ::= \quad \alpha \quad | \quad A \to B$

- α es el tipo de base (podemos introducir múltiples: α, β, γ, etc.)
- $A \to B$ es el tipo flecha: tipo de las funciones de A a B

Definición (Términos)

Términos $\qquad M, N \quad ::= \quad x \quad | \quad \lambda x : A \,.\, M \quad | \quad M\,N$

- Abstracción tipada: $\lambda x : A \,.\, M$ (o $\lambda x^A \,.\, M$)
- Como siempre, se trabaja a menos de α-equivalencia
- **Notaciones:** $FV(M)$, $M[x := N]$ (sustitución)

Lema de sustitución

$$M[x := N][y := P] \;\equiv\; M[y := P][x := N[y := P]] \qquad (\text{si } x \not\equiv y,\ x \notin FV(P))$$

Reducción

- Relación $\succ$ de reducción definida por:

$$(\beta) \qquad (\lambda x : A \,.\, M)\, N \;\succ\; M[x := N]$$

$+$ clausura contextual

- Relación $\succ^*$ de reducción en múltiples pasos

$=$ clausura reflexiva-transitiva de $\succ$

- Relación $\cong$ de conversión

$=$ clausura reflexiva-simétrica-transitiva de $\succ$

- Confluencia + Church-Rosser:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
M'_1 \arrow[dr, dotted, "*"'] & & M'_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
& M'' &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"'] & & M_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
& M' &
\end{tikzcd}$$

$+$ unicidad de las formas normales (cuando existen)

Sistema de tipado

Definición (Contextos de tipado)

Contextos $\qquad \Gamma, \Delta \quad ::= \quad x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \qquad (x_i \not\equiv x_j \text{ si } i \neq j)$

= lista finita de declaraciones de la forma $(x : A)$

+ una misma variable no puede ser declarada dos veces

Definición (Relación de tipado $\Gamma \vdash M : A$)

Se define inductivamente la relación de tipado

$$\Gamma \vdash M : A$$

(«En el contexto Γ, el término M tiene tipo A»)

por las 3 reglas:

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : A} \text{ si } (x{:}A)\in\Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A \,.\, M : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

Ejemplos

$$\dfrac{\overline{x : A \vdash x : A}}{\vdash \lambda x{:}A\,.\,x : A \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{x : A,\ y : B \vdash x : A}}{x : A \vdash \lambda y{:}B\,.\,x : B \to A}}{\vdash \lambda x{:}A\,.\,\lambda y{:}B\,.\,x : A \to B \to A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{y : A \to A \vdash y : A \to A}}{\vdash \lambda y{:}A \to A\,.\,y : (A \to A) \to (A \to A)} \qquad \dfrac{\overline{x : A \vdash x : A}}{\vdash \lambda x{:}A\,.\,x : A \to A}}{\vdash (\lambda y{:}A \to A\,.\,y)\,(\lambda x{:}A\,.\,x) : A \to A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{g : B \to C,\ f : A \to B,\ x : A \vdash g : B \to C} \qquad \dfrac{\overline{g : B \to C,\ f : A \to B,\ x : A \vdash f : A \to B} \qquad \overline{g : B \to C,\ f : A \to B,\ x : A \vdash x : A}}{g : B \to C,\ f : A \to B,\ x : A \vdash f\,x : B}}{g : B \to C,\ f : A \to B,\ x : A \vdash g\,(f\,x) : C}}{g : B \to C,\ f : A \to B \vdash \lambda x{:}A\,.\,g\,(f\,x) : A \to C}}{\dfrac{g : B \to C \vdash \lambda f^{A \to B}\,.\,\lambda x^{A}\,.\,g\,(f\,x) : (A \to B) \to A \to C}{\vdash \lambda g^{B \to C}\,.\,\lambda f^{A \to B}\,.\,\lambda x^{A}\,.\,g\,(f\,x) : (B \to C) \to (A \to B) \to A \to C}}$$

Sistema dirigido por la sintaxis:

- Una regla para cada construcción (variable, abstracción, aplicación)
- El árbol de derivación es isomorfo al término tipado

Propiedades básicas (1/4)

Dado $\Gamma \equiv x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$, se escribe $\mathrm{dom}(\Gamma) := \{x_1, \ldots, x_n\}$

Lema (Declaración de las variables libres)

Si $\Gamma \vdash M : A$, entonces $FV(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$

Demostración. Por inducción sobre la derivación de $\Gamma \vdash M : A$. □

Dados contextos Γ, Γ', se escribe $\Gamma \subseteq \Gamma'$ cuando
$(x : A) \in \Gamma$ implica $(x : A) \in \Gamma'$ para toda declaración $(x : A)$

Lema (Debilitamiento)

La siguiente regla es admisible: $$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma' \vdash M : A}\ \text{si } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Demostración. Por inducción sobre la derivación de $\Gamma \vdash M : A$. □

Propiedades básicas (2/4)

Lema (Sustitutividad)

La siguiente regla es admisible:

$$\frac{\Gamma, x : A, \Delta \vdash M : B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B}$$

Demostración. Por inducción sobre la derivación de $\Gamma, x : A, \Delta \vdash M : B$, usando la regla de debilitamiento para tratar el caso donde $M \equiv x$. $\square$

Ejercicio: Escribir la prueba, detallando todos los casos.

Caso particular ($\Delta \equiv \emptyset$):

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M[x := N] : B}$$

Propiedades básicas (3/4)

El siguiente lema muestra cómo "invertir" las reglas de tipado:

Lema de inversión

1. Si $\Gamma \vdash x : C$, entonces $(x : C) \in \Gamma$
2. Si $\Gamma \vdash \lambda x : A \,.\, M : C$, entonces
   $\Gamma, x : A \vdash M : B$ para algún tipo B tal que $C \equiv A \to B$
3. Si $\Gamma \vdash MN : C$, entonces
   $\Gamma \vdash M : A \to C$ y $\Gamma \vdash N : A$ para algún tipo A

Demostración. Sigue del hecho que el sistema es dirigido por la sintaxis. □

Ejercicio: Detallar los tres casos.

Propiedades básicas (4/4)

El lema de inversión no sólo permite analizar las derivaciones, sino también permite demostrar que ciertos términos no son tipables:

Ejercicio. Usando el lema de inversión, demostrar que los términos

- $\mathbf{\Delta}_A \;:\equiv\; \lambda x^A . x\,x$
- $\mathbf{\Omega}_{A,B} \;:\equiv\; \Delta_A\,\Delta_B$
- $\mathbf{Y}_{A,B,C} \;:\equiv\; \lambda f^A . (\lambda x^B . f\,(x\,x))\,(\lambda x^C . f\,(x\,x))$

no son tipables, en ningún contexto y para ningunos tipos A, B, C

Además:

Proposición (Unicidad del tipo)

Si $\Gamma \vdash M : A$ y $\Gamma \vdash M : A'$, entonces $A \equiv A'$

Demostración. Por inducción sobre el término M, usando el lema de inversión. $\square$

Subject reduction (1/2)

Proposición (*Subject Reduction*)

Si $\Gamma \vdash M : A$ y $M \succ M'$, entonces $\Gamma \vdash M' : A$

Corolario

1. Si $\Gamma \vdash M : A$ y $M \succ^* M'$, entonces $\Gamma \vdash M' : A$
2. En particular, la forma de normal de M (cuando existe) tiene el mismo tipo que M (cuando existe)

Demostración de la *subject reduction*. Por inducción sobre la derivación de la relación $M \succ M'$, distinguiendo los casos en función de la última regla aplicada:

- **Regla β:** $M \equiv (\lambda x^B . M_1)M_2$ y $M' \equiv M_1[x := M_2]$.
  Sabemos que $\Gamma \vdash (\lambda x^B . M_1)M_2 : A$. Por inversión ($\times$ 2), se deduce que:
  (1) $\Gamma \vdash \lambda x^B . M_1 : B' \to A$ y $\Gamma \vdash M_2 : B'$ para algún B'
  (2) $\Gamma, x : B \vdash M_1 : A'$ para algún A' tal que $B' \to A \equiv B \to A'$.
  Entonces $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, y por lo tanto: $\Gamma, x : B \vdash M_1 : A$ y $\Gamma \vdash M_2 : B$.
  Por sustitutividad: $\Gamma \vdash M_1[x := M_2] : A$, es decir: $\Gamma \vdash M' : A$ (...)

