Una introducción al forcing

2. Modelos de ZF

Alexandre Miquel

agosto de 2024

Plan

Plan

Lenguajes y estructuras (recordatorio)

Definición (Lenguaje de 1^er orden)

- Un lenguaje (de 1^er orden) está definido a partir de:
  - un conjunto de símbolos de función (notación: f, g, h, etc.)
  - un conjunto de símbolos de predicado (notación: p, q, r, etc.)

  en que cada símbolo s (función/predicado) viene con su aridad $\sharp s$ $(\in \mathbb{N})$
- Dichos símbolos definen los términos (notación: t, u, v, etc.) y las fórmulas (notación: φ, ψ, χ, etc.) del lenguaje considerado

Dado un lenguaje de 1^er orden $\mathscr{L}$:

Definición ($\mathscr{L}$-estructura)

Una $\mathscr{L}$-estructura es un conjunto $\mathscr{M} \neq \varnothing$ equipado con:

- una función $f^{\mathscr{M}} : \mathscr{M}^k \to \mathscr{M}$ para cada símbolo de función f $(\sharp f = k)$
- una relación $p^{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}^k$ para cada símbolo de predicado p $(\sharp p = k)$

Interpretación del lenguaje (recordatorio)

Dados un lenguaje $\mathscr{L}$ y una $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$, se interpretan:

- cada término $t(\vec{x})$ con parámetros $\vec{a} \in \mathscr{M}$ por un elemento $[\![t(\vec{a})]\!]^{\mathscr{M}} \in \mathscr{M}$:

$$\begin{aligned} [\![a]\!]^{\mathscr{M}} &:= a \qquad\qquad (a \in \mathscr{M} \text{ parámetro}) \\ [\![f(t_1(\vec{a}),\dots,t_k(\vec{a}))]\!]^{\mathscr{M}} &:= f^{\mathscr{M}}([\![t_1(\vec{a})]\!]^{\mathscr{M}},\dots,[\![t_k(\vec{a})]\!]^{\mathscr{M}}) \end{aligned}$$

- cada fórmula $\varphi(\vec{x})$ con parámetros $\vec{a} \in \mathscr{M}$ por una relación $\mathscr{M} \models \varphi(\vec{a})$:

$$\begin{aligned} \mathscr{M} \models t(\vec{a}) = u(\vec{a}) &:\equiv [\![t(\vec{a})]\!]^{\mathscr{M}} = [\![u(\vec{a})]\!]^{\mathscr{M}} \\ \mathscr{M} \models p(t_1(\vec{a}),\dots,t_k(\vec{a})) &:\equiv \left([\![t_1(\vec{a})]\!]^{\mathscr{M}},\dots,[\![t_k(\vec{a})]\!]^{\mathscr{M}}\right) \in p^{\mathscr{M}} \\ \mathscr{M} \models \neg\varphi(\vec{a}) &:\equiv \mathscr{M} \not\models \varphi(\vec{a}) \\ \mathscr{M} \models \varphi(\vec{a}) \wedge \psi(\vec{a}) &:\equiv \mathscr{M} \models \varphi(\vec{a}) \text{ y } \mathscr{M} \models \psi(\vec{a}) \\ \mathscr{M} \models \varphi(\vec{a}) \vee \psi(\vec{a}) &:\equiv \mathscr{M} \models \varphi(\vec{a}) \text{ o } \mathscr{M} \models \psi(\vec{a}) \\ \mathscr{M} \models \varphi(\vec{a}) \Rightarrow \psi(\vec{a}) &:\equiv \mathscr{M} \models \varphi(\vec{a}) \text{ implica } \mathscr{M} \models \psi(\vec{a}) \\ \mathscr{M} \models \forall x\, \varphi(x,\vec{a}) &:\equiv \mathscr{M} \models \varphi(a_0,\vec{a}) \text{ para todo } a_0 \in \mathscr{M} \\ \mathscr{M} \models \exists x\, \varphi(x,\vec{a}) &:\equiv \mathscr{M} \models \varphi(a_0,\vec{a}) \text{ para algún } a_0 \in \mathscr{M} \end{aligned}$$

Teorías y modelos (recordatorio)

Definición (Teoría de 1$^{\text{er}}$ orden)

- Una teoría $\mathscr{T}$ (de 1$^{\text{er}}$ orden) está definida a partir de:
  - su lenguaje $\mathscr{L}$ (de 1$^{\text{er}}$ orden)
  - sus axiomas (= fórmulas cerradas de $\mathscr{L}$)
- Una fórmula φ de $\mathscr{L}$ es un teorema de $\mathscr{T}$ cuando es derivable a partir de los axiomas de $\mathscr{T}$. Notación: $\mathscr{T} \vdash \varphi$ ("$\mathscr{T}$ demuestra φ")

Dada una teoría de 1$^{\text{er}}$ orden $\mathscr{T}$ sobre un lenguaje $\mathscr{L}$:

Definición (Modelo de Tarski de $\mathscr{T}$)

Un modelo de Tarski de $\mathscr{T}$ es una $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$ tal que $\mathscr{M} \models \varphi$ para todo axioma φ de $\mathscr{T}$. Notación: $\mathscr{M} \models \mathscr{T}$

Más generalmente, tenemos que $\mathscr{M} \models \varphi$ para todo teorema φ de $\mathscr{T}$ (corrección)

Los principales teoremas (recordatorio)

Dada una teoría de 1er orden $\mathscr{T}$ sobre un lenguaje $\mathscr{L}$:

1. **Completitud:** $\mathscr{T}$ es consistente sii $\mathscr{T}$ tiene un modelo

   Corolario: $\mathscr{T} \vdash \varphi$ sii $\mathscr{M} \models \varphi$ para todo $\mathscr{M} \models \mathscr{T}$

2. **Compacidad:** $\mathscr{T}$ tiene un modelo sii cada conjunto finito de axiomas de $\mathscr{T}$ tiene un modelo

3. **Löwenheim-Skolem:** Si $\mathscr{T}$ tiene un modelo infinito $\mathscr{M}_0$, entonces $\mathscr{T}$ tiene un modelo $\mathscr{M}_\kappa$ de cardinal κ para cada cardinal infinito $\kappa \geq \mathrm{Card}(\mathscr{L})^*$. Además, se puede construir $\mathscr{M}_\kappa$ tal que:
   - $\mathscr{M}_\kappa$ es elementalmente equivalente a $\mathscr{M}_0$
   - $\mathscr{M}_\kappa \subseteq \mathscr{M}_0$, cuando $\kappa \leq \mathrm{Card}(\mathscr{M}_0)$
   - $\mathscr{M}_\kappa \supseteq \mathscr{M}_0$, cuando $\kappa \geq \mathrm{Card}(\mathscr{M}_0)$

