Práctico 3: Aritmética y funciones recursivas primitivas

La función de Ackermann La *función de Ackermann* $\mathrm{ack} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ está definida por:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ack}(0,n) & = & n+1 \\ \mathrm{ack}(m+1,0) & = & \mathrm{ack}(m,1) \\ \mathrm{ack}(m+1,n+1) & = & \mathrm{ack}(m,\mathrm{ack}(m+1,n)) \end{array} \qquad (n,m \in \mathbb{N})$$

Ejercicio 1 (Propiedades de la función de Ackermann)**.**

(1) Justificar por qué la función de Ackermann está bien definida en $\mathbb{N}^2$

(2) Verificar que la función de Ackermann cumple las siguientes propiedades:

(2.1) $\mathrm{ack}(1,m) = m+2$ (para todo $m \in \mathbb{N}$).

(2.2) $\mathrm{ack}(2,m) = 2m+3$ (para todo $m \in \mathbb{N}$).

(2.3) $n < A(m,n)$ (para todos $m,n \in \mathbb{N}$).

(2.4) $A(m,n) < A(m,n+1)$ (para todos $m,n \in \mathbb{N}$).

(2.5) $A(m,n+1) \le A(m+1,n)$ (para todos $m,n \in \mathbb{N}$).

(2.6) $A(m,n) < A(m+1,n)$ (para todos $m,n \in \mathbb{N}$).

(2.7) $A(m_1,A(m_2,n)) < A(m_1+m_2+2,y)$ (para todos $m_1,m_2,n \in \mathbb{N}$).

(2.8) Para todos $m_1,m_2 \in \mathbb{N}$, existe $m' \in \mathbb{N}$ tal que
$A(m_1,n) + A(m_2,n) < A(m',n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. Dadas funciones $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ($k \ge 1$), se dice que f *mayora* g cuando existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$g(n_1,\dots,n_k) \;<\; f(m,\mathrm{máx}(n_1,\dots,n_k)) \qquad (\text{para todo } (n_1,\dots,n_k) \in \mathbb{N}^k)$$

Usando las propiedades demostradas en el ejercicio anterior:

(1) Demostrar que una función $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ no se puede mayorar sí misma.

(2) Demostrar que todas las funciones iniciales $\boldsymbol{z} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{\pi}_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ($k \ge i \ge 1$) son mayoradas por la función de Ackermann.

(3) Demostrar que si $f_1,\dots,f_p : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ ($k,p \ge 1$) son mayoradas por la función de Ackermann, entonces su compuesta $g \circ (f_1,\dots,f_p)$ también lo es.

(4) Demostrar que si $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ ($k \ge 1$) son mayoradas por la función de Ackermann, entonces la función $\mathbf{rec}(f,g)$ también lo es.

(5) Deducir de lo anterior que todas las funciones recursivas primitivas son mayoradas por la función de Ackermann.

(6) Concluir que la función de Ackermann no es recursiva primitiva.

Fórmulas decidibles En lo siguiente se trabaja en las aritméticas intuicionista (HA) y clásica (PA) "con lenguaje amplio". Se recuerda que una fórmula $A(x_1,\dots,x_k)$ (con variables libres $x_1,\dots,x_k$) es *decidible* cuando $\mathrm{HA} \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_k (A(x_1,\dots,x_k) \vee \neg A(x_1,\dots,x_k))$.

Vimos en el teórico que todas las fórmulas con cuantificaciones acotadas son decidibles.

Ejercicio 3 (Representación de la función de Ackermann)**.**

(1) Construir una fórmula $\mathrm{Ack}(x, y, z)$ tal que:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{HA} \vdash \forall y \forall z\, (\mathrm{Ack}(0, y, z) \iff z = y + 1)\\
&\mathrm{HA} \vdash \forall x \forall z\, (\mathrm{Ack}(x + 1, 0, z) \iff \mathrm{Ack}(x, 1, z))\\
&\mathrm{HA} \vdash \forall x \forall y \forall z\, (\mathrm{Ack}(x + 1, y + 1, z) \iff \exists z'\, (\mathrm{Ack}(x + 1, y, z') \wedge \mathrm{Ack}(x, z', z)))
\end{aligned}$$

(2) Derivar: $\mathrm{HA} \vdash \forall x \forall y \exists! z\, \mathrm{Ack}(x, y, z)$.