Subject reduction

Demostración de la *subject reduction* (continuación).

- **Regla (CLam):** $M \equiv \lambda x^B . M_1$ y $M' \equiv \lambda x^B . M_1'$, con $M_1 \succ M_1'$.
  Sabemos que $\Gamma \vdash \lambda x^B . M_1 : A$. Por inversión, se deduce que:
  $\Gamma, x : B \vdash M_1 : C$ para algún C tal que $A \equiv B \to C$.
  Por hipótesis de inducción, tenemos que $\Gamma, x : B \vdash M_1' : C$.
  Y por lo tanto $\Gamma \vdash \lambda x^B . M_1' : B \to C$, es decir: $\Gamma \vdash M' : A$.

- **Regla (CApp$_1$):** $M \equiv M_1 M_2$ y $M' \equiv M_1' M_2$, con $M_1 \succ M_1'$.
  Sabemos que $\Gamma \vdash M_1 M_2 : A$. Por inversión, se deduce que:
  $\Gamma \vdash M_1 : B \to A$ y $\Gamma \vdash M_2 : B$ para algún B.
  Por hipótesis de inducción, tenemos que $\Gamma \vdash M_1' : B \to A$.
  Y por lo tanto $\Gamma \vdash M_1' M_2 : A$, es decir: $\Gamma \vdash M' : A$.

- **Regla (CApp$_2$):** $M \equiv M_1 M_2$ y $M' \equiv M_1 M_2'$, con $M_2 \succ M_2'$.
  Sabemos que $\Gamma \vdash M_1 M_2 : A$. Por inversión, se deduce que:
  $\Gamma \vdash M_1 : B \to A$ y $\Gamma \vdash M_2 : B$ para algún B.
  Por hipótesis de inducción, tenemos que $\Gamma \vdash M_2' : B$.
  Y por lo tanto $\Gamma \vdash M_1 M_2' : A$, es decir: $\Gamma \vdash M' : A$. $\square$

Normalización fuerte

Vimos que los términos no fuertemente normalizantes

$$\mathbf{\Omega}_{A,B} \;:\equiv\; \Delta_A \, \Delta_B, \qquad \mathbf{Y}_{A,B,C} \;:\equiv\; \lambda f^A \,.\, (\lambda x^B \,.\, f\,(x\,x))\,(\lambda x^C \,.\, f\,(x\,x))$$

no son tipables. De hecho:

Teorema (Normalización fuerte)

Si $\Gamma \vdash M : A$, entonces M es fuertemente normalizante

Demostración: Postergada

Corolario (Convertibilidad entre términos tipados)

1. Dos términos de mismo tipo son β-convertibles si y sólo si tienen la misma forma normal:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"'] & & M_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\ & N \text{ (normal)} & \end{tikzcd}$$

2. La relación $M_1 \cong M_2$ entre términos tipados es decidible

¿Y la η-reducción?

- También se puede considerar la η-reducción, definida por:

$$(\eta) \qquad \lambda x : A \,.\, M\, x \quad \succ_\eta \quad M \qquad (\text{si } x \notin FV(M))$$

$+$ clausura contextual

- **Problema:** $\succ_{\beta\eta}$ no es confluente sobre los términos no tipados:

$$\begin{array}{ccccc} & & \lambda x : A \,.\, (\lambda y : B \,.\, y)\, x & & (\text{no tipado si } A \not\equiv B) \\ & \swarrow^{\beta} & & \searrow^{\eta} & \\ \lambda x : A \,.\, x & & \not\equiv_\alpha & & \lambda y : B \,.\, y \qquad (\text{si } A \not\equiv B) \end{array}$$

- Sin embargo, se puede demostrar (ejercicio) que:

Proposición

1. La $\beta\eta$-reducción es confluente sobre los términos tipados
2. Si $\Gamma \vdash M : A$ y $M \succ_{\beta\eta} M'$, entonces $\Gamma \vdash M' : A$ $\qquad (\beta\eta\text{-S.R.})$
3. Todos los términos tipados son $\beta\eta$-normalizantes

Verificación e inferencia de tipo (1/2)

Se consideran los siguientes dos problemas:

1. **El problema de la verificación de tipo:**
   Dados Γ, M, A, determinar si el juicio $\Gamma \vdash M : A$ es derivable o no
2. **El problema de la inferencia de tipo:**
   Dados Γ, M, determinar si existe un tipo A tal que $\Gamma \vdash M : A$ (y devolver tal tipo A cuando existe)

Proposición (Decidabilidad)

El el cálculo lambda simplemente tipado (a la Church), los problemas de la verificación y de la inferencia de tipo son decidibles

Demostración. Véase los algoritmos en la siguiente diapositiva. $\square$

Verificación e inferencia de tipo (2/2)

Inferir$(\Gamma,\ M)$ $:=$

- **Caso** $M \equiv x$**:**
  Si $(x : A) \in \Gamma$ para algún A: devolver A
  si no: devolver "no tipable"
- **Caso** $M \equiv \lambda x^A . M_1$**:**
  Sea B $:=$ **Inferir**$((\Gamma, x : A),\ M_1)$ (cuando existe)
  Si B existe: devolver $A \to B$;
  si no: devolver "no tipable"
- **Caso** $M \equiv M_1\, M_2$**:**
  Sea A_1 $:=$ **Inferir**$(\Gamma,\ M_1)$ (cuando existe)
  Sea A_2 $:=$ **Inferir**$(\Gamma,\ M_2)$ (cuando existe)
  Si A_1, A_2 existen y $A_1 \equiv A_2 \to B$
  para algún B: devolver B;
  si no: devolver "no tipable"

Verificar$(\Gamma,\ M,\ A)$ $:=$

Sea A' $:=$ **Inferir**$(\Gamma,\ M)$ (cuando existe)
Si A' existe y $A' \equiv A$: devolver "derivable";
si no: devolver "no derivable"

Expresividad: los booleanos

- Para todo tipo A, se definen:

$$\begin{array}{rcl}
\mathtt{Bool}_A & :\equiv & A \to A \to A \\
\mathtt{true}_A & :\equiv & \lambda x, y : A \,.\, x \quad : \quad \mathtt{Bool}_A \\
\mathtt{false}_A & :\equiv & \lambda x, y : A \,.\, y \quad : \quad \mathtt{Bool}_A \\
\mathtt{if}_A & :\equiv & \lambda b : \mathtt{Bool}_A \,.\, \lambda x, y : A \,.\, b\, x\, y \\
 & & : \quad \mathtt{Bool}_A \to A \to A \to A
\end{array}$$

