Práctico 5: Cálculo lambda simplemente tipado

Ejercicio 1 (Booleanos)**.** En este ejercicio, se supone que el álgebra de tipos del cálculo lambda simplemente tipado contiene un único tipo de base, escrito α. Para todo tipo A, se definen:

$$\begin{array}{rcll}
\mathsf{Bool}_A & :\equiv & A \to A \to A & \\
\mathtt{true}_A & :\equiv & \lambda x, y : A\,.\,x & : \quad \mathsf{Bool}_A \\
\mathtt{false}_A & :\equiv & \lambda x, y : A\,.\,y & : \quad \mathsf{Bool}_A \\
\mathtt{if}_A & :\equiv & \lambda b : \mathsf{Bool}_A\,.\,\lambda x, y : A\,.\,b\,x\,y & : \quad \mathsf{Bool}_A \to A \to A \to A
\end{array}$$

(1) Demostrar que $\mathtt{true}_\alpha$ y $\mathtt{false}_\alpha$ son los únicos términos cerrados y en forma β-normal de tipo Bool_α. ¿Se puede generalizar el resultado a un tipo A cualquiera?

(2) Construir para cada tipo A un término $\mathtt{if}'_A \ : \ \mathsf{Bool}_\alpha \to A \to A \to A$ tal que:

$$\begin{array}{rcl}
\mathtt{if}'_A\ \mathtt{true}_\alpha\ M\ N & \overset{*}{\to}_{\beta\eta} & M \\
\mathtt{if}'_A\ \mathtt{false}_\alpha\ M\ N & \overset{*}{\to}_{\beta\eta} & N
\end{array} \qquad \text{(para todos } M, N : A)$$

(3) Construir para cada tipo A dos términos $C_A \ : \ \mathsf{Bool}_\alpha \to \mathsf{Bool}_A$ y $C'_A \ : \ \mathsf{Bool}_A \to \mathsf{Bool}_\alpha$ tales que:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
C_A\ \mathtt{true}_\alpha & \overset{*}{\to}_{\beta\eta} & \mathtt{true}_A & C'_A\ \mathtt{true}_A & \overset{*}{\to}_{\beta} & \mathtt{true}_\alpha \\
C_A\ \mathtt{false}_\alpha & \overset{*}{\to}_{\beta\eta} & \mathtt{false}_A & C'_A\ \mathtt{false}_A & \overset{*}{\to}_{\beta} & \mathtt{false}_\alpha
\end{array}$$

(4) Mostrar que se pueden construir los dos términos $C_A : \mathsf{Bool}_\alpha \to \mathsf{Bool}_A$ y $C'_A : \mathsf{Bool}_A \to \mathsf{Bool}_\alpha$ del ítem anterior de tal modo que

$$C'_A \circ C_A \ \equiv\ \lambda b_0 : \mathsf{Bool}_\alpha\,.\,C'_A\,(C_A\,b_0) \ \overset{*}{\to}_{\beta\eta}\ \mathbf{I}_{\mathsf{Bool}_\alpha}\,.$$

Ejercicio 2 (Enteros de Church)**.** Para todo tipo A y para todo $n \in \mathbb{N}$, se definen:

$$\begin{array}{rcll}
\mathsf{Nat}_A & :\equiv & (A \to A) \to A \to A & \\
\overline{n}_A & :\equiv & \lambda f : A \to A\,.\,\lambda x : A\,.\,\underbrace{f\,(\cdots(f}_{n}\ x)\cdots) & : \quad \mathsf{Nat}_A
\end{array}$$

(1) Dado un tipo de base α, demostrar que los únicos términos cerrados y en forma β-normal de tipo Nat_α son los enteros de Church $\overline{n}_\alpha$ ($n \in \mathbb{N}$), más un término cerrado $N_\alpha \ : \ \mathsf{Nat}_\alpha$ que se determinará. ¿A qué número corresponde el término N_α? ¿Cómo cambiar las definiciones para excluir este caso patológico?

