

Práctico 2: Elementos de reescritura

Observación: La terminología y las notaciones de este práctico vienen de:

F. Baader, T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press, 1998.

Se llama *sistema de reducción abstracto* (ARS) a todo par (A, \rightarrow) formado por un conjunto A equipado con una relación binaria $(\rightarrow) \subseteq A \times A$. Dado un sistema de reducción abstracto (A, \rightarrow) , se definen las siguientes relaciones sobre el conjunto A :

$\xrightarrow{0}$	$:= \{(x, x) : x \in A\}$	identidad
$\xrightarrow{i+1}$	$:= \xrightarrow{i} \circ \rightarrow$	reducción en $i + 1$ pasos
$\xrightarrow{+}$	$:= \bigcup_{i>0} \xrightarrow{i}$	clausura transitiva
$\xrightarrow{*}$	$:= \xrightarrow{+} \cup \xrightarrow{0}$	clausura reflexiva-transitiva
$\xrightarrow{\equiv}$	$:= \rightarrow \cup \xrightarrow{0}$	clausura reflexiva
$\xleftarrow{-}$	$:= (\rightarrow)^{-1}$	relación inversa
\leftrightarrow	$:= \rightarrow \cup \leftarrow$	clausura simétrica
$\xleftrightarrow{+}$	$:= (\leftrightarrow)^+$	clausura simétrica-transitiva
$\xleftrightarrow{*}$	$:= (\leftrightarrow)^*$	clausura reflexiva-simétrica-transitiva

Dado un elemento $x \in A$, se dice que:

- x es *reducible* cuando existe $y \in A$ tal que $x \rightarrow y$;
 - x es *en forma normal* (notación: $x \not\rightarrow$) cuando x no es reducible;
 - y es *una forma normal de x* cuando $x \xrightarrow{*} y \not\rightarrow$.
- Cuando la forma normal de x existe y es única, se escribe $\downarrow x$;
- y es un *sucesor directo* de x cuando $x \rightarrow y$;
 - y es un *sucesor* de x cuando $x \xrightarrow{+} y$.

Además, se dice que la relación de reducción \rightarrow es:

- *normalizante* cuando todo elemento $y \in x$ tiene (al menos) una forma normal;
- *fueramente normalizante* cuando no existe ninguna sucesión infinita de reducciones $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$, o de modo equivalente, cuando la relación \leftarrow está bien fundada;
- *localmente confluyente* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$:
las condiciones $x \rightarrow y_1$ y $x \rightarrow y_2$ implican que $y_1 \xrightarrow{*} z$ e $y_2 \xrightarrow{*} z$ para algún $z \in A$.
- *semi confluyente* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$:
las condiciones $x \rightarrow y_1$ y $x \xrightarrow{*} y_2$ implican que $y_1 \xrightarrow{*} z$ e $y_2 \xrightarrow{*} z$ para algún $z \in A$.
- *confluyente* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$:
las condiciones $x \xrightarrow{*} y_1$ y $x \xrightarrow{*} y_2$ implican que $y_1 \xrightarrow{*} z$ e $y_2 \xrightarrow{*} z$ para algún $z \in A$.
- *Church-Rosser* cuando para todos $x_1, x_2 \in A$:
la condición $x_1 \xleftrightarrow{*} x_2$ implica que $x_1 \xrightarrow{*} y$ e $x_2 \xrightarrow{*} y$ para algún $y \in A$.
- *convergente* cuando \rightarrow es confluyente y fueramente normalizante.

En los ejercicios que siguen, se trabaja con un sistema de reducción abstracto (A, \rightarrow) .

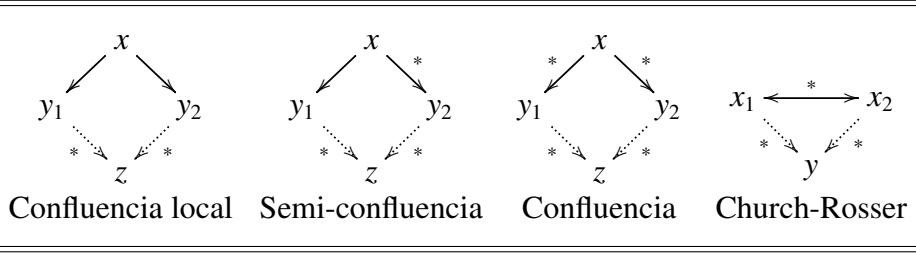


Figura 1: Nociones de confluencia

Ejercicio 1 (Confluencia, semi-confluencia y Church-Rosser).

