Práctico 1: Derivaciones en el sistema NJ

Ejercicio 1 (Unicidad de las construcciones lógicas)**.** — El objetivo de este ejercicio es mostrar que las reglas de cada conectiva (resp. cada cuantificador) *determinan* dicha conectiva (resp. dicho cuantificador). Para ello, se extiende el lenguaje de las fórmulas

$$\begin{array}{rl} A, B \ ::= & p(t_1, \ldots, t_k) \\ & \mid\ t_1 = t_2 \ \mid\ \top \ \mid\ \bot \ \mid\ A \wedge B \ \mid\ A \vee B \ \mid\ A \Rightarrow B \ \mid\ \forall x A \ \mid\ \exists x A \\ & \mid\ t_1 =^* t_2 \ \mid\ \top^* \ \mid\ \bot^* \ \mid\ A \wedge^* B \ \mid\ A \vee^* B \ \mid\ A \Rightarrow^* B \ \mid\ \forall^* x A \ \mid\ \exists^* x A \end{array}$$

duplicando cada construcción lógica ($=$, $\top$, $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$) con una versión "estrellada" ($=^*$, $\top^*$, $\bot^*$, $\wedge^*$, $\vee^*$, $\Rightarrow^*$, $\forall^*$, $\exists^*$). Del mismo modo, se duplican todas las reglas de introducción y de eliminación del sistema NJ con versiones estrelladas:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow^* B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow^* B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \qquad \cdots \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t =^* t} \qquad \frac{\Gamma \vdash t =^* u \quad \Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash A[x := u]}$$

(por supuesto, no se duplica la regla axioma). Se escribe NJ* el resultante sistema.

(1) En el sistema NJ*, derivar las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} \top^* & \Leftrightarrow & \top & \qquad & A \wedge^* B & \Leftrightarrow & A \wedge B & \qquad & \forall^* x A & \Leftrightarrow & \forall x A \\ \bot^* & \Leftrightarrow & \bot & & A \vee^* B & \Leftrightarrow & A \vee B & & \exists^* x A & \Leftrightarrow & \exists x A \\ t_1 =^* t_2 & \Leftrightarrow & t_1 = t_2 & & (A \Rightarrow^* B) & \Leftrightarrow & (A \Rightarrow B) & & & & \end{array}$$

(2) Verificar que en todas las equivalencias anteriores, se puede remplazar la conectiva $\Leftrightarrow$ por su versión estrellada $\Leftrightarrow^*$, definida por: $A \Leftrightarrow^* B \ :\equiv\ (A \Rightarrow^* B) \wedge^* (B \Rightarrow^* A)$.

(3) Concluir que las construcciones estrelladas no sirven para nada.

Razonamiento por inducción sobre (el tamaño de) una derivación Dada una derivación d en un sistema de deducción cualquiera, se llama *tamaño* de d y se escribe $|d|$ al número de pasos de deducción (es decir: al número de «rayas de inferencia») en d. La herramienta fundamental para establecer una propiedad sobre las derivaciones (y luego: sobre los juicios derivables) es el razonamiento por inducción (fuerte) sobre (el tamaño de) la derivación.

Ejercicio 2 (Regla admisible de sustitución)**.** El objetivo de este ejercicio es dar una prueba *correcta* del carácter admisible de la regla de sustitución en el sistema NJ:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma[x := u] \vdash A[x := u]}$$

Para ello, tenemos que demostrar el siguiente lema

Lema (Sustitutividad).
Para toda derivación $d : (\Gamma \vdash A)$ (en NJ), para toda variable x y para todo término u, existe una derivación $d' : (\Gamma[x := u] \vdash A[x := u])$ (en NJ) tal que $|d'| = |d|$.

cuya demostración tiene la siguiente forma:

Demostración. Se construye la derivación d' por inducción sobre el tamaño de la derivación d, distinguiendo los casos en función de la última regla aplicada:

- Regla axioma: La derivación d es de la forma

$$d \equiv \left\{ \overline{\Gamma \vdash A}^{\text{(axioma)}} \qquad\qquad \text{con } A \in \Gamma\,. \right.$$

En este caso, se define la derivación d' por:

$$d' :\equiv \left\{ \overline{\Gamma[x := u] \vdash A[x := u]}^{\text{(axioma)}} \qquad \text{pues } A[x := u] \in \Gamma[x := u]\,, \right.$$

observando que $|d'| = |d| = 1$.