---

*Aquí: $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) = \mathrm{Card}(\{\text{fórmulas de } \mathscr{L}\}) = \max(\mathrm{Card}(\{\text{símbolos de } \mathscr{L}\}), \aleph_0)$

El conjunto de las fórmulas (internas) (1/2)

Para formalizar la teoría de modelos en ZF, se internaliza el lenguaje de ZF adentro de ZF, con un conjunto $Form$ de las fórmulas (internas)

- Las variables son representadas por ordinales finitos: $Var := \omega$.
  Notación: $\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}, \ldots \in Var$ (variables internas)

- Sólo se consideran fórmulas construidas a partir de $=$, $\in$, $\neg$, $\vee$ y $\exists$, usando la codificación:

$$\begin{aligned} \mathtt{x} \doteq \mathtt{x}' &:= (0, (\mathtt{x}, \mathtt{x}')) \\ \mathtt{x} \mathrel{\dot\in} \mathtt{x}' &:= (1, (\mathtt{x}, \mathtt{x}')) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot\neg\, f &:= (2, f) \\ f_1 \mathrel{\dot\vee} f_2 &:= (3, (f_1, f_2)) \\ (\dot\exists\, \mathtt{x})\, f &:= (4, (\mathtt{x}, f)) \end{aligned}$$

  (donde $\doteq$, $\dot\in$, $\dot\neg$, $\dot\vee$, $\dot\exists$ son los símbolos internos)

- Las otras construcciones se deducen por la leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned} f_1 \mathrel{\dot\wedge} f_2 &:= \dot\neg(\dot\neg\, f_1 \mathrel{\dot\vee} \dot\neg\, f_2) &&= (2, (3, ((2, f_1), (2, f_2)))) \\ f_1 \mathrel{\dot\Rightarrow} f_2 &:= \dot\neg\, f_1 \mathrel{\dot\vee} f_2 &&= (3, ((2, f_1), f_2)) \\ (\dot\forall\, \mathtt{x})\, f &:= \dot\neg(\dot\exists\, \mathtt{x})\, \dot\neg\, f &&= (2, (4, (\mathtt{x}, (2, f)))) \end{aligned}$$

El conjunto de las fórmulas (internas) (2/2)

- Se considera la función $\Phi : \mathfrak{P}(V_\omega) \to \mathfrak{P}(V_\omega)$ definida por:

$$\begin{aligned} \Phi(X) \;=\; & (\{0\} \times (\mathit{Var} \times \mathit{Var})) \;\cup\; (\{1\} \times (\mathit{Var} \times \mathit{Var})) \;\cup \\ & (\{2\} \times X) \;\cup\; (\{3\} \times (X \times X)) \;\cup\; (\{4\} \times (\mathit{Var} \times X)) \end{aligned}$$

  y se define el conjunto Form de las fórmulas (internas) como el menor punto fijo de la función Φ:

$$\mathit{Form} \;:=\; \bigcup_{n \in \omega} \Phi^n(\varnothing) \qquad (\subseteq\; V_\omega)$$

  (donde $\Phi^n(\varnothing)$ es el conjunto de las fórmulas de altura $\leq n$)

- Para cada fórmula (interna) $f \in \mathit{Form}$, se escribe $FV(f)$ ($\subseteq \mathit{Var}$) a su conjunto de variables libres, y para todo $n \in \omega$ se define

$$\mathit{Form}_n \;:=\; \{f \in \mathit{Form} \;:\; FV(f) \subseteq n\}$$

  con $n = \{0, \ldots, n-1\} = \{\mathtt{x}_0, \ldots, \mathtt{x}_{n-1}\}$

- Form_0 es el conjunto de las fórmulas (internas) cerradas

Codificación de las fórmulas (externas)

- A cada fórmula φ (externa) se asocia su código $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathit{Form}$, usando la correspondencia descrita en las diapositivas anteriores
- Por ejemplo, la fórmula $\forall z\,(z \in x \Rightarrow z = y)$ está representada en el conjunto Form por el código

$$\begin{aligned}\ulcorner\forall z\,(z \in x \Rightarrow z = y)\urcorner &= \dot{\forall}\,\mathbf{z}\,(\mathbf{z} \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{x} \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \mathbf{z} \mathrel{\dot{=}} \mathbf{y}) \\ &= \dot{\neg}\,\dot{\exists}\,\mathbf{z}\ \dot{\neg}(\dot{\neg}\,\mathbf{z} \mathrel{\dot{\in}} \mathbf{x} \mathrel{\dot{\vee}} \mathbf{z} \mathrel{\dot{=}} \mathbf{y}) \\ &= (2,(4,(\mathbf{z},(2,(3,(2,(1,(\mathbf{z},\mathbf{x}))),(0,(\mathbf{z},\mathbf{y})))))))\end{aligned}$$

- Para toda fórmula φ tenemos que: $\mathsf{ZF} \vdash \ulcorner\varphi\urcorner \in \mathit{Form}$
- La correspondencia $\varphi \mapsto \ulcorner\varphi\urcorner$ no es inyectiva (pues $\dot{\wedge}$, $\dot{\Rightarrow}$, $\dot{\forall}$ definidos a partir de $\dot{\neg}$, $\dot{\vee}$, $\dot{\exists}$), pero sólo identifica fórmulas equivalentes:

$$\ulcorner\varphi\urcorner = \ulcorner\psi\urcorner \quad \text{implica} \quad \varphi \equiv_{\mathsf{LK}} \psi$$

- No es posible expresar en ZF que $\varphi \mapsto \ulcorner\varphi\urcorner$ es sobreyectiva, y existen extensiones (conservativas) de ZF en que no lo es

Evaluación de una fórmula

Dado un conjunto M con una relación binaria $E \subseteq M^2$:

- Una valuación en M es una función $\rho \in M^{Var}$
- Dados $\rho \in M^{Var}$, $\mathtt{x} \in Var$ y $a \in M$, se define:

$$(\rho, \mathtt{x} \leftarrow a) \ := \ (\rho_{\restriction Var - \{\mathtt{x}\}}) \cup \{(\mathtt{x}, a)\}$$

Definición (Función de verdad)