Ejercicio: Verificar que estas definiciones cumplen las reducciones deseadas

- **Defecto:** Se necesita un tipo $\mathtt{Bool}_A$ para cada tipo A[1]

- Sin embargo, se pueden implementar las operaciones booleanas:

$$\begin{array}{rcl}
\mathtt{not}_A & :\equiv & \lambda b : \mathtt{Bool}_A \,.\, \lambda x, y : A \,.\, \mathtt{if}_A\, b\, y\, x \quad : \quad \mathtt{Bool}_A \to \mathtt{Bool}_A \\
\mathtt{and}_A & :\equiv & \lambda b_1, b_2 : \mathtt{Bool}_A \,.\, \lambda x, y : A \,.\, \mathtt{if}_A\, b_1\, (b_2\, x\, y)\, y \\
 & & : \quad \mathtt{Bool}_A \to \mathtt{Bool}_A \to \mathtt{Bool}_A \\
\mathtt{or}_A & :\equiv & \lambda b_1, b_2 : \mathtt{Bool}_A \,.\, \lambda x, y : A \,.\, \mathtt{if}_A\, b_1\, x\, (b_2\, x\, y) \\
 & & : \quad \mathtt{Bool}_A \to \mathtt{Bool}_A \to \mathtt{Bool}_A
\end{array}$$

[1] Aquí nos falta un poco de polimorfismo (véase curso de programación funcional)

Expresividad: los booleanos (2/2)

Ejercicio. En este ejercicio, se supone que el álgebra de tipos del cálculo lambda simplemente tipado contiene un único tipo de base, escrito α

(1) Demostrar que $\mathtt{true}_\alpha$ y $\mathtt{false}_\alpha$ son los únicos términos cerrados y en forma normal de tipo $\mathtt{Bool}_\alpha$

(2) Construir para cada A un término $\mathtt{if}'_A : \mathtt{Bool}_\alpha \to A \to A \to A$ tal que:

$$\mathtt{if}_A\ \mathtt{true}_\alpha\ M\ N \succ^*_{\beta\eta} M \qquad \text{y} \qquad \mathtt{if}_A\ \mathtt{false}_\alpha\ M\ N \succ^*_{\beta\eta} N$$

para todos $M, N : A$

(3) Construir para cada tipo A dos términos $C_A : \mathtt{Bool}_\alpha \to \mathtt{Bool}_A$ y $C'_A : \mathtt{Bool}_A \to \mathtt{Bool}_\alpha$ tales que:

$$\begin{array}{lcllcl} C_A\ \mathtt{true}_\alpha & \succ^*_{\beta\eta} & \mathtt{true}_A & \qquad C'_A\ \mathtt{true}_A & \succ^*_{\beta} & \mathtt{true}_\alpha \\ C_A\ \mathtt{false}_\alpha & \succ^*_{\beta\eta} & \mathtt{false}_A & \qquad C'_A\ \mathtt{false}_A & \succ^*_{\beta} & \mathtt{false}_\alpha \end{array}$$

(4) Escribiendo $M_1 \circ_A M_2 :\equiv \lambda x : A\,.\, M_1\,(M_2\, x)$, verificar que

$$C'_A \circ C_A \succ^*_\beta \mathbf{I}_{\mathtt{Bool}_\alpha} \qquad \text{y} \qquad C_A \circ C'_A \succ^*_{\beta\eta} \mathbf{I}_{\mathtt{Bool}_A}$$

Expresividad: los enteros de Church (1/3)

- Para todo tipo A, se definen:

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{Nat}_A & :\equiv & (A \to A) \to A \to A \\ \overline{n}_A & :\equiv & \lambda f : A \to A\,.\,\lambda x : A\,.\,\underbrace{f\,(\cdots(f}_{n}\ x)\cdots) \quad : \quad \mathtt{Nat}_A \\ \mathtt{iter}_A & :\equiv & \lambda n : \mathtt{Nat}_A\,.\,\lambda f : A \to A\,.\,\lambda x : A\,.\,n\,f\,x \\ & & :\ \ \mathtt{Nat}_A \to (A \to A) \to A \to A \end{array}$$

Ejercicio: Verificar que estas definiciones cumplen las reducciones deseadas

- **Defecto:** Se necesita un tipo $\mathtt{Nat}_A$ para cada tipo A

- Sin embargo, ya se pueden implementar las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{succ}_A & :\equiv & \lambda n : \mathtt{Nat}_A\,.\,\lambda f : A \to A\,.\,\lambda x : A\,.\,f\,(n\,f\,x) \\ & & :\ \ \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A \\ \mathtt{plus}_A & :\equiv & \lambda n, m : \mathtt{Nat}_A\,.\,\lambda f : A \to A\,.\,\lambda x : A\,.\,n\,f\,(m\,f\,x) \\ & & :\ \ \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A \end{array}$$

Expresividad: los enteros de Church (2/3)

Ejercicio (Funciones representables).

(1) Dado un tipo de base α, demostrar que los únicos términos cerrados y en forma normal de tipo $\mathtt{Nat}_\alpha$ son:

- los enteros de Church $\overline{n}_\alpha : \mathtt{Nat}_\alpha$ $(n \in \mathbb{N})$…
- … más un término $N_\alpha : \mathtt{Nat}_\alpha$ que se determinará

(1.1) ¿A qué entero corresponde el término N_α?
(1.2) ¿Cómo cambiar las definiciones para excluir este caso patológico?

(2) Construir un término $\mathtt{mult}_A : \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A$ tal que:

$$\mathtt{mult}_A\, \overline{n}_A\, \overline{m}_A \succ_\beta^* \overline{nm}_A \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

(3) Construir un término $\mathtt{ifzero} : \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A$ tal que:

$$\mathtt{ifzero}_A\, \overline{n}_A\, \overline{p}_A\, \overline{q}_A \succ_\beta^* \begin{cases} \overline{p}_A & \text{si } n = 0 \\ \overline{q}_A & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \qquad (n, p, q \in \mathbb{N})$$

Expresividad: los enteros de Church (3/3)

Ejercicio (Funciones representables, continuación).

Se llaman polinomios extendidos a las funciones de tipo $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ generadas por la suma, el producto y la función `ifzero`

(4) Definir formalmente la noción de polinomio extendido (para todo $k \geq 1$)

(5) Deducir de lo anterior que todos los polinomios extendidos son representables en el cálculo lambda simplemente tipado (con el tipo $\mathtt{Nat}_\alpha$)

Obs.: Se puede demostrar que los polinomios extendidos son las únicas funciones representables en el cálculo lambda simplemente tipado con el tipo $\mathtt{Nat}_\alpha$ (α tipo de base fijado) [Schwichtenberg 1975]

Sin embargo, se pueden representar más funciones, autorizando tipos distintos para los argumentos y el resultado: $\mathtt{Nat}_{A_1} \to \cdots \to \mathtt{Nat}_{A_k} \to \mathtt{Nat}_B$

(6) ¿Qué función representa el siguiente término?

$$\begin{aligned} \mathtt{misterio}_A \quad &:\equiv \quad \lambda n^{\mathtt{Nat}_{A\to A}} . \lambda m^{\mathtt{Nat}_A} . n\, m \\ &\quad : \quad \mathtt{Nat}_{A\to A} \to \mathtt{Nat}_A \to \mathtt{Nat}_A \end{aligned}$$

