Práctico 4: Cálculo lambda y lógica combinatoria

Ejercicio 1 (Enteros de Church)**.** Se recuerda que los enteros de Church están definidos por

$$\overline{n} \;:\equiv\; \lambda f x\,.\,\underbrace{f\,(\cdots(f}_{n}\;x)\cdots) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Usando la codificación de Church:

(1) Implementar una función `ifz` tal que
$$\texttt{ifz}\,\overline{0} \xrightarrow{*} \lambda xy\,.\,x \qquad \text{y} \qquad \texttt{ifz}\,\overline{n} \xrightarrow{*} \lambda xy\,.\,y \quad (\text{para todo } n \geq 1).$$

(2) Implementar las funciones $n \mapsto n+1$ (sucesor) $(n,m) \mapsto n+m$ (suma), $(n,m) \mapsto nm$ (producto), $(n,m) \mapsto n^m$ (potencia).
¿Cuántos pasos de reducción necesita el cálculo de $n+1$, de $n+m$, de nm?

(3) Implementar las funciones $n \mapsto n \dot{-} 1$ (predecesor) y $(n,m) \mapsto n \dot{-} m$ (resta truncada).
¿Cuántos pasos de reducción necesita el cálculo de $n \dot{-} 1$?

(4) Dar dos implementaciones de la función $n \mapsto n!$ (factorial): una con combinador de punto fijo, y otra sin combinador de punto fijo. ¿Cuál es la más eficiente?

(5) Implementar la función de Ackermann, con y luego sin combinador de punto fijo.

Ejercicio 2 (Enteros de Scott)**.** Otra codificación estándar de los enteros naturales en el cálculo lambda está dada por los *enteros de Scott*, definidos por:

$$\hat{0} \;:\equiv\; \lambda xy\,.\,x \qquad \text{y} \qquad \widehat{n+1} \;:\equiv\; \lambda xy\,.\,y\,\hat{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Mismas preguntas (1), (2), (3) y (4) que para el ejercicio anterior, usando la codificación de Scott en lugar de la de Church. Se compararán las implementaciones.

Lógica combinatoria Los términos de la *lógica combinatoria* están definidos por:

TÉRMINOS $\qquad P, Q, R \quad ::= \quad x \;\mid\; \mathbf{K} \;\mid\; \mathbf{S} \;\mid\; PQ$

Se escribe CL al conjunto de los términos de la lógica combinatoria, también llamados *combinadores*. Como en el cálculo lambda, se considera que la aplicación $P\,Q$ es asociativa por la izquierda, y las notaciones $FV(P)$ (conjunto de variables libres) y $P[x := Q]$ (sustitución) están definidas del modo usual[1]. El conjunto CL de los términos está equipado con la relación de reducción $P \to P'$ definida como la clausura contextual de las dos reglas

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{K}\,P\,Q & \to & P \\ \mathbf{S}\,P\,Q\,R & \to & P\,R\,(Q\,R) \end{array}$$

(La relación $\to$ es obviamente compatible y sustitutiva.)

Pregunta inicial: ¿A cuáles términos lambda correspondrían los combinadores **K** y **S**?

[1] Pero sin problemas de α-conversión, debido a la ausencia de símbolo ligador.

Ejercicio 3 (Ejemplos de combinadores)**.**

(1) Escribiendo $\mathbf{I} := \mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K}$, verificar que $\mathbf{I}\,P \xrightarrow{+} P$ para todo $P \in \mathrm{CL}$.

(2) Definir combinadores $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{W}$ tales que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B}\,P\,Q\,R & \xrightarrow{+} & P\,(Q\,R) \\ \mathbf{C}\,P\,Q\,R & \xrightarrow{+} & P\,R\,Q \\ \mathbf{W}\,P\,Q & \xrightarrow{+} & P\,Q\,Q \end{array}$$

para todos $P, Q, R \in \mathrm{CL}$.

(3) Definir un combinador $\mathbf{\Delta}$ tal que $\mathbf{\Delta}\,P \xrightarrow{+} P\,P$ para todo $P \in \mathrm{CL}$. Deducir que $\mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \xrightarrow{+} \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta}$.

(4) Definir un combinador $\mathbf{Y}$ tal que $\mathbf{Y}\,P \cong P\,(\mathbf{Y}\,P)$ para todo $P \in \mathrm{CL}$.

Ejercicio 4 (Abstracción)**.** En lógica combinatoria, la operación $(x, P) \mapsto \lambda^* x\,.\,P$ de *abstracción* está definida por inducción sobre P mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rcll} \lambda^* x\,.\,x & := & \mathbf{I} & \\ \lambda^* x\,.\,P & := & \mathbf{K}\,P & \quad (\text{si } x \notin FV(P)) \\ \lambda^* x\,.\,PQ & := & \mathbf{S}\,(\lambda^* x\,.\,P)\,(\lambda^* x\,.\,Q) & \end{array}$$

(1) Verificar que $FV(\lambda^* x\,.\,P) = FV(P) \setminus \{x\}$ para todo $P \in \mathrm{CL}$.