Se define la función de verdad $Val_{(M,E)} : Form \to \mathfrak{P}(M^{Var})$ por recursión bien fundada sobre el tamaño de $f \in Form$, escribiendo:

$$\begin{aligned}
Val_{(M,E)}(\mathtt{x} \doteq \mathtt{y}) &:= \{\rho \in M^{Var} : \rho(\mathtt{x}) = \rho(\mathtt{y})\} \\
Val_{(M,E)}(\mathtt{x} \mathrel{\dot\in} \mathtt{y}) &:= \{\rho \in M^{Var} : E(\rho(\mathtt{x}), \rho(\mathtt{y}))\} \\
Val_{(M,E)}(\dot\neg f) &:= Val_{(M,E)}(f)^c \\
Val_{(M,E)}(f_1 \mathrel{\dot\vee} f_2) &:= Val_{(M,E)}(f_1) \cup Val_{(M,E)}(f_2) \\
Val_{(M,E)}((\dot\exists \mathtt{x})\, f) &:= \{\rho \in M^{Var} : (\exists a \in M)\, (\rho, \mathtt{x} \leftarrow a) \in Val_{(M,E)}(f)\}
\end{aligned}$$

Predicado de satisfacción

Lema

Para todos $f \in Form$ y $\rho, \rho' \in M^{Var}$ tales que $\rho_{\restriction FV(f)} = \rho'_{\restriction FV(f)}$:

$$\rho \in Val_{(M,E)}(f) \;\Leftrightarrow\; \rho' \in Val_{(M,E)}(f)$$

- En particular, para todo $f \in Form_0$:
  - o bien $Val_{(M,E)}(f) = \varnothing$ ("f es falsa en (M,E)")
  - o bien $Val_{(M,E)}(f) = \mathfrak{P}(M^{Var})$ ("f es verdadera en (M,E)")

Definición (Predicado de satisfacción)

Dada una fórmula $f = f(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n)$ con variables libres $\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n$ y dados parámetros $a_1, \ldots, a_n \in M$, se escribe:

$$(M,E) \models f(a_1, \ldots, a_n) \;:\equiv$$
$$(\exists \rho \in M^{Var})(\rho(\mathtt{x}_1) = a_1 \wedge \cdots \wedge \rho(\mathtt{x}_n) = a_n \wedge \rho \in Val_{(M,E)}(f))$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall \rho \in M^{Var})(\rho(\mathtt{x}_1) = a_1 \wedge \cdots \wedge \rho(\mathtt{x}_n) = a_n \Rightarrow \rho \in Val_{(M,E)}(f))$$

Teorema de Löwenheim-Skolem (1/3)

Teorema de Löwenheim-Skolem descendente (con AC)

Sea M un conjunto equipado con una relación binaria $E \subseteq M^2$.
Para todo $P \subseteq M$, existe $Q \subseteq M$ tal que:

(1) $Q \supseteq P$ y $|Q| \leq \max(|P|, \aleph_0)$

(2) Para toda fórmula $f = f(\vec{\mathrm{x}}) \in \mathit{Form}$ con variables libres $\vec{\mathrm{x}}$:

$$(\forall \vec{a} \in Q)[(Q, E) \models f(\vec{a}) \quad \Leftrightarrow \quad (M, E) \models f(\vec{a})]$$

Observaciones:

- El teorema expresa que cada subconjunto $P \subseteq M$ se puede extender en un subconjunto $Q \subseteq M$ de mismo cardinal que P (si P infinito) tal que (Q, E) es una subestructura elemental de (M, E)
- Aquí, AC sólo sirve para construir una función de elección sobre M. En ZF (sin AC), se necesita agregar la hipótesis que el conjunto M tiene una función de elección (o equivalentemente que M es bien ordenable)

Teorema de Löwenheim-Skolem (2/3)

Demo. Sea una función de elección $h : \mathfrak{P}^*(M) \to M$.

Se define una sucesión $(Q_k)_{k\in\omega}$ de subconjuntos de M a partir de $Q_0 := P$.
Para todo $k \in \omega$, se define Q_{k+1} como el conjunto de todos los elementos de M de la forma

$$h(\{a \in M \ : \ (M,E) \models f(a, a_1, \ldots, a_n)\})$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $f \in Form_{n+1}$ y $a_1, \ldots, a_n \in Q_k$ son tales que

$$\{a \in M \ : \ (M,E) \models f(a, a_1, \ldots, a_n)\} \neq \varnothing$$

Tenemos que $Q_k \subseteq Q_{k+1}$. En efecto, dado $a \in Q_k$ y escribiendo $f(\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1) := \mathtt{x}_0 \doteq \mathtt{x}_1$ ($\in Form_2$), se observa que $\{a_0 \in M \ : \ (M,E) \models f(a_0, a)\} = \{a\}$, y por lo tanto:

$$a \ = \ h(\{a_0 \in M \ : \ (M,E) \models f(a_0, a)\}) \ \in \ Q_{k+1}.$$

También se observa que

$$|Q_{k+1}| \ \leq \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |Form_{n+1} \times Q_k^n| \ \leq \ \max(|Q_k|, \aleph_0).$$

Ahora se escribe $Q := \bigcup_{k\in\omega} Q_k$ (unión creciente). Es claro que $Q \supseteq P$, y por inducción sobre $k \in \omega$, se verifica que $|Q_k| \leq \max(|P|, \aleph_0)$. Por lo tanto: $|Q| \leq \max(|P|, \aleph_0)$. (...)

Teorema de Löwenheim-Skolem (3/3)

Demo (continuación y fin). Ahora se trata de demostrar que

$$(\forall \vec{a} \in Q)[(Q,E) \models f(\vec{a}) \quad \Leftrightarrow \quad (M,E) \models f(\vec{a})]$$

para toda fórmula $f = f(\vec{a}) \in Form$ con variables libres $\vec{\mathrm{x}}$.

Para ello, se razona por inducción sobre la estructura de f. Se supone que la equivalencia ya se cumple para las subfórmulas de f (HI) y se distinguen los siguientes casos:

- Si f es de la forma $\mathrm{x}_1 \doteq \mathrm{x}_2$ o $\mathrm{x}_1 \mathrel{\dot{\in}} \mathrm{x}_2$, la equivalencia es obvia.
- Si f es una negación o una disyunción, la equivalencia se deduce directamente de HI.
- Se supone ahora que $f(\vec{\mathrm{x}}) = (\dot{\exists}\, \mathrm{x}_0) f_0(\mathrm{x}_0, \vec{\mathrm{x}})$, y se consideran parámetros $\vec{a} \in Q$.

  Implicación directa Supongamos que $(Q,E) \models f(\vec{a})$, es decir: $(Q,E) \models f_0(a_0, \vec{a})$ para algún $a_0 \in Q$. Por HI tenemos que $(M,E) \models f_0(a_0, \vec{a})$, y luego $(M,E) \models f(\vec{a})$ (pues $a_0 \in Q \subseteq M$).