- Regla ($\Rightarrow$-intro): La derivación d es de la forma

$$d \equiv \left\{ \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, d_1 \\ \Gamma, A \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow\text{-intro}) \right.$$

En este caso, sabemos por (IH) que existe una derivación

$$\begin{array}{c} \vdots\, d_1' \\ \Gamma[x := u], A[x := u] \vdash B[x := u] \end{array}$$

tal que $|d_1'| = |d_1|$. Luego se define la derivación d' por:

$$d' :\equiv \left\{ \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, d_1' \\ \Gamma[x := u], A[x := u] \vdash B[x := u] \end{array}}{\Gamma[x := u] \vdash \underbrace{A[x := u] \Rightarrow B[x := u]}_{(A \Rightarrow B)[x:=u]}}\ (\Rightarrow\text{-intro}) \right.$$

observando que $|d'| = |d_1'| + 1 =_{\text{(IH)}} |d_1| + 1 = |d|$.

- $(\cdots)$
- Regla (=-elim): La derivación d es de la forma

$$d \equiv \left\{ \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, d_1 \\ \Gamma \vdash t = u \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots\, d_2 \\ \Gamma \vdash A[x := t] \end{array}}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=\text{-elim}) \right.$$

En este caso...

(1) Completar la demostración anterior, tratando con cuidado los 17 casos.

(2) Verificar con cuidado las condiciones laterales en las derivaciones construidas en los casos de las reglas ($\forall$-intro) y ($\exists$-elim). Modificar la prueba en caso de que se necesite.

(3) Verificar con cuidado los problemas de conmutación de sustituciones

$$A[x := \cdots][y := \cdots] \equiv A[y := \cdots][x := \cdots]$$

en los casos correspondientes a las reglas ($\forall$-elim), ($\exists$-intro) y (=-elim).

Ejercicio 3 (Regla admisible de debilitamiento generalizado)**.** El objetivo de este ejercicio es demostrar el carácter admisible de la regla de debilitamiento generalizado en el sistema NJ:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma' \vdash A}\ {\scriptstyle \Gamma \subseteq \Gamma'}$$

donde la inclusión $\Gamma' \subseteq \Gamma$ expresa que toda fórmula que ocurre en Γ también ocurre en Γ' (sin tener en cuenta ni el orden, ni el número de ocurrencias en Γ y Γ').

(1) Redactar la demostración en el mismo estilo que en el ejercicio anterior, tratando con cuidado los 17 casos. ¿Cuál es precisamente la hipótesis de inducción?

(2) ¿Qué pasa en el caso donde la derivación d es de la forma

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{c} \vdots\ d_1 \\ \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall\text{-intro}) \end{array}\right. \qquad \text{con } x \notin FV(\Gamma)$$

mientras $x \in FV(\Gamma')$? ¿Cómo arreglar este problema?

(3) Misma pregunta con la regla ($\exists$-elim).

Ejercicio 4 (Esqueleto de una derivación)**.** Se llama *esqueleto (de derivación)* a todo árbol de derivación sobre el único juicio «•» cuyas inferencias son etiquetadas por las reglas del sistema NJ (con el número correcto de premisas), por ejemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bullet}\,(\text{axioma}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\bullet}\,(\text{axioma}) \quad \dfrac{}{\bullet}\,(\text{=-intro})}{\bullet}\,(\text{=-elim})}{\bullet}\,(\Rightarrow\text{-elim})}{\bullet}\,(\Rightarrow\text{-intro})}{\bullet}\,(\forall\text{-intro})$$

A cada derivación d del sistema NJ se asocia su esqueleto d^{sk}, obtenido remplazando todos los secuentes que figuran en d por el juicio «•».

(1) Verificar que la derivación $d' : (\Gamma[x := u] \vdash A[x := u])$ construida en el Ejercicio 2 tiene el mismo esqueleto que la derivación $d : (\Gamma \vdash A)$.

(2) Misma pregunta con la derivación d' del Ejercicio 3.