Práctico 2: Elementos de reescritura

Observación: La terminología y las notaciones de este práctico vienen de:
F. Baader, T. Nipkow, *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

Se llama *sistema de reducción abstracto* (ARS) a todo par $(A, \to)$ formado por un conjunto A equipado con una relación binaria $(\to) \subseteq A \times A$. Dado un sistema de reducción abstracto $(A, \to)$, se definen las siguientes relaciones sobre el conjunto A:

$\stackrel{0}{\to}$	$:=$	$\{(x, x) : x \in A\}$	**identidad**
$\stackrel{i+1}{\to}$	$:=$	$\stackrel{i}{\to} \circ \to$	**reducción en $i + 1$ pasos**
$\stackrel{+}{\to}$	$:=$	$\bigcup_{i>0} \stackrel{i}{\to}$	**clausura transitiva**
$\stackrel{*}{\to}$	$:=$	$\stackrel{+}{\to} \cup \stackrel{0}{\to}$	**clausura reflexiva-transitiva**
$\stackrel{=}{\to}$	$:=$	$\to \cup \stackrel{0}{\to}$	**clausura reflexiva**
$\leftarrow$	$:=$	$(\to)^{-1}$	**relación inversa**
$\leftrightarrow$	$:=$	$\to \cup \leftarrow$	**clausura simétrica**
$\stackrel{+}{\leftrightarrow}$	$:=$	$(\leftrightarrow)^{+}$	**clausura simétrica-transitiva**
$\stackrel{*}{\leftrightarrow}$	$:=$	$(\leftrightarrow)^{*}$	**clausura reflexiva-simétrica-transitiva**

Dado un elemento $x \in A$, se dice que:

- x es *reducible* cuando existe $y \in A$ tal que $x \to y$;
- x es *en forma normal* (notación: $x \not\to$) cuando x no es reducible;
- y es *una forma normal de* x cuando $x \stackrel{*}{\to} y \not\to$.
  Cuando la forma normal de x existe y es única, se escribe $\downarrow x$;
- y es un *sucesor directo* de x cuando $x \to y$;
- y es un *sucesor* de x cuando $x \stackrel{+}{\to} y$.

Además, se dice que la relación de reducción $\to$ es:

- *normalizante* cuando todo elemento $y \in x$ tiene (al menos) una forma normal;
- *fuertemente normalizante* cuando no existe ninguna sucesión infinita de reducciones $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \cdots$, o de modo equivalente, cuando la relación $\leftarrow$ está bien fundada;
- *localmente confluente* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$:
  las condiciones $x \to y_1$ y $x \to y_2$ implican que $y_1 \stackrel{*}{\to} z$ e $y_2 \stackrel{*}{\to} z$ para algún $z \in A$.
- *semi confluente* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$:
  las condiciones $x \to y_1$ y $x \stackrel{*}{\to} y_2$ implican que $y_1 \stackrel{*}{\to} z$ e $y_2 \stackrel{*}{\to} z$ para algún $z \in A$.
- *confluente* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$:
  las condiciones $x \stackrel{*}{\to} y_1$ y $x \stackrel{*}{\to} y_2$ implican que $y_1 \stackrel{*}{\to} z$ e $y_2 \stackrel{*}{\to} z$ para algún $z \in A$.
- *Church-Rosser* cuando para todos $x_1, x_2 \in A$:
  la condición $x_1 \stackrel{*}{\leftrightarrow} x_2$ implica que $x_1 \stackrel{*}{\to} y$ e $x_2 \stackrel{*}{\to} y$ para algún $y \in A$.
- *convergente* cuando $\to$ es confluente y fuertemente normalizante.

En los ejercicios que siguen, se trabaja con un sistema de reducción abstracto $(A, \to)$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y_1 \arrow[dr, dotted, "*"'] & & y_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
 & z &
\end{tikzcd}
$$

Confluencia local

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \arrow[dl] \arrow[dr, "*"] & \\
y_1 \arrow[dr, dotted, "*"'] & & y_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
 & z &
\end{tikzcd}
$$

Semi-confluencia

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
y_1 \arrow[dr, dotted, "*"'] & & y_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
 & z &
\end{tikzcd}
$$

Confluencia

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
x_1 \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"'] & & x_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
 & y &
\end{tikzcd}
$$

Church-Rosser

Figura 1: Nociones de confluencia

Ejercicio 1 (Confluencia, semi-confluencia y Church-Rosser)**.**

(1) Demostrar que las siguientes tres propiedades son equivalentes:
   (a) $\to$ es semi-confluente;
   (b) $\to$ es confluente;
   (c) $\to$ es Church-Rosser.