  Implicación recíproca Supongamos que $(M,E) \models f(\vec{a})$, es decir: $(M,E) \models f_0(a_0, \vec{a})$ para algún $a_0 \in M$. Como $\vec{a} \in Q = \bigcup_{k \in \omega} Q_k$ (unión creciente), existe un índice $k \in \omega$ tal que $\vec{a} \in Q_k$ (i.e. todos los parámetros están en el mismo Q_k).

  Por lo anterior, es claro que $a_0 \in \{a \in M \,:\, (M,E) \models f_0(a, \vec{a})\} \neq 0$, lo que permite considerar el elemento $a_0' := h(\{a \in M \,:\, (M,E) \models f_0(a, \vec{a})\}) \ \in\ Q_{k+1}$.

  Por construcción, tenemos que $a_0', \vec{a} \in Q$ y $(M,E) \models f(a_0', \vec{a})$. Por HI se deduce que $(Q,E) \models f_0(a_0', \vec{a})$, y luego $(Q,E) \models f(\vec{a})$ (pues $a_0' \in Q$). □

Modelos y consistencia

Definición (Modelo)

Sea $F \subseteq Form_0$ un conjunto de fórmulas cerradas.

Un modelo de F es un par (M, E) formado por un conjunto $M \neq \varnothing$ y una relación $E \subseteq M^2$ que satisfacen todas las fórmulas de F:

$$(M, E) \models F \quad :\equiv \quad M \neq \varnothing \ \wedge \ E \subseteq M^2 \ \wedge \ (\forall f \in F)\,(M, E) \models f$$

- También se puede definir en ZF (ejercicio) un predicado $F \vdash f$ que expresa que una fórmula $f \in Form_0$ es derivable (en LK) a partir de un conjunto de fórmulas $F \subseteq Form_0$
- Se escribe $Cons(F) \ :\equiv \ (\exists f \in Form_0)\, F \nvdash f$ ("F es consistente")

Proposición (en ZF)

Todo conjunto de fórmulas que tiene un modelo es consistente:

$$(\forall F \subseteq Form_0)\big[(\exists M\, \exists E\, (M, E) \models F) \ \Rightarrow \ Cons(F)\big]$$

Pruebas de consistencia absoluta

- Una prueba de la fórmula $Cons(F)$ en ZF es una prueba de consistencia absoluta de la teoría F ($\subseteq Form_0$) adentro de ZF.

  Notación: $F < \mathrm{ZF}$

- **Ejemplo:** Sea $Z \subseteq Form_0$ el conjunto de (las codificaciones de) los axiomas de la teoría de Zermelo (= ZF − reemplazo). Tenemos que:

Proposición (Z < ZF): $(V_{2\omega}, \in) \models Z$, y por lo tanto: $Cons(Z)$

Demo. Se recuerda que $V_{2\omega} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{P}^n(V_\omega)$, con $V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{P}^n(\varnothing)$, y se observa que:

- $(V_{2\omega}, \in)$ cumple el axioma de extensionalidad, pues $V_{2\omega}$ es un conjunto transitivo.
- $(V_{2\omega}, \in)$ cumple el axioma de pares, pues $(\forall a, b \in V_{2\omega})\ \{a, b\} \in V_{2\omega}$.
- $(V_{2\omega}, \in)$ cumple todos los axiomas de comprensión, pues $(\forall a \in V_{2\omega})(\forall b \subseteq a)\ b \in V_{2\omega}$.
- $(V_{2\omega}, \in)$ cumple el axioma de unión, pues $(\forall a \in V_{2\omega})\ \bigcup a \in V_{2\omega}$.
- $(V_{2\omega}, \in)$ cumple el axioma de potencia, pues $(\forall a \in V_{2\omega})\ \mathfrak{P}(a) \in V_{2\omega}$.
- $(V_{2\omega}, \in)$ cumple el axioma de infinito, pues $\omega \in V_{\omega+1} \subseteq V_{2\omega}$.
- $(V_{2\omega}, \in)$ cumple el axioma de fundación, pues $\in$ está bien fundada en $V_{2\omega}$. $\square$

Límites de los modelos conjuntistas

- El 2^{do} teorema de incompletitud de Gödel expresa que una teoría $\mathscr{T}$ que es recursiva y aritmética (como PA, Z o ZF) no puede demostrar su propia consistencia, salvo si $\mathscr{T}$ es inconsistente:

$$\mathscr{T} \vdash Cons(\mathscr{T}) \quad \text{implica} \quad \mathscr{T} \vdash \bot$$

- Por lo tanto, si ZF es consistente, es imposible de hallar (en ZF) un conjunto $M \neq \varnothing$ equipado con una relación binaria $E \subseteq M^2$ tales que $(M, E) \models ZF$
- Por esta razón, vamos a considerar en lo que sigue una noción de modelo (M, E) más general, en que M puede ser una clase propia
- Veremos que dicha noción de modelo es más adecuada para obtener pruebas de consistencia relativa (entre varios sistemas)
  - Necesidad de introducir la noción de relativización

Plan

Relativización de una fórmula

- Sea M una clase equipada con una relación binaria $E \subseteq M^2$
- Se asocia a cada fórmula φ (externa) otra fórmula escrita $\varphi^{M,E}$ y llamada fórmula φ relativizada al conjunto M y a la relación E
- Formalmente, la fórmula $\varphi^{M,E}$ está definida por recursión (externa) sobre la fórmula φ, usando las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
(x = y)^{M,E} &\quad :\equiv \quad x = y \\
(x \in y)^{M,E} &\quad :\equiv \quad E(x, y) \\
(\neg\varphi)^{M,E} &\quad :\equiv \quad \neg\varphi^{M,E} \\
(\varphi \vee \psi)^{M,E} &\quad :\equiv \quad \varphi^{M,E} \vee \psi^{M,E} \\
(\exists x\, \varphi(x))^{M,E} &\quad :\equiv \quad (\exists x \in M)\, \varphi^{M,E}(x)
\end{aligned}
$$

(y de modo similar para $\wedge$, $\Rightarrow$ y $\forall$)

Obs.: Las variables libres de la fórmula $\varphi^{M,E}$ son las de la fórmula φ, más (cuando existen) los parámetros de las clases M y E

- Cuando E es $\in$ (pertenencia), se escribe φ^{M} en lugar de $\varphi^{M,\in}$

Relativización y satisfacción

- Cuando M es un conjunto, la operación $\varphi \mapsto \varphi^{M,E}$ está vinculada con el predicado $(M,E) \models f(\vec{a})$ del modo siguiente:

Lema (Relativización y satisfacción)

Sea M un conjunto equipado con una relación binaria $E \subseteq M^2$.
Para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, tenemos que:

$$(\forall a_1, \ldots, a_n \in M)\big(\varphi^{M,E}(a_1, \ldots, a_n) \ \Leftrightarrow\ (M,E) \models \lceil\varphi\rceil(a_1, \ldots, a_n)\big)$$