(3) Deducir de lo anterior que la fórmula $\mathrm{Ack}(x, y, z)$ es decidible.

Ejercicio 4 (Propiedades de clausura de las fórmulas decidibles)**.**

(1) Demostrar que la fórmula (decidible) $\mathrm{Ack}(x, y, z)$ del ejercicio anterior no es equivalente (en HA) a ninguna fórmula con cuantificaciones acotadas.

(2) Demostrar que si $A(x_1, \ldots, x_k)$ y $B(x_1, \ldots, x_k)$ son decidibles, entonces las fórmulas

$$\begin{aligned}
&A(x_1, \ldots, x_k) \wedge B(x_1, \ldots, x_k)\\
&A(x_1, \ldots, x_k) \vee B(x_1, \ldots, x_k)\\
&A(x_1, \ldots, x_k) \Rightarrow B(x_1, \ldots, x_k)
\end{aligned}$$

son decidibles.

(2) Demostrar que si la fórmula $A(x, x_1, \ldots, x_k)$ es decidible, entonces para todo término $t(x_1, \ldots, x_k)$ las fórmulas

$$\begin{aligned}
&(\forall x \leq t(x_1, \ldots, x_k))A(x, x_1, \ldots, x_k)\\
&(\exists x \leq t(x_1, \ldots, x_k))A(x, x_1, \ldots, x_k)
\end{aligned}$$

son decidibles.

Traducciones de Gödel-Gentzen y de Friedman

Ejercicio 5 (Teorema de Glivenko)**.** En este ejercicio, se trabaja en un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$ cualquiera.

(1) Derivar las equivalencias $\neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg\neg B$ y $\neg\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$ en el sistema NJ. Se observará que la implicación $\neg\neg A \wedge \neg\neg B \Rightarrow \neg\neg(A \wedge B)$ tiene dos derivaciones distintas (sin cortes).

(2) Demostrar que para toda fórmula A del cálculo propositional (es decir: sin cuantificadores), la equivalencia $A^{\mathbf{G}} \Leftrightarrow \neg\neg A$ es derivable en el sistema NJ.

(3) Deducir de lo anterior el teorema de Glivenko:
Para toda fórmula A del cálculo proposicional: $\vdash_{\mathrm{NK}} A$ *sii* $\vdash_{\mathrm{NJ}} \neg\neg A$.

Ejercicio 6 (Teorías geométricas)**.** Una fórmula P es *positiva* cuando está construida a partir de las fórmulas atómicas sólo usando $\vee$, $\wedge$ y $\exists$. Una fórmula A es *geométrica* cuando es de la forma $A \equiv \forall x_1 \cdots \forall x_k\, (P \Rightarrow Q)$, donde P y Q son fórmulas positivas, y una *teoría geométrica* es cualquier conjunto (finito o infinito) $\mathcal{T}$ de fórmulas geométricas cerradas. Dadas una teoría $\mathcal{T}$ y una fórmula A géométricas, demonstrar que $\mathrm{PA} + \mathcal{T} \vdash A$ implica $\mathrm{HA} + \mathcal{T} \vdash A$.

Ejercicio 7 (Regla de Markov)**.** Se dice que una teoría $\mathscr{T}$ *cumple la regla de Markov* cuando

$$\mathscr{T} \vdash \forall x\, (A(x) \vee \neg A(x)) \quad \text{y} \quad \mathscr{T} \vdash \neg\neg\exists x\, A(x) \quad \text{implican} \quad \mathscr{T} \vdash \exists x\, A(x)$$

para cada fórmula $A(x)$ que sólo depende de la variable x. (Es obvio que cualquier teoría clásica cumple dicha regla.) Combinando el teorema de eliminación de cortes en HA con argumentos metateóricos clásicos (modelo estándar), demostrar que HA cumple la regla de Markov.