Plan

Sistema en el estilo de Curry: presentación

Sistema a la Curry $=$ Variante sin anotación de tipo en el λ

Definición (Sintaxis del cálculo simplemente tipado a la Curry)

Tipos	A, B	$::=$	$\alpha \mid A \to B$
Términos	M, N	$::=$	$x \mid \lambda x\,.\,M \mid M\,N$
Contextos	Γ, Δ	$::=$	$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ $\quad (x_i \not\equiv x_j$ si $i \neq j)$
Reducción			$(\lambda x\,.\,M)\,N \succ M[x := N]$

- Los tipos (y los contextos) no cambian
- Los términos ahora son los términos lambda puros

Sistema en el estilo de Curry: tipado

Definición (Relación de tipado $\Gamma \vdash M : A$)

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : A}\ \text{si } (x{:}A) \in \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x\,.\,M : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

- Tipado de la abstracción sin anotación de tipo:
  se pierde la unicidad del tipo: ambigüedad típica

$$\vdash \lambda x\,.\,x : A \to A \qquad\qquad \text{para todo tipo } A$$

- Sin embargo: existencia de tipos principales
  (cf curso de programación funcional)

- La verificación y la inferencia de tipo siguen siendo decidibles...
  ... pero con un algoritmo mucho más sutil (Hindley-Milner)

Sistema en el estilo de Curry: propiedades

- Lemas básicos (variables libres, debilitamiento, sustitutividad)
  $\Rightarrow$ como en el sistema a la Church

Lema de inversión

1. Si $\Gamma \vdash x : C$, entonces $(x : C) \in \Gamma$
2. Si $\Gamma \vdash \lambda x\,.\,M : C$, entonces
   $\Gamma, x : A \vdash M : B$ para algunos tipos A, B tales que $C \equiv A \to B$
3. Si $\Gamma \vdash MN : C$, entonces
   $\Gamma \vdash M : A \to C$ y $\Gamma \vdash N : A$ para algún tipo A

Demostración. Ejercicio.

Proposición (*Subject Reduction*)

Si $\Gamma \vdash M : A$ y $M \succ M'$, entonces $\Gamma \vdash M' : A$

Demostración. Ejercicio.

La función de borrado (1/2)

Se define la función de borrado $M \mapsto |M|$ (Church $\to$ Curry) por:

$$\begin{array}{rcl} |x| & :\equiv & x \\ |\lambda x : A \,.\, M| & :\equiv & \lambda x \,.\, |M| \\ |M\,N| & :\equiv & |M||N| \end{array}$$

Proposición (Borrado de los juicios derivables)

1. Si $\Gamma \vdash M_0 : A$ (Church), entonces $\Gamma \vdash |M_0| : A$ (Curry)
2. Si $\Gamma \vdash M : A$ (Curry), entonces $\Gamma \vdash M_0 : A$ (Church) para algún $M_0 \in$ Church tal que $|M_0| \equiv M$ (no necesariamente único)

Demostración: Ejercicio

La función de borrado (2/2)

- La función de borrado $M \mapsto |M|$ transforma:

Mundo de Church		**Mundo de Curry**	
derivaciones	en	derivaciones	(isomorfismo)
juicios derivables	en	juicios derivables	(sobreyección)

- **¡Cuidado!** No es inyectiva sobre los juicios derivables:

$$x : \alpha \vdash (\lambda z^{B \to B} . x)(\lambda y^{B} . y) : \alpha$$

$$\rightsquigarrow \quad x : \alpha \vdash (\lambda z . x)(\lambda y . y) : \alpha \qquad \text{para todo } B$$

(Pero sí es inyectiva sobre los juicios $\Gamma \vdash M : A$ donde M está en forma normal)

- **Conclusión:** Ambos sistemas son esencialmente equivalentes

Borrado y reducción

Lema (Borrado y reducción)

1. Si $M_0 \succ M_0'$ $(\in \text{Church})$, entonces $|M_0| \succ |M_0'|$ $(\in \text{Curry})$

$$\begin{tikzcd} M_0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & {|M_0|} \arrow[d, dotted] \\ M_0' \arrow[r, mapsto, dotted] & {|M_0'|} \end{tikzcd}$$

2. Si $|M_0| \succ M'$ $(\in \text{Curry})$, entonces $M_0 \succ M_0'$ $(\in \text{Church})$ para algún $M_0' \in \text{Church}$ tal que $|M_0'| \equiv M'$

$$\begin{tikzcd} M_0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, dotted] & {|M_0|} \arrow[d] \\ M_0' \arrow[r, mapsto, dotted] & {|M_0'| \equiv M'} \end{tikzcd}$$

Demostración. Ejercicio.

Obs.: La proposición anterior no hace ninguna hipótesis de tipado

Borrado y normalización

Corolario (Borrado y normalización)

Para todo $M_0 \in \text{Church}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M_0 ($\in$ Church) es fuertemente normalizante
2. $|M_0|$ ($\in$ Curry) es fuertemente normalizante

Obs.: La proposición anterior no hace ninguna hipótesis de tipado

Proposición (Equivalencia de normalización)

Los enunciados

1. Todo término tipado $\in$ Church es fuertemente normalizante
2. Todo término tipado $\in$ Curry es fuertemente normalizante

son combinatoriamente equivalentes

Demostración. Ejercicio.

Plan

Problema de la normalización fuerte

El objetivo de esta sección es demostrar el:

Teorema (Normalización fuerte)

Si $\Gamma \vdash M : A$, entonces M es fuertemente normalizante

Corolario (Normalización débil)

Todo término tipado tiene forma normal

- Se puede demostrar indiferentemente en el sistema a la Church o en el sistema a la Curry (equivalencia de normalización)

  $\Rightarrow$ Lo demostraremos aquí en el sistema a la Curry

- Literatura abundante sobre el tema:
  - Pruebas de normalización fuerte: con los conjuntos saturados (Tait), con los candidatos de reducibilidad (Girard), etc.
  - Pruebas de normalización débil: pruebas combinatorias (inducción sobre el grado de un término), normalización por evaluación, etc.

Preliminaries (1/4)

Dado un término M (a la Church o a la Curry):

- Un reducido de M es un término M' tal que $M \succ M'$ (1 paso)

- $\mathrm{Red}_1(M) \ := \ \{M' \in \Lambda : M \succ M'\}$ (conjunto de los reducidos de M)

  Obs.: $\mathrm{Red}_1(M)$ es finito (cardinal acotado por el número de redexes en M)

- Una sucesión finita de reducción a partir de M es una sucesión finita $(M_i)_{i\in[0..n]}$ tal que $M \equiv M_0 \succ M_1 \succ \cdots \succ M_{n-1} \succ M_n$

  De modo análogo se definen las sucesiones infinitas de reducción a partir de M, remplazando $[0..n]$ por $\mathbb{N}$

- Las sucesiones finitas de reducciones a partir de M forman un árbol: el árbol de reducción de M

  Las ramas infinitas de este árbol son las sucesiones infinitas de reducción

Preliminarios

Definición (Términino fuertemente normalizante)

Un término M es fuertemente normalizante cuando todas las sucesiones de reducción a partir de M son finitas

Proposición

Para todo término M, los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) M es fuertemente normalizante

(2) Todos los reducidos de M son fuertemente normalizantes

(3) El árbol de reducción de M es finito

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Obvio, por contrarrecíproco.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sigue del lema de Kőnig, que expresa que un árbol con ramificación finita y sin ramas infinitas es finito.