Demo. Por inducción externa sobre φ. □

- **Obs.:** En la equivalencia

$$\varphi^{M,E}(a_1, \ldots, a_n) \ \Leftrightarrow\ (M,E) \models \lceil\varphi\rceil(a_1, \ldots, a_n)$$

se observa que el lado izquierdo no está definido cuando $\varphi \in \mathit{Form}$, mientras el lado derecho no lo está cuando M es una clase propia

- En conclusión, sólo tenemos dos opciones:
  (1) Evaluar una fórmula interna en un conjunto $\Rightarrow$ satisfacción
  (2) Evaluar una fórmula externa en una clase $\Rightarrow$ relativización

La verdad no es definible

- La imposibilidad de evaluar una fórmula interna en una clase propia está vinculada con un teorema famoso de Tarski, que expresa que la verdad (de un sistema formal) no es definible (en el mismo sistema formal)
- En ZF, se llama predicado de verdad a toda fórmula $T(x)$ tal que

$$T(\lceil\varphi\rceil) \;\Leftrightarrow\; \varphi \qquad\qquad \text{(para toda fórmula cerrada } \varphi\text{)}$$

Teorema (Tarski)

No existe ningún predicado de verdad en el lenguaje de ZF

Demo. Supongamos dado un predicado de verdad $T(x)$ en el lenguaje de ZF.

Internalizando la codificación $\varphi \mapsto \lceil\varphi\rceil$ adentro de ZF, se puede definir en ZF una función $\delta : Form_1 \to Form_0$ tal que $\delta(\lceil\varphi(x)\rceil) = \lceil\varphi(\lceil\varphi(x)\rceil)\rceil$ para toda fórmula externa $\varphi(x)$.

Ahora se considera la fórmula $\psi(x) \;:\equiv\; \neg T(\delta(x))$, y se observa que

$$\psi(\lceil\psi(x)\rceil) \;\Leftrightarrow\; \neg T(\delta(\lceil\psi(x)\rceil)) \;\Leftrightarrow\; \neg T(\lceil\psi(\lceil\psi(x)\rceil)\rceil) \;\Leftrightarrow\; \neg\psi(\lceil\psi(x)\rceil)$$

¡Contradicción! □

Modelos de clases (1/2)

- Sea M una clase equipada con una relación binaria $E \subseteq M^2$.
  Dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parámetros $a_1, \ldots, a_n \in M$, se usa la notación:

$$(M, E) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad :\equiv \quad \varphi^{M,E}(a_1, \ldots, a_n)$$

Obs.: Coincide con $(M, E) \models \lceil\varphi\rceil(a_1, \ldots, a_n)$ cuando M es un conjunto.

Definición (Modelo de clase)

(1) Un modelo (de clase) es un par (M, E) (intuitivo) formado por una clase $M \neq \varnothing$ (posiblemente propia) y una relación binaria $E \subseteq M^2$

(2) Dada una teoría $\mathscr{T}$ sobre el lenguaje de ZF, se llama modelo de $\mathscr{T}$ a todo modelo (M, E) tal que $(M, E) \models \varphi$ para cada axioma de $\mathscr{T}$.

Notación: $(M, E) \models \mathscr{T}$ (= esquema de hipótesis en ZF)

- **Ejemplos triviales:**
  $(V, \in) \models$ ZF (en ZF)
  $(V, \in) \models$ ZFC (en ZFC)

Modelos de clases (2/2)

Lema (Corrección de las reglas de deducción)

Sea M una clase equipada con una relación binaria $E \subseteq M^2$.
Para todo secuente $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ derivable en NK, el secuente

$$M \neq \varnothing,\ \vec{x} \in M,\ \Gamma^{M,E}(\vec{x}) \ \vdash\ \varphi^{M,E}(\vec{x})$$

también es derivable en NK

Demo. Por inducción (externa) sobre la derivación del secuente $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$. □

Teorema (Corrección)

Sean $\mathscr{T}$ una teoría de 1er orden sobre el lenguaje de ZF,
M una clase no vacía y $E \subseteq M^2$ una relación binaria sobre M.

Si $\underbrace{(M, E) \models \mathscr{T}}_{\text{esquema de hip. en ZF(C)}}$, entonces $\underbrace{(M, E) \models \varphi \text{ para todo teorema } \varphi \text{ de } \mathscr{T}}_{\text{esquema de conclusión en ZF(C)}}$

Pruebas de consistencia relativa

- Un modelo (M, E) de una teoría $\mathscr{T}$ (sobre el lenguaje de ZF) definido adentro de ZF permite transformar cualquier inconsistencia de $\mathscr{T}$ en una inconsistencia de ZF

- En efecto, si: $\mathscr{T} \vdash \exists x\,(x \neq x)$ (inconsistencia en $\mathscr{T}$)
  entonces: (ZF $\vdash$) $(M, E) \models \exists x\,(x \neq x)$ (teorema de corrección)
  es decir: (ZF $\vdash$) $(\exists x \in M)\ x \neq x$ (inconsistencia en ZF)

- Tal razonamiento constituye una prueba de consistencia relativa de la teoría $\mathscr{T}$ con respecto a ZF. **Notación:** $\mathscr{T} \leq$ ZF

- **Obs.:** En lo anterior, se puede reemplazar ZF por cualquier teoría de conjuntos en que se puede definir el modelo (M, E)

Ejemplo: consistencia relativa del axioma de fundación

- Sea ZF$^-$:= ZF − AF (ZF sin fundación)
- En ZF$^-$, se define la jerarquía acumulativa $(V_\alpha)_{\alpha\in On}$ de modo usual, observando que su unión $V := \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$ no coincide necesariamente con la clase universal $\mathscr{U} := \{x : x = x\}$:

$$\mathsf{ZF}^- \nvdash V = \mathscr{U}$$

- Sin embargo, tenemos que:

Proposición: $(V, \in) \models \mathsf{ZF}$ (en ZF$^-$)

Demo. Ejercicio

- En conclusión: ZF $\leq$ ZF$^-$ (consistencia relativa)

  y como: ZF$^-$ $\leq$ ZF (por inclusión)

  se deduce que: ZF $\approx$ ZF$^-$ (equiconsistencia)

Modelos transitivos

Definición

Se dice que un modelo (M, E) es:

- Extensional cuando $(\forall x, x' \in M)(E^{-1}(x) = E^{-1}(x') \Rightarrow x = x')$
  equivalente a: $(M, E) \models$ "axioma de extensionalidad"
- Bien fundado cuando la relación $E \subseteq M^2$ está bien fundada
  implica $(M, E) \models$ "axioma de fundación", pero no equivalente
- Transitivo cuando M es una clase transitiva y E es $\in$ (restringida a M)

- Todo modelo transitivo $(M, \in)$ es extensional y bien fundado
- Y por el teorema de colapso de Mostowski, tenemos que:

Proposición

Todo modelo extensional y bien fundado (M, E) es isomorfo a un (único) modelo transitivo $(M', \in)$

Fórmulas Δ_0

Definición (Fórmulas Δ_0)

Una fórmula φ de ZF es Δ_0 cuando todas sus cuantificaciones son restringidas, es decir: de la forma $(\forall x \in y)\, \psi(x)$ o $(\exists x \in y)\, \psi(x)$.

