Una introducción al forcing

1. La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel

Alexandre Miquel

agosto de 2024

Plan

Plan

Un poco de historia

1878 Estudiando las series trigonométricas (conjuntos derivados), Georg **Cantor** (1845–1918) descubre los números ordinales.

Inicio de la teoría de conjuntos: números ordinales, números cardinales, hipótesis del continuo

1879 Gottlob **Frege** (1848–1925) introduce la *Begriffsschrift* ("conceptografía"), el antepasado del cálculo de predicados

1903 **Frege** propone una primera formalización de la teoría de conjuntos de Cantor, basada en su *Begriffsschrift*.

Bertrand **Russell** (1872–1970) demuestra su inconsistencia

1908 Ernst **Zermelo** (1871–1953) da una nueva axiomatización de la teoría de conjuntos (Z). Introduce el axioma de elección (AC)

1922 Abraham **Fraenkel** (1891–1965) y Thoralf **Skolem** (1887–1963) introducen (independientemente) el esquema de reemplazo ($Z \to ZF$)

¿Qué es la teoría de conjuntos?

- Descripción de un universo (no vacío) cuyos objectos son los conjuntos.
  Aquí: conjunto = conjunto puro (i.e. cuyos elementos son conjuntos puros)

- El universo conjuntista está regido por dos relaciones primitivas:
  - La **igualdad:** $x = y$ (donde x e y son conjuntos)
  - La **pertenencia:** $x \in y$ (donde x e y son conjuntos)

- Los conjuntos son bastante flexibles para codificar los conceptos matemáticos: n-uplas, relaciones, funciones, matrices, números...

  Universo conjuntista = universo matemático

- Una axiomatización estándar (ZF) + muchos axiomas extra:
  - Axioma de fundación (AF), Axioma de elección (AC)
  - Hipótesis del continuo (HC), Hip. generalizada del cont. (HGC)

El lenguaje de ZF

- La teoría de conjuntos de ZF está presentada en el lenguaje de la lógica de primer orden (con igualdad):

Fórmulas $\phi, \psi \quad ::= \quad x = y \mid x \in y \mid \neg\phi \mid \phi \Rightarrow \psi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \forall x\, \phi \mid \exists x\, \phi$

Ningún símbolo de constante o de función: los únicos términos son las variables

- Abreviaturas estándar:

$$\begin{aligned}
x \neq y &\quad :\equiv \quad \neg(x = y) \\
x \notin y &\quad :\equiv \quad \neg(x \in y) \\
\forall x \in a\ \phi(x) &\quad :\equiv \quad \forall x\,(x \in a \Rightarrow \phi(x)) \\
\exists x \in a\ \phi(x) &\quad :\equiv \quad \exists x\,(x \in a \wedge \phi(x)) \\
\exists! x\ \phi(x) &\quad :\equiv \quad \exists x\, \phi(x)\ \wedge\ \forall x\, \forall x'\,(\phi(x) \wedge \phi(x') \Rightarrow x = x') \\
x \subseteq y &\quad :\equiv \quad \forall z\,(z \in x \Rightarrow z \in y)
\end{aligned}$$

Los axiomas de ZF (con axioma de fundación)

Extensionalidad	$\forall a\ \forall b\ \big(\forall x\,(x \in a \Leftrightarrow x \in b)\ \Rightarrow\ a = b\big)$
Pares	$\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall x\ (x \in c\ \Leftrightarrow\ x = a \vee x = b)$
Comprensión	$\forall \vec{z}\ \forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b\ \Leftrightarrow\ x \in a \wedge \phi(x, \vec{z}))$ para cada fórmula $\phi(x, \vec{z})$
Unión	$\forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b\ \Leftrightarrow\ \exists y \in a\ \ x \in y)$
Potencia	$\forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b\ \Leftrightarrow\ x \subseteq a)$
Infinitud	$\exists a\ \big(\exists x \in a\ \forall z\,(z \notin x)\ \wedge\ \forall x \in a\ \exists y \in a\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \in x \vee z = x)\big)$
Reemplazo	$\forall \vec{z}\ \forall a\ \big(\forall x \in a\ \exists! y\ \psi(x, y, \vec{z})\ \Rightarrow\ \exists b\ \forall x \in a\ \exists y \in b\ \psi(x, y, \vec{z})\big)$ para cada fórmula $\psi(x, y, \vec{z})$
Fundación	$\forall a\ \big((\exists x\ x \in a)\ \Rightarrow\ \exists x \in a\ \forall y \in a\ y \notin x\big)$

Clases (1/3)

- Una clase es una fórmula $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ abstraída con respecto a una de sus variables libres x. Notación:

$$C \;=\; \{x \,:\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$$

($a_1, \ldots, a_n =$ parámetros de C)

Los elementos de C son los conjuntos x que cumplen $\phi(x, \ldots)$:

$$x \in C \qquad \text{sii} \qquad \phi(x, a_1, \ldots, a_n)$$

- Se considera que dos clases $C = \{x : \phi(x)\}$ y $D = \{x : \psi(x)\}$ son iguales cuando tienen los mismos elementos:

$$C = D \qquad \text{sii} \qquad \forall x\, (\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x))$$

- **Ejemplos:**
  - La clase universal (o universo): $V = \{x : x = x\}$
  - La clase de los ordinales: $On = \{\alpha : \alpha$ conjunto transitivo $\wedge$ $(\in)$ buen orden estricto en $\alpha\}$
  - La clase de los cardinales: $Cn = \{\kappa : On(\kappa) \;\wedge\; (\forall \alpha < \kappa)\, \alpha \not\approx \kappa\}$

Clases (2/3)

- Cada conjunto a se puede considerar como una clase, a saber como la clase de sus elementos: $\quad a = \{x : x \in a\}$

- Existen clases que no son conjuntos, por ejemplo:
$$\{x : x \notin x\}, \quad V, \quad On, \quad Cn$$
Se dice de tales clases que son clases propias

- Las clases se pueden manipular como si fueran conjuntos, y dadas clases $C = \{x : \phi(x)\}$ y $D = \{x : \psi(x)\}$, se escriben:
$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} C = D & :\equiv & \forall x\,(\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x)) & C \subseteq D & :\equiv & \forall x\,(\phi(x) \Rightarrow \psi(x)) \\ C \cup D & := & \{x : \phi(x) \vee \psi(x)\} & C \cap D & := & \{x : \phi(x) \wedge \psi(x)\} \\ C - D & := & \{x : \phi(x) \wedge \neg\psi(x)\} & \bigcup C & := & \{y : \exists x\,(\phi(x) \wedge y \in x)\} \end{array}$$