(3) $\Rightarrow$ (1) Obvio, pues un árbol finito no tiene ramas infinitas. $\square$

Preliminarios

El conjunto **SN** de los términos fuertemente normalizantes también se puede definir inductivamente mediante la única regla:

$$\frac{M_1' \in \mathbf{SN} \quad \cdots \quad M_n' \in \mathbf{SN}}{M \in \mathbf{SN}} \ {\scriptstyle \{M_1',\ldots,M_n'\} = \mathrm{Red}_1(M)}$$

Caso de base escondido: $\mathrm{Red}_1(M) = \varnothing$, es decir: M está en forma normal

- La definición inductiva del conjunto **SN** permite activar el principio de razonamiento por inducción (sobre la hipótesis $M \in \mathbf{SN}$) así como el mecanismo de definición de función por recursión (sobre $M \in \mathbf{SN}$)

- Ejemplo: Definición de la función $\varepsilon \ : \ \mathbf{SN} \to \mathbb{N}$:

$$\varepsilon(M) \quad := \quad \max_{M' \in \mathrm{Red}_1(M)} (1 + \varepsilon(M'))$$

$:=$ longitud de la máxima sucesión finita de reducción a partir de M

En particular: $\varepsilon(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Red}_1(M) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad M$ es normal

Preliminaries (4/4)

Proposición (Propiedades de los términos SN)

1. $\lambda x\,.\,M \;\in\; \mathbf{SN}$ sii $M \in \mathbf{SN}$
   Además: $\varepsilon(\lambda x\,.\,M) = \varepsilon(M)$
2. $x\,N_1 \cdots N_k \;\in\; \mathbf{SN}$ sii $N_1, \ldots, N_k \in \mathbf{SN}$
   Además: $\varepsilon(x\,N_1 \cdots N_k) \;=\; \varepsilon(N_1) + \cdots + \varepsilon(N_k)$
3. Si $M \in \mathbf{SN}$, entonces $M' \in \mathbf{SN}$ para todo subtérmino $M' \sqsubseteq M$.
   Además: $\varepsilon(M') \leq \varepsilon(M)$
4. Si $M[x := N] \in \mathbf{SN}$, entonces $M \in \mathbf{SN}$.
   Además: $\varepsilon(M) \leq \varepsilon(M[x := N])$

Demostración. Ejercicio.

Una prueba ingenua... y falsa

Teorema (Normalización fuerte)

Si $\Gamma \vdash M : A$, entonces M es fuertemente normalizante

Demostración. Por inducción sobre la derivación de $\Gamma \vdash M : A$ (en el sistema a la Curry), distinguiendo los casos en función de la última regla aplicada:

- **Variable.** La derivación es de la forma $\dfrac{}{\Gamma \vdash x : A}$ con $(x : A) \in \Gamma$.

  Obviamente $x \in \mathbf{SN}$.

- **Abstracción.** La derivación es de la forma $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ d\\ \Gamma, x : A \vdash M : B\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x . M : A \to B}$

  Por (HI), tenemos $M \in \mathbf{SN}$, y por lo tanto $\lambda x . M \in \mathbf{SN}$.

- **Aplicación.** La derivación es de la forma $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ d_1\\ \Gamma \vdash M : A \to B\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ d_1\\ \Gamma \vdash N : A\end{array}}{\Gamma \vdash MN : B}$

  Por (HI), tenemos $M \in \mathbf{SN}$ y $N \in \mathbf{SN}$... pero esto no implica que $MN \in \mathbf{SN}$

Términos reducibles de tipo A

La hipótesis de inducción (HI) "$M \in \mathbf{SN}$" es demasiado débil: no tiene en cuenta el caso donde M está aplicado

$\Rightarrow$ Se necesita introducir una HI más fuerte que depende del tipo

Definición (Términos reducibles de tipo A)

1. Un término M es reducible de tipo α (de base) cuando $M \in \mathbf{SN}$
2. Un término M es reducible de tipo $A \to B$ cuando para todo N: N reducible de tipo $A \;\Rightarrow\; MN$ reducible de tipo B

Dicho de otro modo, se asocia a cada tipo A un conjunto $[\![A]\!]$ de los términos reducibles de tipo A, definido (por inducción sobre A) por:

$$
\begin{aligned}
[\![\alpha]\!] &:= \mathbf{SN} \\
[\![A \to B]\!] &:= [\![A]\!] \to [\![B]\!] \qquad \text{(flecha de Kleene)} \\
&:= \{M \in \Lambda \;:\; \forall N \in [\![A]\!],\ MN \in [\![B]\!]\}
\end{aligned}
$$

Candidatos de reducibilidad (1/5)

Para estudiar las propiedades de los conjuntos $[\![A]\!]$,
es cómodo introducir la siguiente noción:

Definición (Candidato de reducibilidad) [Girard 1969]

Un conjunto de términos $C \subseteq \Lambda$ (posiblemente abiertos) es un candidato de reducibilidad cuando cumple los siguientes criterios:

(CR1) $C \subseteq \mathbf{SN}$

(CR2) Si $M \in C$, entonces $\mathrm{Red}_1(M) \subseteq C$

(CR3) Si un término M que no es una abstracción es tal que $\mathrm{Red}_1(M) \subseteq C$, entonces $M \in C$

Intuición:
(CR1) = lo que queremos demostrar (normalización fuerte)
(CR2) = clausura por reducción
(CR3) = criterio técnico de clausura por expansión

Candidatos de reducibilidad (2/5)

Lema 1

Un candidato de reducibilidad C contiene todas las variables: $x \in C$

Demostración. Dada una variable x, se observa que x no es una abstracción y $\mathrm{Red}_1(x) = \varnothing \subseteq C$. Por lo tanto $x \in C$ por (CR3). $\square$

Lema 2 (El candidato SN)

SN es un candidato de reducibilidad

Demostración. (CR1) $\mathbf{SN} \subseteq \mathbf{SN}$: obvio.

(CR2) $M \in \mathbf{SN}$ implica $\mathrm{Red}_1(M) \subseteq \mathbf{SN}$: obvio.

(CR3) Si $M \not\equiv \lambda \cdots$ es tal que $\mathrm{Red}_1(M) \subseteq \mathbf{SN}$, entonces $M \in \mathbf{SN}$: obvio. $\square$

Candidatos de reducibilidad (3/5)

Lema 3 (Clausura por la flecha de Kleene)

Si $C, D \subseteq \Lambda$ son candidatos de reducibilidad, entonces el conjunto $C \to D \ := \ \{M \in \Lambda \ : \ \forall N \in C,\ MN \in D\}$ también lo es

Demostración. (CR1) Sea $M \in C \to D$. Cualquier variable x pertenece a C por el Lema 1, entonces $M\,x \in D \subseteq \mathbf{SN}$ por (CR1), y por lo tanto $M \in \mathbf{SN}$.

(CR2) Sean $M \in C \to D$ y $M' \in \text{Red}_1(M)$. Para todo $N \in C$, tenemos que $MN \in D$, y como $MN \succ M'N$, se deduce que $M'N \in D$ por (CR2). Por lo tanto, tenemos que que $M' \in C \to D$.