- (1) Demostrar que las siguientes tres propiedades son equivalentes:
 - (a) \rightarrow es semi-confluyente;
 - (b) \rightarrow es confluyente;
 - (c) \rightarrow es Church-Rosser.
- (2) Demostrar que si \rightarrow es confluyente, entonces la forma normal de cualquier elemento $x \in A$, cuando existe, es única.
- (3) Demostrar que si todo $x \in A$ tiene forma normal única, entonces \rightarrow es confluyente.

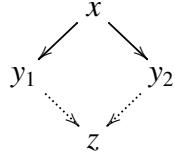
Ejercicio 2 (Confluencia local y lema de Newman).

- (1) Hallar un ARS (A, \rightarrow) localmente confluyente pero no confluyente.
 - (a) Dar un ejemplo donde A es finito (obs.: la relación \rightarrow puede tener ciclos).
 - (b) Dar otro ejemplo donde la relación \rightarrow no tiene ciclos (obs.: A puede ser infinito).
- (2) Demostrar el lema de Newman:

Lema (Newman). *Toda relación \rightarrow fuertemente normalizante y localmente confluyente es confluyente (y por lo tanto es convergente).*

Sugerencia: Razonar por inducción bien fundada sobre la relación $y \leftarrow x$.

Ejercicio 3 (Diamante y confluencia fuerte). Se dice que la relación \rightarrow cumple la propiedad del *diamante* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$, las condiciones $x \rightarrow y_1$ y $x \rightarrow y_2$ implican que $y_1 \rightarrow z$ e $y_2 \rightarrow z$ para algún $z \in A$:



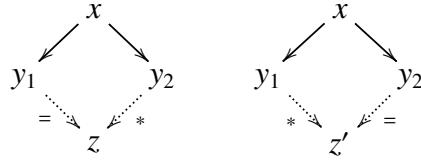
Se nota que la relación \rightarrow es confluyente si y sólo si su clausura reflexiva-transitiva $\overset{*}{\rightarrow}$ cumple la propiedad del diamante.

- (1) Demostrar que si \rightarrow cumple la propiedad del diamante, entonces es confluyente.

En la práctica, es poco frecuente que la relación \rightarrow cumpla la propiedad del diamante, pero es mucho más frecuente que su clausura reflexiva $\overset{=}{\rightarrow}$ cumpla dicha propiedad.

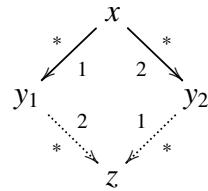
- (2) Deducir que si $\overset{=}{\rightarrow}$ cumple la propiedad del diamante, entonces \rightarrow es confluyente.

Más generalmente, se dice que la relación \rightarrow es *fuertemente confluente* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$, las condiciones $x \rightarrow y_1$ y $x \rightarrow y_2$ implican que $y_1 \xrightarrow{*} z$ e $y_2 \xrightarrow{*} z$ para algún $z \in A$. Se observa que por simetría (con respecto a y_1 e y_2), las mismas condiciones también implican que $y_1 \xrightarrow{*} z'$ e $y_2 \xrightarrow{*} z'$ para algún $z' \in A$.



(3) Demostrar que si \rightarrow es fuertemente confluente, entonces es confluente.

Relaciones comutantes Dadas relaciones \rightarrow_1 y \rightarrow_2 sobre un mismo conjunto A , se dice que \rightarrow_1 y \rightarrow_2 *comutan* cuando para todos $x, y_1, y_2 \in A$, las condiciones $x \xrightarrow{*_1} y_1$ y $x \xrightarrow{*_2} y_2$ implican que $y_1 \xrightarrow{*_2} z$ e $y_2 \xrightarrow{*_1} z$ para algún $z \in A$:



Se nota que una relación \rightarrow es confluente si y sólo si comuta consigo misma.

Ejercicio 4 (Unión de relaciones confluentes).