- Una clase $C = \{x : \phi(x)\}$ puede aparecer por la izquierda del símbolo $\in$ sólo cuando es un conjunto:
$$\begin{array}{rcl} C \in D & :\equiv & \exists x\,(x = C \;\wedge\; \psi(x)) \\ & :\equiv & \exists x\,(\forall y\,(y \in x \Leftrightarrow \phi(y)) \;\wedge\; \psi(x)) \end{array}$$

Clases (3/3)

- Más generalmente, el lenguaje de las clases permite recuperar las notaciones usuales mediante las siguientes abreviaturas:

$$
\begin{array}{rcl}
\{a,b\} & := & \{x \,:\, x=a \vee x=b\} \\
(a,b) & := & \{\{a\},\{a,b\}\} \\
 & = & \{x \,:\, x=\{a\} \vee x=\{a,b\}\} \\
 & = & \{x \,:\, \forall y\,(y\in x \Leftrightarrow y=a) \ \vee \\
 & & \qquad \forall y\,(y\in x \Leftrightarrow y=a \vee y=b)\} \\
\mathfrak{P}(a) & := & \{x \,:\, x\subseteq a\} \\
\bigcup a & := & \{x \,:\, \exists y\in a\ x\in y\} \\
A\times B & := & \{z \,:\, \exists x\in A\ \exists y\in B\ z=(x,y)\} \\
\mathrm{dom}(f) & := & \{x \,:\, \exists y\,(x,y)\in f\} \\
\mathrm{img}(f) & := & \{y \,:\, \exists x\,(x,y)\in f\} \\
f(x) & := & \{z \,:\, \exists y\,((x,y)\in f \wedge z\in y)\} \\
\varnothing & := & \{x : x\neq x\} \\
s(\alpha) & := & \{x : x\in\alpha \vee x=\alpha\}
\end{array}
$$

(etc.)

El axioma de extensionalidad

- El axioma de extensionalidad

$$\forall a\ \forall b\ \big(\forall x\,(x \in a \Leftrightarrow x \in b)\ \Rightarrow\ a = b\big)$$

expresa que dos conjuntos a y b que tienen los mismos elementos son iguales: $a = b$ (El recíproco es obvio; sigue de las reglas de $=$)

- Tautológicamente equivalente a la antisimetría de $\subseteq$:

$$\forall a\ \forall b\ (a \subseteq b \wedge b \subseteq a \Rightarrow a = b)$$

- Por lo tanto, la inclusión $\subseteq$ es una relación de orden sobre V

El axioma de pares

- El axioma de pares

$$\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall x\ (x \in c\ \Leftrightarrow\ x = a \vee x = b)$$

introduce el conjunto $\{a, b\} \ :=\ \{x\ :\ x = a \vee x = b\}$

- Tenemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$. Más generalmente:

Proposición: $\{a, b\} = \{c, d\}\ \Leftrightarrow\ (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$

- Conjunto unitario definido por: $\{a\} := \{a, a\}$
- Par ordenado definido por: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Proposición: $(a, b) = (c, d)\ \Leftrightarrow\ a = c \wedge b = d$

- Tuplas: $(a, b, c) := ((a, b), c)$, $(a, b, c, d) := ((a, b, c), d)$, etc.

El esquema de comprensión

- El esquema de axiomas de comprensión

$$\forall \vec{z}\ \forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b \ \Leftrightarrow\ x \in a \wedge \phi(x, \vec{z}))$$

introduce el conjunto $\{x \in a : \phi(x, \vec{z})\}$

- De modo equivalente, el esquema de comprensión expresa que:
  - La intersección de un conjunto con una clase es un conjunto:

    $$a \text{ conjunto} \quad \Rightarrow \quad a \cap C \text{ conjunto}$$

  - Toda clase incluida en un conjunto es un conjunto:

    $$a \text{ conjunto} \ \wedge\ C \subseteq a \quad \Rightarrow \quad C \text{ conjunto}$$

- Implica que V no es un conjunto (clase propia)

- Permite formar los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} a \cap b &:= \{x \in a : x \in b\} \\ a - b &:= \{x \in a : x \notin b\} \\ \varnothing &:= a - a \qquad\qquad (a \text{ cualquiera}) \end{aligned}$$

El axioma de la unión

- El axioma de la unión

$$\forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b \ \Leftrightarrow\ \exists y \in a\ \ x \in y)$$

introduce el conjunto $\bigcup a \ = \ \bigcup_{y \in a} y \ := \ \{x : \exists y \in a\ \ x \in y\}$

- Permite formar los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} a \cup b \ &:= \ \bigcup \{a, b\} \\ \{a, b, c\} \ &:= \ \{a, b\} \cup \{c\} \\ \{a, b, c, d\} \ &:= \ \{a, b, c\} \cup \{d\} \\ \{a_1, \ldots, a_n\} \ &:= \ \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \\ a \bigtriangleup b \ &:= \ (a - b) \cup (b - a) \end{aligned}$$

El axioma del conjunto potencia

- El axioma del conjunto potencia

$$\forall a \; \exists b \; \forall x \; (x \in b \;\Leftrightarrow\; x \subseteq a)$$

introduce el conjunto $\mathfrak{P}(a) \;:=\; \{x \,:\, x \subseteq a\}$

- Implica que el producto cartesiano

$$A \times B \;:=\; \{z \,:\, \exists x \in A \; \exists y \in B \;\, z = (x, y)\}$$

es un conjunto, pues $A \times B \;\subseteq\; \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$

- Más generalmente:

$$A \times B \times C \;:=\; (A \times B) \times C$$
$$A \times B \times C \times D \;:=\; (A \times B \times C) \times D \qquad \text{(etc.)}$$

Grafos y funciones

- Un grafo es un conjunto de pares:

$$G \text{ grafo} \quad :\equiv \quad \forall z \in G\ \exists x\ \exists y\ \ z = (x, y)$$

- Una función es un grafo funcional:

$$\begin{aligned} f \text{ función} \quad :\equiv \quad & f \text{ grafo} \wedge \\ & \forall x\, \forall y\, \forall y'\, ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y') \end{aligned}$$

- Se escriben:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &:= \{x : \exists y\ (x, y) \in f\} && (\subseteq \textstyle\bigcup\bigcup f) \\ \mathrm{img}(f) &:= \{y : \exists x\ (x, y) \in f\} && (\subseteq \textstyle\bigcup\bigcup f) \\ f(x) &:= \textstyle\bigcup \{y : (x, y) \in f\} && (\subseteq \textstyle\bigcup\bigcup\bigcup f) \end{aligned}$$

- Dados A y B, se escribe

$$\begin{aligned} B^A := \{f : f \text{ función } \wedge \\ \mathrm{dom}(f) = A \ \wedge\ \mathrm{img}(f) \subseteq B\} \qquad (\subseteq \mathfrak{P}(A \times B)) \end{aligned}$$

- **Conceptos usuales:** función identidad id_A, función compuesta $g \circ f$, imagen/preimagen, función inyectiva/sobreyectiva/biyectiva, etc.