(2) Demostrar que $(\lambda^* x\,.\,P)\,Q \xrightarrow{+} P[x := Q]$ para todos $P, Q \in \mathrm{CL}$.

Ejercicio 5 (Confluencia)**.** Se define inductivamente la relación de *reducción paralela* $P \Rrightarrow P'$ de la lógica combinatoria por las 4 reglas:

$$\frac{}{P \Rightarrow P} \qquad \frac{P \Rightarrow P'}{\mathbf{K}\,P\,Q \;\Rightarrow\; P'} \qquad \frac{P \Rightarrow P' \quad Q \Rightarrow Q' \quad R \Rightarrow R'}{\mathbf{S}\,P\,Q\,R \;\Rightarrow\; P'\,R'\,(Q'\,R')} \qquad \frac{P \Rightarrow P' \quad Q \Rightarrow Q'}{P\,Q \;\Rightarrow\; P'\,Q'}$$

(1) Verificar que: $\quad (\to) \subseteq (\Rightarrow) \subseteq (\xrightarrow{*})$.

(2) Demostrar que $\Rightarrow$ cumple la propiedad del diamante.

(3) Deducir que $\to$ es confluente.

Ejercicio 6 (Traducciones)**.** Se consideran las traducciones $M \mapsto M^{\mathrm{CL}}$ (del cálculo lambda a la lógica combinatoria) y $P \mapsto P^{\lambda}$ (de la lógica combinatoria al cálculo lambda) definidas por:

$$\begin{array}{rcl} x^{\mathrm{CL}} & := & x \\ (\lambda x\,.\,M)^{\mathrm{CL}} & := & \lambda^* x\,.\,M^{\mathrm{CL}} \\ (MN)^{\mathrm{CL}} & := & M^{\mathrm{CL}} N^{\mathrm{CL}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x^{\lambda} & := & x \\ \mathbf{K}^{\lambda} & := & \lambda xy\,.\,x \\ \mathbf{S}^{\lambda} & := & \lambda xyz\,.\,x\,z\,(y\,z) \\ (PQ)^{\lambda} & := & P^{\lambda} Q^{\lambda} \end{array}$$

(1) Demostrar que si $P \to P'$ $(\in \mathrm{CL})$, entonces $P^{\lambda} \xrightarrow{+}_{\beta} P'^{\lambda}$ $(\in \Lambda)$.

(2) Dar ejemplos de términos $M, M' \in \Lambda$ tales que $M \to_{\beta} M'$ pero $M^{\mathrm{CL}} \not\xrightarrow{*} M'^{\mathrm{CL}}$.
¿De donde viene el problema?

(3) Demostrar que $(M^{\mathrm{CL}})^{\lambda} \xrightarrow{*}_{\beta} M$ para todo $M \in \Lambda$.

Ejercicio 7 (Bases del cálculo lambda)**.** Dado un conjunto X de términos lambda, se escribe X^+ al mínimo conjunto de términos lambda que contiene X y que está cerrado por aplicación. De modo equivalente, el conjunto X^+ está definido inductivamente por:

$$\frac{M \in X}{M \in X^+} \qquad \frac{M \in X^+ \quad N \in X^+}{MN \in X^+}$$

Se dice que un conjunto X de términos lambda cerrados es *una base* (del cálculo lambda) cuando todo término lambda cerrado es β-equivalente a un elemento de X^+, es decir:

$$X \text{ base} \qquad \text{sii} \qquad X \subseteq \Lambda_0 \ \wedge \ \forall M \in \Lambda_0,\ \exists M' \in X^+,\ M \cong_\beta M' .$$

En lo siguiente, se escriben $\mathbf{K} := \mathbf{K}^\lambda = \lambda xy\,.\,x$ y $\mathbf{S} := \mathbf{S}^\lambda = \lambda xyz\,.\,x\,z\,(y\,z)$.

(1) Demostrar que el conjunto $\{\mathbf{K}, \mathbf{S}\}$ es una base del cálculo lambda.

(2) Escribiendo $\mathbf{B} :\equiv \lambda xyz\,.\,x\,(y\,z)$, $\mathbf{C} :\equiv \lambda xyz\,.\,x\,z\,y$, $\mathbf{K} :\equiv \lambda xy\,.\,x$ y $\mathbf{W} :\equiv \lambda xy\,.\,x\,y\,y$, demostrar que el conjunto $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{W}\}$ es una base del cálculo lambda.

(3) Escribiendo $\mathbf{X} \equiv \lambda z\,.\,z\,\mathbf{K}\,\mathbf{S}\,\mathbf{K}$, demostrar que $\{\mathbf{X}\}$ es una base del cálculo lambda.

Se dice que un término lambda es *lineal* cuando cada variable ligada por un λ tiene exactamente una ocurrencia libre en el cuerpo de su abstracción ligante. Formalmente:

- Toda variable x es un término lineal.
- Una abstracción $\lambda x\,.\,M$ es un término lineal si y sólo si:
  (*i*) su cuerpo M es un término lineal y (*ii*) x tiene una única ocurrencia libre en M.
- Una aplicación MN es lineal si y sólo si M y N lo son.

(4) Demostrar que el conjunto $\{\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ es una base del cálculo lambda lineal.