(2) Demostrar que si $\to$ es confluente, entonces la forma normal de cualquier elemento $x \in A$, cuando existe, es única.

(3) Demostrar que si todo $x \in A$ tiene forma normal única, entonces $\to$ es confluente.

Ejercicio 2 (Confluencia local y lema de Newman)**.**

(1) Hallar un ARS $(A, \to)$ localmente confluente pero no confluente.
   (a) Dar un ejemplo donde A es finito (obs.: la relación $\to$ puede tener ciclos).
   (b) Dar otro ejemplo donde la relación $\to$ no tiene ciclos (obs.: A puede ser infinito).

(2) Demostrar el lema de Newman:

   Lema (Newman). *Toda relación $\to$ fuertemente normalizante y localmente confluente es confluente (y por lo tanto es convergente).*

   Sugerencia: Razonar por inducción bien fundada sobre la relación $y \leftarrow x$.

Ejercicio 3 (Diamante y confluencia fuerte)**.** Se dice que la relación $\to$ cumple la propiedad del *diamante* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$, las condiciones $x \to y_1$ y $x \to y_2$ implican que $y_1 \to$ e $y_2 \to z$ para algún $z \in A$:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y_1 \arrow[dr, dotted] & & y_2 \arrow[dl, dotted] \\
 & z &
\end{tikzcd}
$$

Se nota que la relación $\to$ es confluente si y sólo si su clausura reflexiva-transitiva $\xrightarrow{*}$ cumple la propiedad del diamante.

(1) Demostrar que si $\to$ cumple la propiedad del diamante, entonces es confluente.

En la práctica, es poco frecuente que la relación $\to$ cumpla la propiedad del diamante, pero es mucho más frecuente que su clausura reflexiva $\xrightarrow{=}$ cumpla dicha propiedad.

(2) Deducir que si $\xrightarrow{=}$ cumple la propiedad del diamante, entonces $\to$ es confluente.

Más generalmente, se dice que la relación $\to$ es *fuertemente confluente* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$, las condiciones $x \to y_1$ y $x \to y_2$ implican que $y_1 \overset{=}{\to} z$ e $y_2 \overset{*}{\to} z$ para algún $z \in A$. Se observa que por simetría (con respecto a y_1 e y_2), las mismas condiciones también implican que $y_1 \overset{*}{\to} z'$ e $y_2 \overset{=}{\to} z'$ para algún $z' \in A$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y_1 \arrow[dr, dotted, "="'] & & y_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
 & z &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y_1 \arrow[dr, dotted, "*"'] & & y_2 \arrow[dl, dotted, "="] \\
 & z' &
\end{tikzcd}
$$

(3) Demostrar que si $\to$ es fuertemente confluente, entonces es confluente.

Relaciones conmutantes Dadas relaciones $\to_1$ y $\to_2$ sobre un mismo conjunto A, se dice que $\to_1$ y $\to_2$ *conmutan* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$, las condiciones $x \overset{*}{\to}_1 y_1$ y $x \overset{*}{\to}_2 y_2$ implican que $y_1 \overset{*}{\to}_2 z$ e $y_2 \overset{*}{\to}_1 z$ para algún $z \in A$:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & x \arrow[dl, "*"', "1"] \arrow[dr, "*", "2"'] & \\
y_1 \arrow[dr, dotted, "2", "*"'] & & y_2 \arrow[dl, dotted, "1"', "*"] \\
 & z &
\end{tikzcd}
$$

Se nota que una relación $\to$ es confluente si y sólo si conmuta consigo misma.

Ejercicio 4 (Unión de relaciones confluentes)**.**

(1) Hallar un ejemplo de dos relaciones confluentes $\to_1$ y $\to_2$ sobre un mismo conjunto A cuya unión $\to_1 \cup \to_2$ no es confluente.

(2) Demostrar que si dos relaciones confluentes $\to_1$ y $\to_2$ sobre un mismo conjunto A conmutan, entonces su unión $\to_1 \cup \to_2$ también es confluente.

(3) Definir una noción de conmutación fuerte análoga a la noción de confluencia fuerte del Ejercicio 3, y demostrar que dos relaciones fuertemente conmutantes conmutan.