El axioma de infinitud

- Se recuerda que un conjunto A es Dedekind-infinito cuando existe una función $f : A \to A$ inyectiva y no sobreyectiva
- El axioma de infinitud

$$\exists a \ \big(\exists x \in a \ \forall z \ (z \notin x) \ \wedge \\ \forall x \in a \ \exists y \in a \ \forall z \ (z \in y \Leftrightarrow z \in x \vee z = x)\big)$$

expresa la existencia de un conjunto a que contiene $0 := \varnothing$ y es estable por sucesor $s(x) := x \cup \{x\}$

- Como la operación $x \mapsto s(x)$ es inyectiva (en V) y nunca alcanza 0, se deduce que el conjunto a es Dedekind-infinito

  Y como a contiene todos los ordinales finitos: $\omega \subseteq a$ es un conjunto

- Otras formulaciones posibles:
  - Existe un conjunto Dedekind-infinito
  - Existe un ordinal límite

El esquema de reemplazo

- Una clase funcional (o funcional) es una clase F de pares tal que

$$\forall x\, \forall y\, \forall y' \; ((x,y) \in F \wedge (x,y') \in F \Rightarrow y = y')$$

Se definen las clases:
$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(F) &:= \{x : \exists y \; (x,y) \in F\} \\ \operatorname{img}(F) &:= \{y : \exists x \; (x,y) \in F\} \end{aligned}$$

- El esquema de axiomas de reemplazo

$$\forall \vec{z} \;\; \forall a \; \big(\forall x \in a \; \exists! y \;\; \psi(x,y,\vec{z}) \;\; \Rightarrow \\ \exists b \; \forall x \in a \; \exists y \in b \;\; \psi(x,y,\vec{z})\big)$$

expresa que si el dominio de una clase funcional es un conjunto, entonces su imagen tambien es un conjunto:

$$F \text{ clase funcional} \wedge \operatorname{dom}(F) \text{ conjunto} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{img}(F) \text{ conjunto}$$

- De modo equivalente:

$$F \text{ clase funcional} \wedge a \text{ conjunto} \quad \Rightarrow \quad F[a] \text{ conjunto}$$

Plan

Buenos ordenes

Definición (Buen orden / buen orden estricto)

Sea A un conjunto. Un buen orden sobre A es una relación de orden $(\leq)$ sobre A tal que todo subconjunto no vacío de A tiene un mínimo:

$$\begin{aligned}(\leq) \text{ buen orden sobre } A \quad &\equiv \\ &(\leq) \text{ orden (amplio) sobre } A \ \wedge \\ &(\forall X \subseteq A)\,(X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)\, x \leq y)\,.\end{aligned}$$

Un buen orden estricto sobre A es un orden estricto $(<)$ cuya relación de orden asociada $(\leq) \ := \ (<) \uplus (=_A)$ es un buen orden

Proposición (Inducción bien fundada)

Si $(<)$ es un buen orden estricto sobre A, entonces:

$$(\forall X \subseteq A)[(\forall x \in A)((\forall y \in A)(y < x \Rightarrow y \in X) \ \Rightarrow \ x \in X) \ \Rightarrow \ X = A]$$

La noción de ordinal

- Un conjunto (una clase) X es transitivo(a) cuando $\forall x \in X \; x \subseteq X$

Definición (Ordinal)

Un ordinal es un conjunto transitivo en que la relación $\in$ es un buen orden estricto. Se escribe On a la clase de los ordinales:

$$
\begin{aligned}
On \;:=\; \{\alpha \,:\, & (\forall x \in \alpha)(\forall y \in x)(y \in \alpha) && \wedge \\
& (\forall x \in \alpha)(x \notin x) && \wedge \\
& (\forall x, y, z \in \alpha)(x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z) && \wedge \\
& (\forall X \subseteq \alpha)(X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)(x \in y \vee x = y))\,\}
\end{aligned}
$$

- Orden sobre On: $\alpha \leq \beta \;\equiv\; \alpha \subseteq \beta \qquad (\alpha, \beta \in On)$

Proposición

1. Todo elemento de un ordinal es un ordinal
2. Para todos $\alpha, \beta \in On$: $\alpha < \beta$ sii $\alpha \in \beta$
3. Para todo $\alpha \in On$: $\alpha = \{\beta \in On \,:\, \beta < \alpha\}$

Construcción de ordinales

Proposición (Ordinal sucesor)

Para todo $\alpha \in On$: $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ es el menor ordinal mayor a α.

Tenemos que: $\alpha < \beta$ sii $s(\alpha) \leq \beta$ $(\alpha, \beta \in On)$

- Los primeros ordinales son

$$\begin{array}{lllllll} 0 & := & \varnothing \\ 1 & := & s(0) & := & \{0\} & = & \{\varnothing\} \\ 2 & := & s(1) & := & \{0,1\} & = & \{\varnothing,\{\varnothing\}\} \\ 3 & := & s(2) & := & \{0,1,2\} & = & \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} \end{array} \qquad \text{(etc.)}$$

Proposición (Supremo)

Todo conjunto $X \subseteq On$ tiene supremo: $\sup(X) = \bigcup X$

Corolario

On es una clase propia

Ordinales y buen orden

- Por definición, cada ordinal α es un conjunto bien ordenado por $\leq$ (orden de inclusión). Además:

Proposición (Buen orden)

1. El orden $\alpha \leq \beta$ es un buen orden sobre On, en el sentido en que toda clase C no vacía de ordinales tiene mínimo:
$$C \subseteq On \ \wedge \ C \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha_0 \in C \ \ \forall \alpha \in C \ \ \alpha_0 \leq \alpha$$
2. Dos ordinales son isomorfos$^{(*)}$ si y sólo si son iguales
3. Todo conjunto bien ordenado es isomorfo$^{(*)}$ a un único ordinal

$(*)$ en el sentido de los conjuntos ordenados

- $On =$ sistema de representantes de los conjuntos bien ordenados

Corolario (Inducción transfinita)

Dado un predicado $\phi(\alpha)$ definido sobre On:
$$(\forall \alpha \in On)[(\forall \beta < \alpha)\phi(\beta) \ \Rightarrow \ \phi(\alpha)] \ \Rightarrow \ (\forall \alpha \in On)\, \phi(\alpha)$$

Ordinales límites

Definición (Ordinal límite)