Formalmente, las fórmulas Δ_0 son generadas por la gramática:

$$\begin{array}{lcl} \varphi, \psi & ::= & x = y \mid x \in y \mid \neg\varphi \mid \varphi \Rightarrow \psi \\ & \mid & \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \forall x\, (x \in y \Rightarrow \varphi) \mid \exists x\, (x \in y \wedge \varphi) \end{array}$$

Lema

Si $(M, \in)$ es un modelo transitivo, entonces para toda fórmula Δ_0 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, tenemos que

$$(\forall a_1, \ldots, a_n \in M)\big(\varphi^M(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_n)\big)$$

Demo. Por inducción externa sobre φ. □

- **Intuición:** Las fórmulas Δ_0 son absolutas (para cualquier M transitivo)

Ejemplos de fórmulas Δ_0 (1/2)

Muchas fórmulas de ZF son Δ_0:

- Nociones básicas:

$$
\begin{array}{rcl}
x \subseteq y & \equiv & (\forall z \in x)\,(z \in y) \\
x = \varnothing & \equiv & (\forall z \in x)\,(z \notin x) \\
y = \{x\} & \equiv & x \in y \;\wedge\; (\forall z \in y)\,(z = x) \\
y = \{x_1, x_2\} & \equiv & x_1 \in y \;\wedge\; x_2 \in y \;\wedge\; (\forall z \in y)\,(z = x_1 \vee z = x_2) \\
y = (x_1, x_2) & \equiv & (\exists z_1, z_2 \in y)\,(z_1 = \{x_1\} \wedge z_2 = \{x_1, x_2\} \wedge y = \{z_1, z_2\}) \\
y = (x_1, \_) & \equiv & (\exists z_1, z_2 \in y)\,(\exists x_2 \in z_2)\,(z_1 = \{x_1\} \wedge z_2 = \{x_1, x_2\} \wedge y = \{z_1, z_2\}) \\
y = (\_, x_2) & \equiv & (\exists z_1, z_2 \in y)\,(\exists x_1 \in z_2)\,(z_1 = \{x_1\} \wedge z_2 = \{x_1, x_2\} \wedge y = \{z_1, z_2\}) \\
y = (\_, \_) & \equiv & (\exists z_1, z_2 \in y)\,(\exists x_1, x_2 \in z_2)\,(z_1 = \{x_1\} \wedge z_2 = \{x_1, x_2\} \wedge y = \{z_1, z_2\})
\end{array}
$$

- Operaciones sobre los conjuntos

$$
\begin{array}{rcl}
C = A \cup B & \equiv & A \subseteq C \;\wedge\; B \subseteq C \;\wedge\; (\forall z \in C)\,(z \in A \vee z \in B) \\
C = A \cap B & \equiv & C \subseteq A \;\wedge\; C \subseteq B \;\wedge\; (\forall z \in A)\,(z \in B \Rightarrow z \in C) \\
C = A - B & \equiv & (\forall x \in A)\,(x \notin B \Rightarrow x \in C) \;\wedge\; (\forall x \in C)\,(x \in A \wedge x \notin B) \\
C \subseteq A \times B & \equiv & (\forall z \in C)\,(\exists x \in A)\,(\exists y \in B)\,(z = (x, y)) \\
C = A \times B & \equiv & C \subseteq A \times B \;\wedge\; (\forall x \in A)\,(\forall y \in B)\,(\exists z \in C)\,(z = (x, y))
\end{array}
$$

Ejemplos de fórmulas Δ_0 (2/2)

- Funciones:

$$\begin{array}{rcl}
f \text{ función} & \equiv & (\forall z \in f)\, z = (_,_) \ \wedge \\
& & (\forall z_1, z_2 \in f)\, (\forall u_1 \in z_1)\, (\forall u_2 \in z_2)\, (\forall x, y_1 \in u_1)(\forall y_2 \in u_2) \\
& & \quad (z_1 = (x, y_1) \wedge z_2 = (x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2) \\
y = f(x) & \equiv & (\exists z \in f)\, (z = (x, y)) \\
A = \mathrm{dom}(f) & \equiv & (\forall x \in A)\, (\exists z \in f)\, (z = (x, _)) \ \wedge \ (\forall z \in f)\, (\exists x \in A)\, (z = (x, _)) \\
B = \mathrm{img}(f) & \equiv & (\forall y \in B)\, (\exists z \in f)\, (z = (_, y)) \ \wedge \ (\forall z \in f)\, (\exists y \in B)\, (z = (_, y)) \\
f : A \rightharpoonup B & \equiv & f \subseteq A \times B \ \wedge \ (\forall x \in A)\, (\forall y, y' \in B)\, (y = f(x) \wedge y' = f(x) \Rightarrow y = y') \\
f : A \to B & \equiv & (f : A \rightharpoonup B) \ \wedge \ (\forall x \in A)\, (\exists y \in B)\, (y = f(x)) \\
f : A \hookrightarrow B & \equiv & f : A \to B \ \wedge \ (\forall x, x' \in A)\, (\forall y \in B)\, (y = f(x) \wedge y = f(x') \Rightarrow x = x') \\
f : A \twoheadrightarrow B & \equiv & f : A \to B \ \wedge \ (\forall y \in B)\, (\exists x \in A)\, (y = f(x)) \\
f : A \tilde{\to} B & \equiv & f : A \hookrightarrow B \ \wedge \ f : A \twoheadrightarrow B \\
g = f \upharpoonright X & \equiv & g \subseteq f \wedge (\forall x \in X)(\forall z \in f)\, (z = (x, _) \Rightarrow z \in g)
\end{array}$$