(2) Construir términos $\mathtt{plus}_A, \mathtt{mult}_A \ : \ \mathsf{Nat}_A \to \mathsf{Nat}_A \to \mathsf{Nat}_A$ tales que:

$$\begin{array}{rcl}
\mathtt{plus}_A\,\overline{n}_A\,\overline{m}_A & \overset{*}{\to}_{\beta} & \overline{(n+m)}_A \\
\mathtt{mult}_A\,\overline{n}_A\,\overline{m}_A & \overset{*}{\to}_{\beta} & \overline{(nm)}_A
\end{array} \qquad \text{(para todos } n, m \in \mathbb{N})$$

(3) Construir un término $\mathtt{ifzero} \ : \ \mathsf{Nat}_A \to \mathsf{Nat}_A \to \mathsf{Nat}_A \to \mathsf{Nat}_A$ tal que:

$$\mathtt{ifzero}_A\,\overline{n}_A\,\overline{p}_A\,\overline{q}_A \ \overset{*}{\to}_{\beta}\ \begin{cases} \overline{p}_A & \text{si } n = 0 \\ \overline{q}_A & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \qquad \text{(para todos } n, p, q \in \mathbb{N})$$

Se llaman *polinomios extendidos* a las funciones de tipo $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ generadas por la suma, el producto y la función `ifzero`.

(4) Definir formalmente la noción de polinomio extendido (para todo $k \geq 1$).

(5) Deducir de lo anterior que todos los polinomios extendidos son representables en el cálculo lambda simplemente tipado (con el tipo Nat_α).

Se puede demostrar [Schwichtenberg 1975] que los polinomios extendidos son las únicas funciones representables en el cálculo lambda simplemente tipado con el tipo Nat_α (donde α es un tipo de base fijado). Sin embargo, se pueden representar más funciones, autorizando tipos distintos para los argumentos y el resultado (funciones de tipo $\mathsf{Nat}_{A_1} \to \cdots \to \mathsf{Nat}_{A_k} \to \mathsf{Nat}_B$).

(6) ¿Qué función representa el siguiente término?

$$M \;:\equiv\; \lambda n : \mathsf{Nat}_{A\to A} \,.\, \lambda m : \mathsf{Nat}_A \,.\, n\,m \quad : \quad \mathsf{Nat}_{A\to A} \to \mathsf{Nat}_A \to \mathsf{Nat}_A$$

Prueba de normalización Una presentación alternativa del cálculo lambda simplemente tipado consiste en usar variables tipadas (notación: x^A, y^B, z^C, etc.) cuyo nombre lleva un tipo, lo que permite abandonar los contextos de tipado. En este marco, los términos (tipados) están definidos simultáneamente con la relación de tipado mediante las 3 reglas:

$$\frac{}{x^A : A} \qquad \frac{M : B}{\lambda x^A \,.\, M : A \to B} \qquad \frac{M : A \to B \quad N : B}{MN : B}$$

En los siguientes ejercicios, sólo se consideran términos formados por estas reglas.

Ejercicio 3 (Normalización por grado)**.** Se define el grado $d(A)$ de un tipo A por:

$$d(\alpha) \;:=\; 0 \qquad \text{y} \qquad d(A \to B) \;:=\; 1 + \text{máx}(d(A), d(B))\,.$$

El grado de una redex $R \equiv (\lambda x^A \,.\, M)N$ (con $M : B$) es el grado del tipo $A \to B$. El grado de un término M es el máximo grado de una redex que ocurre en M (o -1 si M está en forma normal).

(1) Demostrar que todo término M de grado $d_M \geq 0$ contiene una redex $R \equiv (\lambda x^A \,.\, M')N'$ de grado d_M tal que todas las redexes adentro de M' y de N' tienen un grado menor a d_M.

(2) Demostrar que si R es tal redex en M, entonces la contracción de R adentro de M sólo puede generar redexes de grado menor a d.

(3) Deducir de lo anterior que todo término M (tipado) tiene una forma normal, así como un algoritmo de normalización.