Un ordinal límite es un ordinal que no es ni 0, ni un ordinal sucesor

- **Principio de tricotomía:** Para todo $\alpha \in On$:

$$\alpha = 0 \ \vee \ \alpha \text{ ordinal sucesor} \ \vee \ \alpha \text{ ordinal límite}$$

- **Axioma de infinitud:** Existe un ordinal límite

- Se escribe ω al mínimo ordinal límite. Los elementos de ω son los ordinales finitos (i.e. menores que cualquier ordinal límite)

Proposición (Inducción transfinita, variante)

Dado un predicado $\phi(\alpha)$ definido sobre On:

$$\begin{aligned}&\phi(0) \quad \wedge \quad (\forall \alpha \in On)(\phi(\alpha) \Rightarrow \phi(s(\alpha))) \quad \wedge \\ &(\forall \lambda \in On,\ \lambda \text{ límite})[(\forall \alpha < \lambda)\, \phi(\alpha) \ \Rightarrow \ \phi(\lambda)] \\ &\Rightarrow \quad (\forall \alpha \in On)\, \phi(\alpha)\end{aligned}$$

Sucesiones transfinitas

- Un sucesión transfinita es una clase funcional Y con dominio On.
  Notación: $Y = (y_\alpha)_{\alpha \in On}$
- Dada una clase funcional Φ, se llama función Φ-inductiva a toda función f tal que
  1. $\mathrm{dom}(f) \in On$
  2. $f_{\restriction\beta} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ y $f(\beta) = \Phi(f_{\restriction\beta})$ para todo $\beta \in \mathrm{dom}(f)$

Teorema (Definición por recursión transfinita)

Dada una clase funcional Φ cuyo dominio incluye a todas las funciones Φ-inductivas, existe una (única) sucesión transfinita $(y_\alpha)_{\alpha \in On}$ tal que

$$y_\alpha = \Phi\big((y_\beta)_{\beta<\alpha}\big) \qquad \text{para todo } \alpha \in On$$

Aritmética de ordinales

- **Definición de la suma** ($\alpha, \beta, \lambda \in On$, λ límite):

$$\alpha + 0 \;:=\; \alpha \qquad \alpha + s(\beta) \;:=\; s(\alpha+\beta) \qquad \alpha + \lambda \;:=\; \sup_{\beta<\lambda}(\alpha+\beta)$$

Suma asociativa y no conmutativa: $1 + \omega = \omega \neq s(\omega) = \omega + 1$

- **Definición del producto** ($\alpha, \beta, \lambda \in On$, λ límite):

$$\alpha \cdot 0 \;:=\; 0 \qquad \alpha \cdot s(\beta) \;:=\; \alpha\cdot\beta + \alpha \qquad \alpha \cdot \lambda \;:=\; \sup_{\beta<\lambda}(\alpha\cdot\beta)$$

Producto asociativo y no conmutativo: $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$.
También se usa la notación invertida $\beta\alpha \;:=\; \alpha \cdot \beta$

- **Definición de la potenciación** ($\alpha, \beta, \lambda \in On$, λ límite):

$$\alpha^0 \;:=\; 1 \qquad \alpha^{s(\beta)} \;:=\; \alpha^\beta \cdot \alpha \qquad \alpha^\lambda \;:=\; \sup_{\beta<\lambda}(\alpha^\beta)$$

Cardinales, sin axioma de elección (1/2)

- Dados conjuntos A y B, se escriben

$$
\begin{aligned}
A \preceq B \quad &:\equiv \quad (\exists f \in B^A)\ f \text{ inyectiva} \\
A \sim B \quad &:\equiv \quad (\exists f \in B^A)\ f \text{ biyectiva} \qquad \text{(equipotencia)}
\end{aligned}
$$

Teorema (Cantor-Bernstein-Schröder) (sin AC)

Si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \sim B$

Definición (Cardinal)

Un cardinal es un ordinal κ que no es equipotente con ningún ordinal menor que κ. Se escribe Cn a la clase de los cardinales:

$$Cn \;=\; \{\kappa \,:\, \kappa \in On \;\wedge\; (\forall \alpha < \kappa)\ \alpha \not\sim \kappa\}$$

- Todos los ordinales finitos son cardinales, así como ω (notado $\aleph_0$). El primer ordinal que no es un cardinal es $\omega + 1$

Cardinales, sin axioma de elección (2/2)

Propiedades demostrables en ZF (sin AC):

- Para todos $\kappa, \mu \in Cn$:
$$\kappa \preceq \mu \quad \Leftrightarrow \quad \kappa \leq \mu$$
$$\kappa \sim \mu \quad \Leftrightarrow \quad \kappa = \mu$$
- Todo ordinal α es equipotente a un único cardinal, escrito $\mathrm{Card}(\alpha)$
- Para todo cardinal κ, la clase $On_\kappa := \{\alpha \in On : \alpha \sim \kappa\}$ es un conjunto, y por lo tanto Cn es una clase propia
- Para todo cardinal κ, existe un menor cardinal mayor a κ, escrito κ^+
- El supremo de cualquier conjunto de cardinales es un cardinal
- Un conjunto X es equipotente a algún cardinal (escrito $\mathrm{Card}(X)$ o $|X|$) si y sólo si el conjunto X admite un buen orden

Jerarquía de los cardinales infinitos (sin AC):

$$\aleph_0 := \omega \qquad \aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+ \qquad \aleph_\lambda := \sup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \qquad (\lambda \text{ límite})$$

Plan

El axioma de fundación

- El axioma de fundación (AF)

$$\forall a \ \big((\exists x \ x \in a) \ \Rightarrow \ \exists x \in a \ \forall y \in a \ y \notin x\big)\,,$$

es decir: $$\forall a \ \big(a \neq \varnothing \ \Rightarrow \ \exists x \in a \ \ x \cap a = \varnothing\big)$$

expresa que todo conjunto a no vacío tiene un elemento $x \in a$ que es $\in$-minimal, es decir: tal que $y \notin x$ para todo $y \in a$

- Dicho axioma implica que no existen sucesiones infinitas de la forma

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \ni \cdots$$

(Considerar el conjunto $a = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$)

- En particular, no existe ningún conjunto x tal que

$$x \in x$$

ni ciclos de pertenencia

$$x_1 \in x_2 \in x_3 \in \cdots \in x_n \in x_1$$

Clausura transitiva y elementos $\in$-minimales

Proposición y definición (Clausura transitiva) (sin AF)

Para todo a, existe un mínimo conjunto transitivo a' tal que $a \subseteq a'$.
Se llama la clausura transitiva de a, y se escribe $\mathrm{Cl}(a)$