(CR3) Sea M distinto de una abstracción tal que $\text{Red}_1(M) \subseteq C \to D$ $(*)$. Demostremos por inducción bien fundada sobre $N \in C\,(\cap\,\mathbf{SN})$ que $MN \in D$. Para ello, se supone que $MN' \in D$ para todo $N' \in \text{Red}_1(N)$ (HI). Dado un reducido $R \in \text{Red}_1(MN)$, se observa (como M no es una abstracción) que:

- O bien $R \equiv M'N$, con $M' \in \text{Red}_1(M)$, y por lo tanto $R \equiv M'N \in D$ por $(*)$.
- O bien $R \equiv MN'$, con $N' \in \text{Red}_1(N)$, y por lo tanto $R \equiv MN' \in D$ por (HI).

Entonces $\text{Red}_1(MN) \subseteq D$, y como MN tampoco es una abstracción, se deduce que $MN \in D$ por (CR3). □

Candidatos de reducibilidad

Recordatorio: El conjunto $[\![A]\!]$ de los términos reducibles de tipo A está definido (por inducción sobre A) por:

$$
\begin{array}{rcll}
[\![\alpha]\!] & := & \mathbf{SN} & \\
[\![A \to B]\!] & := & [\![A]\!] \to [\![B]\!] & \text{(flecha de Kleene)} \\
 & := & \{M \in \Lambda \ : \ \forall N \in [\![A]\!],\ MN \in [\![B]\!]\} &
\end{array}
$$

Corolario

Para todo tipo A, el conjunto $[\![A]\!]$ es un candidato de reducibilidad

Demostración. Por inducción sobre A, usando el Lema 2 (caso de un tipo atómico) y el Lema 3 (caso de un tipo flecha). □

Candidatos de reducibilidad (5/5)

Lema 4 (Clausura por expansíon de cabeza)

En cualquier candidato de reducibilidad C:
Si $M[x := N] \in C$ y $N \in \mathbf{SN}$, entonces $(\lambda x\,.\,M)N \in C$

Demostración. Primero, se observa que $M[x := N] \in C$ implica que $M \in \mathbf{SN}$. Luego, se demuestra por inducción doble sobre $M, N \in \mathbf{SN}$ que $M[x := N] \in C$ implica $(\lambda x\,.\,M)N \in C$. Dados $M, N \in \mathbf{SN}$, se supone que:

(HI1) $M'[x := N] \in C$ implica $(\lambda x\,.\,M')N \in C$ para todo $M' \in \mathrm{Red}_1(M)$.

(HI2) $M[x := N'] \in C$ implica $(\lambda x\,.\,M)N' \in C$ para todo $N' \in \mathrm{Red}_1(N)$.

Suponiendo además que $M[x := N] \in C$, queremos demostrar que $(\lambda x\,.\,M)N \in C$. Dado un reducido $R \in \mathrm{Red}_1((\lambda x\,.\,M)N)$, se distinguen los siguientes casos:

- $R \equiv M[x := N]$. Tenemos que $R \equiv M[x := N] \in C$, por hipótesis.
- $R \equiv (\lambda x\,.\,M')N$, con $M' \in \mathrm{Red}_1(M)$. Como $M[x := N] \succ M'[x := N] \in C$ por (CR2), se deduce que $R \equiv (\lambda x\,.\,M')N \in C$ por (HI1).
- $R \equiv (\lambda x\,.\,M)N'$, con $N' \in \mathrm{Red}_1(N)$. Como $M[x := N] \succ^* M[x := N'] \in C$ por (CR2), se deduce que $R \equiv (\lambda x\,.\,M)N' \in C$ por (HI2).

Entonces $\mathrm{Red}_1((\lambda x\,.\,M)N) \subseteq C$. Se concluye que $(\lambda x\,.\,M)N \in C$ por (CR3). □

Interpretación de los contextos

- Una sustitución es un conjunto finito de la forma

$$\sigma \;:\equiv\; \{x_1 := N_1, \ldots, x_n := N_n\} \qquad (\text{con } x_i \not\equiv x_j \text{ si } i \neq j)$$

Notaciones:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{dom}(\sigma) & := & \{x_1, \ldots, x_n\} & \\ \sigma(x_i) & := & N_i & (1 \leq i \leq n) \\ FV(\sigma) & := & FV(N_1) \cup \cdots \cup FV(N_n) & \end{array}$$

- Se define la operación $(M, \sigma) \mapsto M[\sigma]$ por:

$$\begin{array}{rcll} x[\sigma] & := & \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \mathrm{dom}(\sigma) \\ x & \text{si no} \end{cases} & \\ (\lambda x\,.\,M)[\sigma] & :\equiv & \lambda x\,.\,M[\sigma] & (\text{si } x \notin FV(\sigma)) \\ (MN)[\sigma] & :\equiv & M[\sigma]N[\sigma] & \end{array}$$

Definición (Interpretación de los contextos)

$$[\![\Gamma]\!] \;:=\; \Big\{\sigma \text{ sustitución} \;:\; \mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\Gamma) \quad \text{y} \quad \sigma(x) \in [\![A]\!] \text{ para todo } (x : A) \in \Gamma\Big\}$$

Invariante de normalización (1/2)

Proposición (Invariante de normalización)

Si $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash M : A$, entonces

$$M[x_1 := N_1, \dots, x_n := N_n] \in [\![A]\!]$$

para todos $N_1 \in [\![A_1]\!], \dots, N_n \in [\![A_n]\!]$

O de modo más sintético:

Proposición (Invariante de normalización)

Si $\Gamma \vdash M : A$, entonces $M[\sigma] \in [\![A]\!]$ para todo $\sigma \in [\![\Gamma]\!]$

Demostración. Por inducción sobre la derivación de $\Gamma \vdash M : A$, distinguiendo los casos en función de la última regla aplicada:

- **Var** La derivación es de la forma $\overline{\Gamma \vdash x : A}$ con $(x : A) \in \Gamma$

  Sea $\sigma \in [\![\Gamma]\!]$. Tenemos que $x[\sigma] \equiv \sigma(x) \in [\![A]\!]$, por def de $[\![\Gamma]\!]$. (...)

Invariante de normalización (2/2)

Demostración (continuación y fin).

- **Lam** La derivación es de la forma $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, x : A \vdash M : B\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x \,.\, M : A \to B}$

  Sea $\sigma \in [\![\Gamma]\!]$. S.p.d.g., se puede suponer que $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma) \cup FV(\sigma)$.
  Dado $N \in [\![A]\!]$, se define $\sigma'_N := \sigma \cup \{x := N\} \in [\![\Gamma, x : A]\!]$.
  Por HI, se deduce que $M[\sigma'_N] \in [\![B]\!]$, es decir: $M[\sigma][x := N] \in [\![B]\!]$.
  Como $N \in [\![A]\!] \subseteq \mathbf{SN}$, se deduce que $(\lambda x \,.\, M[\sigma])N \in [\![B]\!]$ por el Lema 4,
  es decir $(\lambda x \,.\, M)[\sigma]N \in [\![B]\!]$. Demostramos que $(\lambda x \,.\, M)[\sigma]N \in [\![B]\!]$
  para todo $N \in [\![A]\!]$, es decir: $(\lambda x \,.\, M)[\sigma] \in [\![A]\!] \to [\![B]\!] = [\![A \to B]\!]$.