- Ordinales:

$$\begin{array}{rcl}
y = x + 1 & \equiv & x \subseteq y \ \wedge \ x \in y \ \wedge \ (\forall z \in y)\, (z \in x \vee z = x) \\
x \text{ transitivo} & \equiv & (\forall y \in x)\, (\forall z \in y)\, (z \in x) \\
\alpha \text{ ordinal} & \equiv & \alpha \text{ transitivo} \ \wedge \ (\forall x, y \in \alpha)\, (x \in y \vee x = y \vee y \in x) \\
\alpha \text{ ordinal límite} & \equiv & \alpha \text{ ordinal} \ \wedge \ \alpha \neq \varnothing \ \wedge \ (\forall x \in \alpha)\, (\exists y \in \alpha)\, (x \in y) \\
\alpha \text{ ordinal sucesor} & \equiv & \alpha \text{ ordinal} \ \wedge \ (\exists \beta \in \alpha)\, (\forall x \in \alpha)\, (x \in \beta \vee x = \beta) \\
\alpha \text{ ordinal infinito} & \equiv & \alpha \text{ ordinal límite} \ \vee \ (\exists \beta \in \alpha)\, (\beta \text{ ordinal límite}) \\
\alpha \in \omega & \equiv & \alpha \text{ ordinal} \ \wedge \ \neg(\alpha \text{ ordinal infinito}) \\
\alpha = \omega & \equiv & \alpha \text{ ordinal límite} \ \wedge \ (\forall \beta \in \alpha)\, \neg(\beta \text{ ordinal límite})
\end{array}$$

Fórmulas Σ_1 y Π_1

Por otro lado, muchas nociones importantes de teoría de conjuntos no se pueden expresar mediante fórmulas Δ_0, por ejemplo:

$$Y = \mathfrak{P}(X), \quad C = B^A, \quad \alpha \text{ es un cardinal}, \quad \text{etc.} \qquad (\Pi_1)$$

$$X \text{ e } Y \text{ son equipotentes}, \quad X \text{ es numerable}, \quad \text{etc.} \qquad (\Sigma_1)$$

Definición (Fórmulas Σ_1 y Π_1)

Una fórmula φ de ZF es:

- Σ_1 si es de la forma $\varphi \equiv \exists \vec{x}\, \varphi_0$, donde φ_0 es una fórmula Δ_0
- Π_1 si es de la forma $\varphi \equiv \forall \vec{x}\, \varphi_0$, donde φ_0 es una fórmula Δ_0

Lema

Si $(M, \in)$ es un modelo transitivo, entonces:

- $(\forall \vec{a} \in M)\big(\varphi^M(\vec{a}) \Rightarrow \varphi(\vec{a})\big)$ si $\varphi(\vec{x})$ es una fórmula Σ_1
- $(\forall \vec{a} \in M)\big(\varphi^M(\vec{a}) \Leftarrow \varphi(\vec{a})\big)$ si $\varphi(\vec{x})$ es una fórmula Π_1

Demo. Ejercicio

Jerarquía de Lévy (1/2)

Definición (Jerarquía de Lévy)

Una fórmula φ de ZF es:

- Σ_0 o Π_0 si es Δ_0 (= fórmula con cuantificaciones acotadas)
- Σ_{n+1} si es de la forma $\varphi \equiv \exists\vec{x}\,\psi$, donde ψ es Π_n
- Π_{n+1} si es de la forma $\varphi \equiv \forall\vec{x}\,\psi$, donde ψ es Σ_n

- Más generalmente, se dice que una propiedad es:
  - Σ_n si se puede expresar por una fórmula Σ_n
  - Π_n si se puede expresar por una fórmula Π_n
  - Δ_n si se puede expresar por una fórmula Σ_n y por otra fórmula Π_n

  (Nociones definidas a menos de equivalencia lógica en ZF)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \Sigma_1 \arrow[dr] & & \Sigma_2 \arrow[dr] & & & & \Sigma_n \arrow[dr] & & \\
\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0 \arrow[r] & \Delta_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta_3 & \cdots & \Delta_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta_{n+1} & \cdots \\
 & & \Pi_1 \arrow[ur] & & \Pi_2 \arrow[ur] & & & & \Pi_n \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Jerarquía de Lévy (2/2)

Proposición (Complejidad de las fórmulas compuestas)

Se determina la complejidad$^{(*)}$ de una fórmula compuesta a partir de la de su(s) subfórmula(s) directas como indicado el la siguiente tabla:

φ, ψ	Δ_n	Σ_n	Π_n
$\neg\varphi$	Δ_n	Π_n	Σ_n
$\varphi \vee \psi$	Δ_n	Σ_n	Π_n
$\varphi \wedge \psi$	Δ_n	Σ_n	Π_n
$(\exists x \in y)\,\varphi$	Δ_n	Σ_n	Π_n
$(\forall x \in y)\,\varphi$	Δ_n	Σ_n	Π_n
$\exists x\,\varphi$	Σ_n	Σ_n	Σ_{n+1}
$\forall x\,\varphi$	Π_n	Π_{n+1}	Π_n

$(*)$ A menos de equivalencia lógica en ZF

Demo. Ejercicio. (*Sugerencia*: usar el esquema de colección para las cuantificaciones acotadas)

Modelos internos

- Como la fórmula $On(\alpha)$ es de clase Δ_0, tenemos que:

Proposición

Si $(M, \in)$ es un modelo transitivo de ZF, entonces:

$$(\forall \alpha \in M)\big(On^M(\alpha) \;\Leftrightarrow\; On(\alpha)\big)$$

Es decir: $$On^M \;=\; On \cap M$$

- Sin embargo, pueden existir ordinales afuera de la clase M, lo que motiva la siguiente definición:

Definición (Modelo interno)

Un modelo interno de ZF es un modelo transitivo $(M, \in)$ de ZF que contiene todos los ordinales de V: $On \subseteq M$

En tal modelo, siempre tenemos que: $On^M \;=\; On$

Plan

Motivación

- Dada una $\in$-estructura (M, E), el teorema de Löwenheim-Skolem expresa que existe una subestructura elemental $(Q, E) \subseteq (M, E)$ de cardinal $|Q| = \kappa$ para cada cardinal κ entre $\aleph_0$ y $|M|$:

Teorema de Löwenheim-Skolem descendente (con AC)

Sea M un conjunto equipado con una relación binaria $E \subseteq M^2$.
Para todo $P \subseteq M$, existe $Q \subseteq M$ tal que:

(1) $Q \supseteq P$ y $|Q| \leq \max(|P|, \aleph_0)$

(2) Para toda fórmula $f = f(\vec{\mathrm{x}}) \in \mathit{Form}$ con variables libres $\vec{\mathrm{x}}$:

$$(\forall \vec{a} \in Q)[(Q, E) \models f(\vec{a}) \quad \Leftrightarrow \quad (M, E) \models f(\vec{a})]$$

- Por otro lado, el teorema de Tarski (inexistencia de un pred. de verdad) implica que no existe ningún conjunto X tal que la $\in$-estructura $(X, \in)$ sea elementalmente equivalente al universo $(V, \in)$