Demo. Tomar $\mathrm{Cl}(a) := \bigcup_{n\in\omega} a_n$, donde $a_0 := a$ y $a_{n+1} := \bigcup a_n$ para todo $n \in \omega$. $\square$

- Se observa que $\mathrm{Cl}(a) \;=\; a \cup \bigcup_{x\in a} \mathrm{Cl}(x)$

Lema (con AF)

Si C es una clase no vacía, entonces C tiene un elemento $\in$-minimal

Demo. Fijado $a \in C$, se considera $X := C \cap \mathrm{Cl}(\{a\})$ ($\ni a$). Como $X \neq \varnothing$, existe $x \in X$ tal que $x \cap X = \varnothing$. Para todo $y \in x$, tenemos que $y \notin X$, pero como $y \in \mathrm{Cl}(\{a\})$ (pues $y \in x$ y $x \in \mathrm{Cl}(\{a\})$), se deduce que $y \notin C$. Por lo tanto: $x \cap C = \varnothing$. $\square$

El principio de $\in$-inducción

Proposición (Razonamiento por ε-inducción)

Dada una fórmula $\phi(x, \vec{z})$:

$$\forall x\, [(\forall y \in x)\, \phi(y, \vec{z}) \;\Rightarrow\; \phi(x, \vec{z})] \;\Rightarrow\; \forall x\; \phi(x, \vec{z})$$

(donde $\vec{z}$ son parámetros cualesquiera)

Demo. Fijados $\vec{z}$, se supone que $\forall x\, [(\forall y \in x)\, \phi(y, \vec{z}) \Rightarrow \phi(x, \vec{z})]$ $(*)$ y se escribe $C := \{x : \neg\phi(x, \vec{z})\}$. Supongamos por el absurdo que C no es vacío. Entonces existe un elemento $x \in C$ que es $\in$-minimal en C. Esto quiere decir que para todo $y \in x$, tenemos que $y \notin C$ y luego $\phi(y, \vec{z})$. Por $(*)$ se deduce que $\phi(x, \vec{z})$, es decir: $x \notin C$: contradicción. Por lo tanto, $C = \varnothing$, es decir: $\forall x\, \phi(x, \vec{z})$. $\square$

Ejercicio: Verificar que la $\in$-inducción implica el axioma de fundación

Construcción de funcional por $\in$-recursión

Proposición (Construcción de funcional por ε-recursión)

Si F es una clase funcional de dominio V, entonces existe otra clase funcional G de mismo dominio tal que

$$G(x) \;=\; F(\{G(y) : y \in x\}) \qquad (x \in V)$$

Demo. Se considera la clase

$$\begin{aligned} G \;:=\; \{(x,z) \;:\; \exists g \, \big(g \text{ función } \wedge \operatorname{dom}(g) = \mathrm{Cl}(\{x\}) \wedge g(x) = z \;\wedge \\ (\forall x' \in \mathrm{Cl}(\{x\}))\; g(x') = F(\{g(y') : y' \in x'\}) \;\big)\} \end{aligned}$$

Luego se demuestra por $\in$-inducción que $G(x) \;=\; F(\{G(y) : y \in x\})$ para todo $x \in V$. □

La jerarquía acumulativa (1/2)

- La jerarquía acumulativa (von Neumann) es la sucesión transfinita $(V_\alpha)_{\alpha\in On}$ definida por

$$V_\alpha \;:=\; \bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{P}(V_\beta) \qquad (\alpha\in On)$$

o de modo equivalente:

$$V_0 \;=\; \varnothing, \qquad V_{\alpha+1} \;=\; \mathfrak{P}(V_\alpha), \qquad V_\lambda \;=\; \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta \qquad (\lambda \text{ límite})$$

Proposición

Para todos $\alpha,\beta\in On$:

(1) V_α es transitivo

(2) $\alpha\subseteq V_\alpha$ y $\alpha\in V_{\alpha+1}$

(3) $\alpha\le\beta$ implica $V_\alpha\subseteq V_\beta$

(4) $\alpha<\beta$ implica $V_\alpha\in V_\beta$

La jerarquía acumulativa (2/2)

Proposición

Todo conjunto pertenece a algún V_α: $$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$

Demo. Por $\in$-inducción sobre x. Supongamos que para todo $y \in x$, existe $\alpha \in On$ tal que $y \in V_\alpha$. Para cada $y \in x$, se escribe α_y al mínimo ordinal tal que $y \in V_{\alpha_y}$.
Sea $\alpha := \sup_{y \in x} \alpha_y$. Por construcción, tenemos que $y \in V_\alpha$ para todo $y \in x$, entonces $x \subseteq V_\alpha$, y por lo tanto: $x \in \mathfrak{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. $\square$

- A cada conjunto x se asocia su rango $\mathrm{rk}(x) \in On$ definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(x) &:= \text{mínimo } \alpha \in On \text{ tal que } x \subseteq V_\alpha \\ &:= \text{mínimo } \alpha \in On \text{ tal que } x \in V_{\alpha+1} \end{aligned}$$

- En particular:

(1) $\mathrm{rk}(x) = \sup_{y \in x} (\mathrm{rk}(y) + 1)$ para todo conjunto x

(2) $\mathrm{rk}(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in On$

Aplicaciones del rango

- A cada clase C, se asocia el subconjunto $\hat{C} \subseteq C$ definido por:

$$\hat{C} \;:=\; \{x \in C \,:\, \mathrm{rk}(x) \leq \mathrm{rk}(y) \text{ para todo } y \in C\}$$

Obs.: $\hat{C}$ siempre es un conjunto:

  - Si $C = \varnothing$, entonces $\hat{C} = \varnothing$
  - Si $C \neq \varnothing$, entonces $\hat{C} = C \cap V_{\alpha+1}$, donde $\alpha = \min_{x \in C} \mathrm{rk}(x)$

▶ *Método uniforme para extraer un subconjunto $\hat{C}$ no vacío a partir de cualquier clase C no vacía*

- **Ejemplo: cociente de una clase propia.** Sea C una clase propia equipada con una relación de equivalencia $E(x,y)$.

  Problema: Las clases de equivalencia $[x]_{/E} \;=\; \{y \in C \,:\, E(x,y)\}$ pueden ser clases propias, lo que impide formar el cociente C/E

  Solución: Reemplazar $[x]_{/E}$ por $\widehat{[x]}_{/E}$, y tomar $C/E \;:=\; \left\{\widehat{[x]}_{/E} : x \in C\right\}$.