Términos de la Aritmética computacional En esta parte, se considera el conjunto T de los términos de la Aritmética computacional definido por la gramática:

Términos $\quad t, u \in T \quad ::= \quad x \quad | \quad 0 \quad | \quad s(t) \quad | \quad \mathrm{pred}(t) \quad | \quad t + u \quad | \quad t \times u$

Se equipa el conjunto T con la relación binaria $t \to t'$ definida inductivamente por las 12 reglas:

$$
\frac{}{\mathrm{pred}(0) \ \to \ 0}\ \text{(PredZero)} \qquad \frac{}{\mathrm{pred}(s(t)) \ \to \ t}\ \text{(PredSucc)}
$$

$$
\frac{}{t + 0 \ \to \ t}\ \text{(AddZero)} \qquad \frac{}{t + s(u) \ \to \ s(t + u)}\ \text{(AddSucc)}
$$

$$
\frac{}{t \times 0 \ \to \ 0}\ \text{(MulZero)} \qquad \frac{}{t \times s(u) \ \to \ (t \times u) + t}\ \text{(MulSucc)}
$$

$$
\frac{t \to t'}{s(t) \ \to \ s(t')}\ \text{(SuccCtx)} \qquad \frac{t \to t'}{\mathrm{pred}(t) \ \to \ \mathrm{pred}(t')}\ \text{(PredCtx)}
$$

$$
\frac{t_1 \to t_1'}{t_1 + t_2 \ \to \ t_1' + t_2}\ (\text{AddCtx}_1) \qquad \frac{t_2 \to t_2'}{t_1 + t_2 \ \to \ t_1 + t_2'}\ (\text{AddCtx}_2)
$$

$$
\frac{t_1 \to t_1'}{t_1 \times t_2 \ \to \ t_1' \times t_2}\ (\text{MulCtx}_1) \qquad \frac{t_2 \to t_2'}{t_1 \times t_2 \ \to \ t_1 \times t_2'}\ (\text{MulCtx}_2)
$$

Ejercicio 5 (Propiedades de la relación $\to$)**.** Se demostrará cada ítem, razonando por inducción sobre la derivación de $t \to t'$, y detallando cada uno de los correspondientes 12 casos.

(1) Demostrar que si $t \to t'$, entonces $FV(t') \subseteq FV(t)$.

(2) Demostrar que si $t \to t'$, entonces $t[x := u] \to t'[x := u]$ (para todos x, u).

A cada término t se asocia un peso $\boldsymbol{w}(t) \in \mathbb{N}^*$ definido por:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\boldsymbol{w}(x) & = & 1 & \boldsymbol{w}(0) & = & 1 \\
\boldsymbol{w}(s(t)) & = & \boldsymbol{w}(t) + 1 & \boldsymbol{w}(\mathrm{pred}(t)) & = & \boldsymbol{w}(t) + 1 \\
\boldsymbol{w}(t + u) & = & \boldsymbol{w}(t) + 2\boldsymbol{w}(u) & \boldsymbol{w}(t \times u) & = & 3\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}(u)
\end{array}$$

(3) Demostrar que si $t \to t'$, entonces $\boldsymbol{w}(t) > \boldsymbol{w}(t')$.
Deducir que la relación $\to$ es fuertemente normalizante.

Ejercicio 6 (Estructura de las formas normales)**.** Se consideran las dos formas de términos **neut** ("neutros") y **norm** ("normales") definidas por las gramáticas:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{neut} & ::= & x \quad | \quad \mathrm{pred}(\mathbf{neut}) \quad | \quad \mathbf{norm} + \mathbf{neut} \quad | \quad \mathbf{norm} \times \mathbf{neut} \\
\mathbf{norm} & ::= & \mathbf{neut} \quad | \quad 0 \quad | \quad s(\mathbf{norm})
\end{array}$$

(1) Demostrar que un término t es en forma normal si y sólo si está en la categoría **norm**.
Se detallarán las inducciones usadas.

(2) Deducir que los términos cerrados en forma normal son los enteros de Peano.

Ejercicio 7 (Confluencia de la relación $\to$)**.**

(1) Demostrar que la relación $\to$ es localmente confluente:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
t'_1 \arrow[dr, dotted, "*"'] & & t'_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
& t'' &
\end{tikzcd}$$

Sugerencia: Razonar por inducción sobre las derivaciones de $t \to t'_1$ y $t \to t'_2$, tratando cada uno de los $12^2 = 144$ pares de reglas. ¡Cuidado! Hay muchos casos imposibles.

(2) Deducir de lo anterior que la relación $\to$ es convergente.