- (1) Hallar un ejemplo de dos relaciones confluentes \rightarrow_1 y \rightarrow_2 sobre un mismo conjunto A cuya unión $\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$ no es confluente.
- (2) Demostrar que si dos relaciones confluentes \rightarrow_1 y \rightarrow_2 sobre un mismo conjunto A comutan, entonces su unión $\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$ también es confluente.
- (3) Definir una noción de comutación fuerte análoga a la noción de confluencia fuerte del Ejercicio 3, y demostrar que dos relaciones fuertemente comutantes comutan.

Términos de la Aritmética computacional En esta parte, se considera el conjunto T de los términos de la Aritmética computacional definido por la gramática:

Términos $t, u \in T ::= x \mid 0 \mid s(t) \mid \text{pred}(t) \mid t + u \mid t \times u$

Se equipa el conjunto T con la relación binaria $t \rightarrow t'$ definida inductivamente por las 12 reglas:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\text{pred}(0) \rightarrow 0}{t + 0 \rightarrow t} \text{ (AddZero)} \quad \frac{\text{pred}(s(t)) \rightarrow t}{t + s(u) \rightarrow s(t + u)} \text{ (AddSucc)} \\
 \frac{t \times 0 \rightarrow 0}{t \times s(u) \rightarrow (t \times u) + t} \text{ (MulZero)} \quad \frac{t \rightarrow t'}{\text{pred}(t) \rightarrow \text{pred}(t')} \text{ (PredCtx)} \\
 \frac{s(t) \rightarrow s(t')}{t_1 + t_2 \rightarrow t'_1 + t_2} \text{ (SuccCtx)} \quad \frac{t_2 \rightarrow t'_2}{t_1 + t_2 \rightarrow t_1 + t'_2} \text{ (AddCtx}_2\text{)} \\
 \frac{t_1 \rightarrow t'_1}{t_1 \times t_2 \rightarrow t'_1 \times t_2} \text{ (MulCtx}_1\text{)} \quad \frac{t_2 \rightarrow t'_2}{t_1 \times t_2 \rightarrow t_1 \times t'_2} \text{ (MulCtx}_2\text{)}
 \end{array}$$

Ejercicio 5 (Propiedades de la relación \rightarrow). Se demostrará cada ítem, razonando por inducción sobre la derivación de $t \rightarrow t'$, y detallando cada uno de los correspondientes 12 casos.

- (1) Demostrar que si $t \rightarrow t'$, entonces $FV(t') \subseteq FV(t)$.
- (2) Demostrar que si $t \rightarrow t'$, entonces $t[x := u] \rightarrow t'[x := u]$ (para todos x, u).

A cada término t se asocia un peso $w(t) \in \mathbb{N}^*$ definido por:

$$\begin{array}{ll} w(x) = 1 & w(0) = 1 \\ w(s(t)) = w(t) + 1 & w(\text{pred}(t)) = w(t) + 1 \\ w(t + u) = w(t) + 2w(u) & w(t \times u) = 3w(t)w(u) \end{array}$$

- (3) Demostrar que si $t \rightarrow t'$, entonces $w(t) > w(t')$.
Deducir que la relación \rightarrow es fuertemente normalizante.

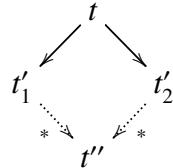
Ejercicio 6 (Estructura de las formas normales). Se consideran las dos formas de términos **neut** (“neutros”) y **norm** (“normales”) definidas por las gramáticas:

$$\begin{array}{l} \text{neut} ::= x \mid \text{pred(neut)} \mid \text{norm} + \text{neut} \mid \text{norm} \times \text{neut} \\ \text{norm} ::= \text{neut} \mid 0 \mid s(\text{norm}) \end{array}$$

- (1) Demostrar que un término t es en forma normal si y sólo si está en la categoría **norm**.
Se detallarán las inducciones usadas.
- (2) Deducir que los términos cerrados en forma normal son los enteros de Peano.

Ejercicio 7 (Confluencia de la relación \rightarrow).

- (1) Demostrar que la relación \rightarrow es localmente confluente:



Sugerencia: Razonar por inducción sobre las derivaciones de $t \rightarrow t'_1$ y $t \rightarrow t'_2$, tratando cada uno de los $12^2 = 144$ pares de reglas. ¡Cuidado! Hay muchos casos imposibles.

- (2) Deducir de lo anterior que la relación \rightarrow es convergente.