  Tenemos que: $E(x,y) \;\Leftrightarrow\; \widehat{[x]}_{/E} = \widehat{[y]}_{/E}$ para todos $x, y \in C$

El esquema de colección

- Otra aplicación del rango es la siguiente:

Teorema (Esquema de colección)

Dada una fórmula $\phi(x, y, \vec{z})$, tenemos que:

$$\forall a\ \exists b\ \forall x \in a\ (\exists y\ \phi(x, y, \vec{z})\ \Rightarrow\ \exists y \in b\ \ \phi(x, y, \vec{z}))$$

(donde $\vec{z}$ son parámetros cualesquiera)

Demo. Fijados $\vec{z}$, se nota $C_x := \{y : \phi(x, y, \vec{z})\}$ para todo $x \in a$, y se toma

$$b\ :=\ \bigcup_{x \in a} \widehat{C}_x. \qquad \square$$

- **Obs.:** El esquema de colección implica el esquema de reemplazo; por lo tanto ambos esquemas son equivalentes (en presencia de AF)

Trivialidad de los $\in$-isomorfismos

- Otra consecuencia del axioma de la fundación es que el universo V no admite ningún $\in$-automorfismo no trivial:

Teorema (Trivialidad de los $\in$-isomorfismos)

(1) Sean T, T' dos clases transitivas. Si $\Phi : T \xrightarrow{\sim} T'$ realiza un $\in$-isomorfismo entre $(T, \in)$ y $(T', \in)$, es decir:

$$\Phi(y) \in \Phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad y \in x \qquad \text{(para todos } x, y \in T\text{)},$$

entonces $T = T'$ y $\Phi = \mathrm{id}_T$

(2) En particular, no hay ningún $\in$-automorfismo no trivial de $(V, \in)$

Demo. (1) Se demuestra por $\in$-inducción que $x \in T \Rightarrow \Phi(x) = x$ para todo $x \in V$. Luego se deduce que $\Phi = \mathrm{id}_T$ y $T' = T$. (2) Obvio. □

- **Obs.:** Existen modelos de ZF − AF con $\in$-automorfismos no triviales

Relaciones bien fundadas (1/2)

Definición (Relación bien fundada)

Sea U una clase. Se dice que una relación binaria $R(y,x)$ sobre U está bien fundada cuando:

(1) Para todo $x \in U$: $R^{-1}(x) := \{y \in U : R(y,x)\}$ es un conjunto

(2) Todo conjunto $X \subseteq U$ no vacío tiene un elemento R-minimal, i.e. un elemento $x \in X$ tal que $R^{-1}(x) \cap X = \varnothing$

- **Obs.:** Cuando U es un conjunto, no se necesita verificar (1), que se cumple automáticamente

Lema

Sea U una clase equipada con una relación binaria $R(y,x)$ bien fundada.

Entonces toda clase $C \subseteq U$ no vacía tiene un elemento R-minimal, i.e. un elemento $x \in C$ tal que $R^{-1}(x) \cap C = \varnothing$

Demo. Ejercicio

Relaciones bien fundadas (2/2)

Sea U una clase equipada con una relación binaria $R(y, x)$ bien fundada

Proposición (Razonamiento por R-inducción)

Dada una fórmula $\phi(x, \vec{z})$, tenemos que:

$$(\forall x \in U)[(\forall y \in R^{-1}(x))\, \phi(y, \vec{z}) \;\Rightarrow\; \phi(x, \vec{z})] \;\Rightarrow\; (\forall x \in U)\, \phi(x, \vec{z})$$

(donde $\vec{z}$ son parámetros cualesquiera)

Demo. Ejercicio

Proposición (Construcción de funcional por R-recursión)

Si F es una clase funcional de dominio V, entonces existe una clase funcional G de dominio U tal que

$$G(x) \;=\; F(\{G(y) : y \in R^{-1}(x)\}) \qquad (x \in U)$$

Demo. Ejercicio

Teorema de colapso de Mostowski

- Se dice que una relación binaria $E(y,x)$ sobre una clase U es extensional cuando

$$E^{-1}(x) = E^{-1}(x') \quad \Rightarrow \quad x = x' \qquad \text{(para todos } x, x' \in U\text{)}$$

Teorema (Colapso de Mostowski)

Si $E(y,x)$ es una relación binaria extensional y bien fundada sobre una clase U, entonces existe una clase transitiva M y una biyección $\Phi : U \xrightarrow{\sim} M$ que realiza un isomorfismo entre (U,E) y $(M,\in)$:

$$E(y,x) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(y) \in \Phi(x) \qquad \text{(para todos } x, y \in U\text{)}$$

Además, la clase transitiva M y la biyección $\Phi : U \xrightarrow{\sim} M$ son únicas

Demo. Se define la funcional $\Phi : U \to V$ por E-recursión por

$$\Phi(x) \;:=\; \{\Phi(y) : y \in E^{-1}(x)\} \qquad \text{(para todo } x \in U\text{)}$$

Se demuestra por E-inducción que la funcional Φ es inyectiva (usando el hecho que E es extensional), y luego se define $M := \mathrm{img}(\Phi)$. La unicidad de M y Φ es obvia. □

Relaciones bien fundadas y buenos órdenes

Se recuerda que una relación $R(y,x)$ sobre un conjunto A es:

- Irreflexiva cuando $(\forall x \in A)\ \neg R(x,x)$
- Transitiva cuando $(\forall x,y,z \in A)(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$
- Un orden estricto cuando R es irreflexiva y transitiva
- Conexa cuando $(\forall x,y \in A)(x \neq y \Rightarrow R(x,y) \vee R(y,x))$
- Bien fundada cuando:
$$(\forall X \subseteq A)(X \neq \varnothing \ \Rightarrow\ (\exists x \in X)(\forall y \in X)\ \neg R(y,x))$$
- Un buen orden estricto cuando R es un orden estricto y:
$$(\forall X \subseteq A)(X \neq \varnothing \ \Rightarrow\ (\exists x \in X)(\forall y \in X)(R(x,y) \vee x = y)$$

Proposición

Para todo conjunto A equipado con una relación binaria R:

$$R \text{ buen orden estricto} \quad \Leftrightarrow \quad R \text{ conexa y bien fundada}$$

Demo. Ejercicio

Simplificación de la definición de los ordinales

- Se recuerda que un ordinal es un conjunto transitivo en que la relación $\in$ es un buen orden estricto:

$$\begin{array}{rcll} \alpha \in On & \equiv & (\forall x \in \alpha)(\forall y \in x)(y \in \alpha) & \wedge \\ & & (\forall x \in \alpha)(x \notin x) & \wedge \\ & & (\forall x, y, z \in \alpha)(x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z) & \wedge \\ & & (\forall X \subseteq \alpha)(X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)(x \in y \vee x = y)) & \end{array}$$

- Pero bajo el axioma de fundación, la relación $\in$ está bien fundada en cualquier conjunto α. Por la Prop. anterior, un ordinal es cualquier conjunto transitivo en que la relación $\in$ es conexa:

$$\begin{array}{rcll} \alpha \in On & \equiv & (\forall x \in \alpha)(\forall y \in x)(y \in \alpha) & \wedge \\ & & (\forall x, y \in \alpha)(x \neq y \Rightarrow x \in y \vee y \in x) & \end{array}$$

  - Fórmula Δ_0 (= con cuantificaciones acotadas)

Plan

Unas definiciones...