- **App** La derivación es de la forma $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash M : A \to B\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash N : A\end{array}}{\Gamma \vdash MN : A}$

  Sea $\sigma \in [\![\Gamma]\!]$. Por HI ($\times 2$), tenemos que $M[\sigma] \in [\![A \to B]\!] = [\![A]\!] \to [\![B]\!]$
  y $N[\sigma] \in [\![A]\!]$. Por lo tanto: $(MN)[\sigma] \equiv M[\sigma]N[\sigma] \in [\![B]\!]$. $\square$

Teorema de normalización fuerte

Teorema (Normalización fuerte)

Si $\Gamma \vdash M : A$, entonces M es fuertemente normalizante

Demostración. Escribamos $\Gamma \equiv x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$.
Sea $\sigma := \{x_1 := x_1, \ldots, x_n := x_n\}$ ("sustitución identidad"). Por construcción, tenemos que $\sigma \in [\![\Gamma]\!]$ pues $x_i \in [\![A_i]\!]$ para todo $i \in [1..n]$, por el Lema 1. Por el invariante de normalización, se deduce que $M \equiv M[\sigma] \in [\![A]\!] \subseteq \mathbf{SN}$, por (CR1). $\square$

Corolarios

En el cálculo lambda simplemente tipado (a la Church o a la Curry):

1. Todo término tipado tiene forma normal
2. Dos términos tipados (y de mismo tipo) son β-convertibles si y sólo si tienen la misma forma normal
3. La relación $M_1 \cong M_2$ (entre términos de mismo tipo) es decidible

Plan

Extensiones del cálculo lambda simplemente tipado

- En su forma primitiva, el cálculo lambda simplemente tipado está basado sólo en la construcción de tipo $A \to B$ (tipo flecha)

- También se puede extender con:
  - productos $A \times B$ y sumas directas $A + B$ (véase más adelante)
  - booleanos, enteros naturales, listas, etc. (Sistema T de Gödel)

- Más generalmente, se puede enriquecer el tipado con:
  - Polimorfismo, segundo orden (Sistema F de Girard)
  - Tipos dependientes (Teoría de tipos de Martin-Löf)
  - Todo lo anterior, más: tipos inductivos generalizados, universos, etc. (Cálculo de construcciones inductivas de Coquand-Paulin, Sistema Coq)

- En todos los sistemas mencionados, se mantienen las propiedades fundamentales: confluencia, subject reduction y normalización fuerte

Extensión con tipos productos (1/2)

- Se enriquece la sintaxis de $\lambda^{\rightarrow}$ con:

Tipos	A, B	$::=$	$\cdots$	$\mid$	$A \times B$				
Términos	M, N	$::=$	$\cdots$	$\mid$	$\langle M, N \rangle$	$\mid$	$\pi_1(M)$	$\mid$	$\pi_2(M)$

- Nuevas reglas de reducción:

$$\pi_1(\langle M, N \rangle) \succ M \qquad\qquad \pi_2(\langle M, N \rangle) \succ N$$

- Nuevas reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \times B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : B}$$

- **Ejemplo:** $\lambda z^{A \times B} . \langle \pi_2(z), \pi_1(z) \rangle \;:\; A \times B \rightarrow B \times A$

- Se mantienen las propiedades deseadas:
confluencia, *subject reduction*, normalización fuerte

Extensión con tipos productos (2/2)

- Una construcción muy útil: el "let" destructurante:

$$\text{let } \langle x^A, y^B \rangle = N \text{ in } M \quad :\equiv \quad (\lambda z^{A\times B} . (\lambda x^A . \lambda y^B . M)\, \pi_1(z)\, \pi_2(z))\, N$$

donde z es una variable fresca

- Por construcción:

$$FV\big(\text{let } \langle x^A, y^B \rangle = N \text{ in } M\big) \;=\; FV(N) \cup (FV(M) \setminus \{x, y\})$$

- Regla de reducción deducida:

$$\text{let } \langle x^A, y^B \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle \text{ in } M \quad \succ^+ \quad M[x := N_1, y := N_2]$$

- Regla de tipado (admisible):

$$\frac{\Gamma \vdash N : A \times B \qquad \Gamma, x : A, y : B \vdash M : C}{\Gamma \vdash \text{let } \langle x^A, y^B \rangle = N \text{ in } M : C}$$

Extensión con tipos suma (1/2)

- Se enriquece las sintaxis de $\lambda^{\rightarrow}$ (a la Church) con:

$$\begin{array}{llcl}
\textbf{Tipos} & A, B & ::= & \cdots \mid A + B \\
\textbf{Términos} & M, N & ::= & \cdots \mid \iota_1^{A,B}(M) \mid \iota_2^{A,B}(M) \\
& & & \mid \text{case } N \ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\}
\end{array}$$

Obs.: $FV(\text{case } N \ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\})$
$:= \quad FV(N) \cup (FV(M_1) \setminus \{x_1\}) \cup (FV(M_2) \setminus \{x_2\})$

- Nuevas reglas de reducción:

$$\begin{array}{lcl}
\text{case } \iota_1^{A,B}(N) \ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} & \succ & M_1[x_1 := N] \\
\text{case } \iota_2^{A,B}(N) \ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} & \succ & M_2[x_2 := N]
\end{array}$$

- **Obs.:** En el sistema a la Curry, remplazar $\iota_i^{A,B}(M)$ por $\iota_i(M)$ $\qquad (i = 1, 2)$

Extensión con tipos suma (2/2)

- Nuevas reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \iota_1^{A,B}(M) : A + B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash \iota_2^{A,B}(M) : A + B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash N : A + B \qquad \Gamma, x_1 : A \vdash M_1 : C \qquad \Gamma, x_2 : B \vdash M_2 : C}{\Gamma \vdash \text{case } N \ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} : C}$$

- **Obs.:** En el sistema a la Curry, remplazar $\iota_i^{A,B}(M)$ por $\iota_i(M)$ $\quad (i = 1, 2)$

- **Ejemplo:** $\lambda z^{A+B} . \text{case } z \ \{\iota_1(x) \mapsto \iota_2^{B,A}(x) \mid \iota_2(y) \mapsto \iota_1^{B,A}(y)\}$
  $: \quad A + B \to B + A$

- Otra vez, se mantienen las propiedades deseadas: confluencia, *subject reduction*, normalización fuerte

Sistema $\lambda^{\to,\times,+}$: sintaxis

Definición (Tipos)

$$\textbf{Tipos} \qquad A, B \quad ::= \quad \alpha \quad | \quad A \to B \quad | \quad A \times B \quad | \quad A + B$$

Definición (Términos)

$$\begin{array}{llll} \textbf{Términos} & M, N & ::= & x \quad | \quad \lambda x : A \,.\, M \quad | \quad M\, N \\ & & | & \langle M, N \rangle \quad | \quad \pi_1(M) \quad | \quad \pi_2(M) \\ & & | & \iota_1^{A,B}(M) \quad | \quad \iota_2^{A,B}(M) \\ & & | & \mathsf{case}\ N\ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} \end{array}$$

Obs.: En el sistema a la Curry, eliminar las anotaciones A, B en λ, ι_1, ι_2

Ejercicio:

- Definir los conjuntos $FV(M)$ y $BV(M)$ (variables libres y ligadas)
- Definir la α-conversión y la sustitución

Sistema $\lambda^{\to,\times,+}$: reducción

Relación $\succ$ de reducción definida por las 5 reglas:

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x : A \,.\, M)N & \succ & M[x := N] \\
\pi_1(\langle M, N\rangle) & \succ & M \\
\pi_2(\langle M, N\rangle) & \succ & N \\
\text{case } \iota_1^{A,B}(M)\ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} & \succ & M_1[x_1 := N] \\
\text{case } \iota_2^{A,B}(M)\ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} & \succ & M_2[x_2 := N]
\end{array}
$$