1. El producto cartesiano (generalizado) de una familia de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$ está definido por:

$$\prod_{i\in I} A_i \;:=\; \{(a_i)_{i\in I} \;:\; (\forall i\in I)\; a_i\in A_i\}$$

2. Sea A un conjunto equipado con una relación de equivalencia $\sim$. Un sistema de representantes de $\sim$ es un conjunto $S\subseteq A$ tal que:

$$(\forall x\in A)(\exists! x_0\in S)\; x\sim x_0$$

3. Sean dos funciones $f: A\to B$ y $g: B\to A$ (A y B cualesquiera). Cuando $g\circ f = \mathrm{id}_A$, se dice que:
   - g es una inversa por la izquierda de f ($\Rightarrow$ g sobreyectiva)
   - f es una inversa por la derecha de g ($\Rightarrow$ f inyectiva)

4. Una función de elección sobre un conjunto A es una función $h : \mathfrak{P}^*(A)\to A$ (donde $\mathfrak{P}^*(A)=\mathfrak{P}(A)-\{\varnothing\}$) tal que:

$$(\forall X\in\mathfrak{P}^*(A))\; h(X)\in X$$

El axioma de elección (AC)

Proposición (en ZF sin infinitud/reemplazo/AF)

Las siguientes fórmulas son equivalentes:

(1) El producto de una familia de conjuntos no vacíos nunca es vacío
(2) Toda relación de equivalencia tiene un sistema de representantes
(3) Toda función sobreyectiva tiene una inversa por la derecha
(4) Todo conjunto tiene una función de elección

- Se puede demostrar que las 4 fórmulas anteriores (equivalentes) son independientes de la teoría de ZF. El axioma de elección (AC) se formula usando cualquier una de ésas, por ejemplo:

Axioma de elección (AC)

Todo conjunto tiene una función de elección:

$$\forall A \; (\exists h \in A^{\mathfrak{P}^*(A)})(\forall X \in \mathfrak{P}^*(A)) \; h(X) \in X$$

- **Notación:** ZFC := ZF + AC

Lema de Zorn y teorema de Zermelo

Lema de Zorn (con AC)

Sea A un conjunto ordenado. Si todas las cadenas de A están superiormente acotadas, entonces A tiene un elemento maximal

Variante (con hipótesis más débil)

Sea A un conjunto ordenado. Si todas las cadenas *bien ordenadas* de A están superiormente acotadas, entonces A tiene un elemento maximal

- **Ejercicio:** Usando el lema de Zorn (estándar), demostrar que si A cumple la hipótesis débil (para las cadenas bien ordenadas), entonces A también cumple la hipótesis fuerte (para todas las cadenas)

Teorema de Zermelo (con AC)

Todo conjunto tiene un buen orden

- ZF $(-$ AF$)$ $\vdash$ AC $\Leftrightarrow$ Lema de Zorn $\Leftrightarrow$ Teorema de Zermelo

Otras formulaciones del axioma de elección

Muchos teoremas de ZFC son equivalentes a AC. Por ejemplo:

- Lema de Zorn
- Teorema de Zermelo
- Para todo conjunto infinito: $A \sim A \times A$
- Para todos conjuntos A, B: $A \preceq B$ o $B \preceq A$
- Todo conjunto ordenado tiene una cadena maximal
- Todo conjunto ordenado tiene una anticadena maximal
- Todo anillo tiene un ideal maximal (= Teorema de Krull)
- Todo espacio vectorial tiene una base
- Todo conjunto no vacío tiene una estructura de grupo
- El producto cartesiano de cualquier familia de espacios topológicos conexos es un espacio topológico conexo
- El producto cartesiano de cualquier familia de espacios topológicos compactos es un espacio topológico compacto (= Teo. de Tychonov)

Aritmética de los cardinales (1/3)

- En ZFC, todo conjunto X tiene un cardinal, escrito $\mathrm{Card}(X)$ o $|X|$. Para todos X e Y, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} X \preceq Y & \Leftrightarrow & \mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y) \\ X \sim Y & \Leftrightarrow & \mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y) \end{array}$$

- Dados cardinales κ y μ, se definen

$$\begin{array}{rcll} \kappa + \mu & := & \mathrm{Card}(\kappa + \mu) & \text{(cardinal de la suma directa)} \\ \kappa\mu & := & \mathrm{Card}(\kappa \times \mu) & \text{(cardinal del producto cartesiano)} \\ \kappa^\mu & := & \mathrm{Card}\big(\kappa^\mu\big) & \text{(cardinal del espacio de funciones)} \end{array}$$

- Dada una familia $(\kappa_i)_{i \in I}$ de cardinales, se definen:

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i \in I} \kappa_i & := & \mathrm{Card}\Big(\displaystyle\sum_{i \in I} \kappa_i\Big) & \text{(cardinal de la suma directa)} \\ \displaystyle\prod_{i \in I} \kappa_i & := & \mathrm{Card}\Big(\displaystyle\prod_{i \in I} \kappa_i\Big) & \text{(cardinal del producto cartesiano)} \end{array}$$

Aritmética de los cardinales (2/3)

Proposición

(1) Para todos cardinales κ μ y ν:

$$
\begin{array}{ccc}
\kappa+\mu=\mu+\kappa & \kappa\mu=\mu\kappa & \kappa^{\mu+\nu}=\kappa^{\mu}\kappa^{\nu} \\
(\kappa+\mu)+\nu=\kappa+(\mu+\nu) & (\kappa\mu)\nu=\kappa(\mu\nu) & (\kappa^{\mu})^{\nu}=\kappa^{\mu\nu} \\
\kappa+0=0+\kappa=\kappa & \kappa\,0=0\,\kappa=0 & \kappa^{0}=1 \quad 0^{\mu}=0 \quad (\mu\geq 1) \\
\kappa(\mu+\nu)=\kappa\mu+\kappa\nu & \kappa\,1=1\,\kappa=\kappa & \kappa^{1}=\kappa \quad 1^{\mu}=1
\end{array}
$$