$+$ clausura contextual

Ejercicio: Demostrar la confluencia de $\succ$

Dos estrategias posibles:

1. Definir una reducción paralela $M \Rightarrow M'$ (entre $\succ$ y $\succ^*$) que tenga en cuenta las 5 reglas, y demostrar que cumple la propiedad del diamante
2. Demostrar que las 5 reglas son confluentes (cada una individualmente), y luego que conmutan de a dos (se estudiarán los correspondientes diagramas)

Sistema $\lambda^{\to,\times,+}$: tipado (1/2)

Contextos $\quad \Gamma, \Delta \quad ::= \quad x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \qquad (x_i \not\equiv x_j \text{ si } i \neq j)$

Definición (Relación de tipado $\Gamma \vdash M : A$)

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : A}\ \text{si } (x{:}A)\in\Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A \,.\, M : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \times B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \iota_1^{A,B}(M) : A + B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash \iota_2^{A,B}(M) : A + B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash N : A + B \qquad \Gamma, x_1 : A \vdash M_1 : C \qquad \Gamma, x_2 : B \vdash M_2 : C}{\Gamma \vdash \text{case } N \ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} : C}$$

Sistema $\lambda^{\rightarrow,\times,+}$: tipado (2/2)

Ejercicio:

(1) Demostrar los lemas básicos (variables libres, sustitutividad, debilitamiento)

(2) Enunciar y demostrar el lema de inversión:

1. Si $\Gamma \vdash x : C$, entonces ...
2. Si $\Gamma \vdash \lambda x : A \,.\, M : C$, entonces ...
3. Si $\Gamma \vdash MN : C$, entonces ...
4. Si $\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : C$, entonces ...
5. Si $\Gamma \vdash \pi_1(M) : C$, entonces ...
6. Si $\Gamma \vdash \pi_2(M) : C$, entonces ...
7. Si $\Gamma \vdash \iota_1^{A,B}(M) : C$, entonces ...
8. Si $\Gamma \vdash \iota_2^{A,B}(M) : C$, entonces ...
9. Si $\Gamma \vdash \mathrm{case}\ N\ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} : C$, entonces ...

(3) Deducir la propiedad de *subject reduction*

(4) Mismas preguntas para el sistema a la Curry (+ función de borrado)

Sistema $\lambda^{\to,\times,+}$: candidatos de reducibilidad (1/3)

- **SN** = conjunto de los términos fuertemente normalizantes (Curry)
- Los términos en forma canónica (o constructores) son los siguientes:

$$\lambda x\,.\,M \qquad \langle M, N\rangle \qquad \iota_1(M) \qquad \iota_2(M)$$

Un término neutro es un término que no está en forma canónica

Definición (Candidato de reducibilidad)

Un conjunto de términos $C \subseteq \Lambda$ (posiblemente abiertos) es un candidato de reducibilidad cuando cumple los siguientes criterios:

(CR1) $C \subseteq \mathbf{SN}$

(CR2) Si $M \in C$, entonces $\mathrm{Red}_1(M) \subseteq C$

(CR3) Si un término neutro M es tal que $\mathrm{Red}_1(M) \subseteq C$, entonces $M \in C$

Sistema $\lambda^{\rightarrow,\times,+}$: candidatos de reducibilidad (2/3)

Lema

Un candidato de reducibilidad C contiene todas las variables: $x \in C$

Demostración. Ejercicio.

Lema (Propiedades de expansión)

Dado un candidato de reducibilidad C:

1. Si $M[x := N] \in C$ y $N \in \mathbf{SN}$, entonces $(\lambda x\,.\,M)N \in C$
2. Si $M \in C$ y $N \in \mathbf{SN}$, entonces $\pi_1(\langle M, N\rangle) \in C$
3. Si $M \in \mathbf{SN}$ y $N \in C$, entonces $\pi_2(\langle M, N\rangle) \in C$
4. Si $M_1[x_1 := N] \in C$ y $N, M_2 \in \mathbf{SN}$, entonces $\text{case } \iota_1(N)\ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} \in C$
5. Si $M_2[x_2 := N] \in C$ y $N, M_1 \in \mathbf{SN}$, entonces $\text{case } \iota_2(N)\ \{\iota_1(x_1) \mapsto M_1 \mid \iota_2(x_2) \mapsto M_2\} \in C$

Demostración. Ejercicio.

Sistema $\lambda^{\rightarrow,\times,+}$: candidatos de reducibilidad (3/3)

Lema (El candidato SN)

SN es un candidato de reducibilidad

Demostración. Ejercicio.

Definición (Flecha, producto y suma de conjuntos de términos)

Dados conjuntos de términos $C, D \subseteq \Lambda$, se definen:

$$
\begin{array}{rcl}
C \to D & := & \{M \in \Lambda \;:\; \forall N \in C,\;\; MN \in D\} \\
C \times D & := & \{M \in \Lambda \;:\; \pi_1(M) \in C \;\wedge\; \pi_2(M) \in D\} \\
C + D & := & \big\{M \in \Lambda \;:\; \forall M' \, (M \succ^* \iota_1(M') \;\Rightarrow\; M' \in C) \wedge \\
 & & \qquad\qquad\quad\; \forall M' \, (M \succ^* \iota_2(M') \;\Rightarrow\; M' \in D) \;\big\}
\end{array}
$$

Lema (Clausura de los candidatos por $\to$, $\times$ y $+$)

Si $C, D \subseteq \Lambda$ son candidatos de reducibilidad, entonces los conjuntos $C \to D$, $C \times D$ y $C + D$ también lo son

Demostración. Ejercicio.

Sistema $\lambda^{\to,\times,+}$: interpretación de los tipos y contextos

Definición (Interpretación de los tipos)

A cada tipo A se asocia el candidato de reducibilidad $[\![A]\!]$ definido por:

$$\begin{array}{rcl} [\![\alpha]\!] & := & \mathbf{SN} \\ [\![A \to B]\!] & := & [\![A]\!] \to [\![B]\!] \\ [\![A \times B]\!] & := & [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\ [\![A + B]\!] & := & [\![A]\!] + [\![B]\!] \end{array}$$

Definición (Interpretación de los contextos)

$$[\![\Gamma]\!] := \Big\{ \sigma \text{ sustitución } : \begin{array}{l} \mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\Gamma) \quad \text{y} \\ \sigma(x) \in [\![A]\!] \text{ para todo } (x : A) \in \Gamma \end{array} \Big\}$$

Sistema $\lambda^{\to,\times,+}$: normalización fuerte

Proposición (Invariante de normalización)

Si $\Gamma \vdash M : A$, entonces $M[\sigma] \in [\![A]\!]$ para todo $\sigma \in [\![\Gamma]\!]$

Demostración. Ejercicio.

Teorema (Normalización fuerte)

Si $\Gamma \vdash M : A$, entonces M es fuertemente normalizante

Demostración. Ejercicio.

Corolarios

En el sistema $\lambda^{\to,\times,+}$ (a la Church o a la Curry):

1. Todo término tipado tiene forma normal
2. Dos términos tipados (y de mismo tipo) son convertibles si y sólo si tienen la misma forma normal
3. La relación $M_1 \cong M_2$ (entre términos de mismo tipo) es decidible