(2) Para todos cardinales κ, κ', μ y μ':

$$
\begin{array}{llll}
\kappa\leq\kappa' \;\Rightarrow\; \kappa+\mu\leq\kappa'+\mu & & \kappa\leq\kappa' & \Rightarrow\; \kappa^{\mu}\leq\kappa'^{\mu} \\
\kappa\leq\kappa' \;\Rightarrow\; \kappa\mu\leq\kappa'\mu & & \kappa\geq 1\wedge\mu\leq\mu' & \Rightarrow\; \kappa^{\mu}\leq\kappa^{\mu'}
\end{array}
$$

(3) Para todo cardinal κ y para toda familia $(\mu_i)_{i\in I}$ de cardinales:

$$
\kappa\left(\sum_{i\in I}\mu_i\right) = \sum_{i\in I}\kappa\mu_i \qquad\qquad \kappa^{\sum_{i\in I}\mu_i} = \prod_{i\in I}\kappa^{\mu_i}
$$

Aritmética de los cardinales (3/3)

Proposición

(1) Para todo cardinal infinito: $\kappa^2 = \kappa$

(2) Si κ, μ son cardinales infinitos y n un cardinal finito:

$$\kappa + \mu = \kappa\mu = \max(\kappa, \mu) \qquad \kappa + n = \kappa$$

$$\kappa n = \kappa^n = \kappa \quad (\text{si } n \geq 1) \qquad n^\mu = 2^\mu \quad (\text{si } n \geq 2)$$

(3) Si κ y μ son cardinales infinitos, entonces:

$$\max(\kappa, 2^\mu) \leq \kappa^\mu \leq \max(2^\kappa, 2^\mu)$$

$$\kappa^\kappa = 2^\kappa \qquad \kappa \leq 2^\mu \Rightarrow \kappa^\mu = 2^\kappa$$

Obs.: No hay ninguna fórmula sencilla para calcular κ^μ cuando $\kappa > 2^\mu$

Teorema (König)

Si $\kappa_i < \mu_i$ para todo $i \in I$, entonces: $$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \mu_i$$

Caso particular: $\kappa_i = 1,\ \mu_i = 2\ (i \in I) \Rightarrow \mathrm{Card}(I) < \mathrm{Card}(2^I)$ (Cantor)

Cardinal del continuo

- **Recordatorio:** $\kappa < 2^\kappa \; (= \mathrm{Card}(\mathfrak{P}(\kappa)))$ [Cantor 1878]

- **Cardinal del continuo:**

$$\mathfrak{c} := \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathfrak{P}(\omega)) = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

Proposición: $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ y $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$

- Como $\mathfrak{c} > \aleph_0$, tenemos que $\mathfrak{c} \geq \aleph_1$. ¿Qué hay de la igualdad?

Hipótesis del continuo (HC) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Hip. generalizada del cont. (HGC) $(\forall \alpha \in On) \; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

- **Jerarquía $\beth$:**

$$\beth_0 := \aleph_0 \qquad \beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha} \qquad \beth_\lambda := \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha \quad (\lambda \text{ límite})$$

- **HGC** $\Leftrightarrow$ $(\forall \alpha \in On) \; \aleph_\alpha = \beth_\alpha$

Conjuntos finitos, infinitos y Dedekind-infinitos

Definición (Conjuntos finitos e infinitos)

Un conjunto A es:

- finito cuando es equipotente con algún ordinal finito
- infinito cuando no es equipotente con ningún ordinal finito
- Dedekind-infinito (o D-infinito) cuando existe una función $f : A \to A$ inyectiva y no sobreyectiva

- Es claro (sin AC) que todo conjunto Dedekind-infinito es infinito. Y con AC, todo conjunto A tiene un cardinal, luego:
  - O bien $\mathrm{Card}(A) < \aleph_0$, y A es finito
  - O bien $\mathrm{Card}(A) \geq \aleph_0$, y A es Dedekind-infinito
- Pero en ZF, no se puede mostrar que: infinito $\Rightarrow$ Dedekind-infinito
- De hecho, hay modelos de ZF (sin AC) en que existen conjuntos infinitos que no son Dedekind-infinitos

El axioma de elección numerable (AC_ω)

Existen formas más débiles de AC, por ejemplo:

Axioma de elección numerable (AC_ω)

El producto de una familia numerable de conjuntos no vacíos no es vacío:

$$\forall (A_n)_{n\in\omega} \left[(\forall n \in \omega)\, A_n \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \left(\prod_{n\in\omega} A_n\right) \neq \varnothing \right]$$

- **Ejercicio:**

(1) Demostrar en ZF (sin AC_ω) que todo conjunto D-infinito es infinito (es decir: que no es equipotente con ningún ordinal finito)

(2) Demostrar en $\mathrm{ZF} + \mathrm{AC}_\omega$ que todo conjunto infinito es D-infinito

(3) Demostrar en $\mathrm{ZF} + \mathrm{AC}_\omega$ que la unión de cualquier familia numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable

El axioma de elección dependiente (DC) (1/2)

Otra forma débil de AC es la siguiente:

Axioma de elección dependiente (DC)

$$(\forall A \neq \varnothing)(\forall R \subseteq A \times A)\,[(\forall x \in A)(\exists y \in A)\, x\, R\, y \;\Rightarrow\; (\exists (x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega)(\forall n \in \omega)\, x_n\, R\, x_{n+1}]$$

- Variante con punto inicial fijado (DC_0):

$$\forall A\,(\forall R \subseteq A \times A)\,[(\forall x \in A)(\exists y \in A)\, x\, R\, y \;\Rightarrow\; (\forall x \in A)(\exists (x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega)(x_0 = x \wedge (\forall n \in \omega)\, x_n\, R\, x_{n+1})]$$

- **Ejercicio:**

  (1) Demostrar en ZF que: AC $\Rightarrow$ DC y $\mathrm{DC}_0 \Rightarrow \mathrm{AC}_\omega$

  (2) Demostrar en ZF que: DC $\Leftrightarrow$ DC_0

El axioma de elección dependiente (DC) (2/2)

- El axioma de elección dependiente (DC) se usa mucho en análisis, notablemente para extraer sucesiones convergentes
- Una aplicación típica de DC es la siguiente:

Teorema (Baire)

En un espacio métrico completo X, toda intersección numerable de subconjuntos abiertos densos de X es un subconjunto denso

Demo: Ejercicio

- En 1977, C. Blair demostró que el teorema de Baire implica DC
- Otra consecuencia de DC es la siguiente:

Proposición

Una relación binaria $R \subseteq X^2$ es bien fundada si y sólo si no existe ninguna sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \in X^\omega$ tal que $R(x_{n+1}, x_n)$ para todo $n \in \omega$