- Sin embargo, siempre se puede hallar un conjunto X equivalente a V con respecto a finitas fórmulas fijadas $\quad \Rightarrow \quad$ principio de reflexión

El principio de reflexión

- Se dice que un conjunto X refleja una fórmula $\varphi(\vec{x})$ cuando

$$(\forall \vec{a} \in X)\big(\varphi^X(\vec{a}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(\vec{a})\big)$$

Teorema (Principio de reflexión) (en ZF)

Sean $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})$ fórmulas. Para todo ordinal α, existe un ordinal $\beta \geq \alpha$ tal que V_β refleja las fórmulas $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})$:

$$(\forall \vec{a} \in V_\beta)\Big(\varphi_i^{V_\beta}(\vec{a}) \;\Leftrightarrow\; \varphi_i(\vec{a})\Big) \qquad (i = 1..n)$$

- Otra formulación [Jech 2002: *Set Theory* (3rd ed.)] es la siguiente:

Teorema (Principio de reflexión, variante) (en ZF)

Sean $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})$ fórmulas. Para todo conjunto M_0, existe un conjunto $M \supseteq M_0$ que refleja las fórmulas $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})$:

$$(\forall \vec{a} \in M)\Big(\varphi_i^{M}(\vec{a}) \;\Leftrightarrow\; \varphi_i(\vec{a})\Big) \qquad (i = 1..n)$$

- **Obs.:** La primera formulación implica la segunda, ya que para todo conjunto M_0, tenemos que $M_0 \subseteq V_\alpha$ para algún $\alpha \in On$

Demostración del principio de reflexión (1/4)

- **Recordatorio:** X refleja $\varphi(\vec{x}) \;:\equiv\; (\forall \vec{a} \in X)\big(\varphi^X(\vec{a}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(\vec{a})\big)$

- Es claro que:
  (1) Todo conjunto X refleja una fórmula $\varphi(\vec{x})$ sin cuantificadores
  (2) Si X refleja fórmulas $\varphi(\vec{x})$ y $\psi(\vec{x})$, entonces X también refleja las fórmulas $\neg\varphi(\vec{x})$, $\varphi(\vec{x}) \vee \psi(\vec{x})$, $\varphi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x})$ y $\varphi(\vec{x}) \Rightarrow \psi(\vec{x})$

- Se dice que un conjunto X refleja fuertemente una fórmula $\varphi(\vec{x})$ cuando refleja la fórmula $\varphi(\vec{x})$ así como todas sus subfórmulas

Lema 1 (en Z, sin reemplazo ni AF)

Sean $\varphi(x)$ una fórmula y $(X_n)_{n\in\omega}$ una sucesión creciente de conjuntos. Si X_n refleja fuertemente la fórmula $\varphi(\vec{x})$ para todo $n \in \omega$, entonces la unión $\bigcup_{n\in\omega} X_n$ refleja fuertemente la fórmula $\varphi(\vec{x})$

- **Obs.:** El lema no se cumple con la noción de reflexión simple. ¿Contraejemplo?

Demostración del principio de reflexión (2/4)

Demo del Lema 1. Sea $X := \bigcup_{n\in\omega} X_n$. Se demuestra la implicación

$$((\forall n \in \omega)\ X_n \text{ refleja fuertemente } \varphi(\vec{x})) \;\Rightarrow\; X \text{ refleja fuertemente } \varphi(\vec{x})$$

por inducción externa sobre la fórmula $\varphi(\vec{x})$, distinguiendo los siguientes casos:

- $\varphi(\vec{x})$ es sin cuantificadores. Obvio.
- $\varphi(\vec{x})$ es de la forma $\varphi(\vec{x}) \equiv \varphi_1(\vec{x}) \vee \varphi_2(\vec{x})$. Por hipótesis, X_n refleja fuertemente $\varphi(\vec{x})$ para todo $n \in \omega$, entonces X_n refleja fuertemente las subfórmulas $\varphi_1(\vec{x})$ y $\varphi_2(\vec{x})$ para todo $n \in \omega$. Por HI, se deduce que X refleja fuertemente las subfórmulas $\varphi_1(\vec{x})$ y $\varphi_2(\vec{x})$, y por lo tanto, X refleja fuertemente la disyunción $\varphi_1(\vec{x}) \vee \varphi_2(\vec{x}) \equiv \varphi(\vec{x})$.
- El caso donde $\varphi(\vec{x})$ es una negación/conjunción/implicación se trata de modo análogo.
- $\varphi(\vec{x})$ es de la forma $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists x_0\, \varphi_0(x_0, \vec{x})$. Por hipótesis, X_n refleja fuertemente $\varphi(\vec{x})$ para todo $n \in \omega$, entonces X_n refleja fuertemente la subfórmula $\varphi_0(x_0, \vec{x})$ para todo $n \in \omega$, y por HI, se deduce que X refleja fuertemente la subfórmula $\varphi_0(x_0, \vec{x})$. Sólo nos queda demostrar que X refleja la fórmula $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists x_0\, \varphi_0(x_0, \vec{x})$. Fijado(s) parámetro(s) $\vec{a} \in X$, se considera un índice $n \in \omega$ tal que $\vec{a} \in X_n$, y se observa que:

$$\begin{array}{rcll}
\varphi(\vec{a}) & \Leftrightarrow & \exists a_0\, \varphi_0(a_0, \vec{a}) & \text{(def. de } \varphi(\vec{x})\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (\exists a_0 \in X_n)\, \varphi_0^{X_n}(a_0, \vec{a}) & \text{(pues } X_n \text{ refleja } \varphi(\vec{x})\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (\exists a_0 \in X_n)\, \varphi_0(a_0, \vec{a}) & \text{(pues } X_n \text{ refleja } \varphi_0(x_0, \vec{x})\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (\exists a_0 \in X)\, \varphi_0(a_0, \vec{a}) & \text{(pues } X_n \subseteq X\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (\exists a_0 \in X)\, \varphi_0^{X}(a_0, \vec{a}) & \text{(pues } X \text{ refleja } \varphi_0(x_0, \vec{x})\text{)} \\
& & \equiv\ \varphi^{X}(\vec{a}) &
\end{array}$$

- El caso donde $\varphi(\vec{x})$ es una cuantificación universal se trata de modo análogo. □

Demostración del principio de reflexión (3/4)

Lema 2 (en ZF)

Sea $\varphi(\vec{x})$ una fórmula. Para todo ordinal α, existe $\beta \geq \alpha$ tal que V_β refleja fuertemente la fórmula $\varphi(\vec{x})$

Demo del Lema 2. Por inducción sobre la fórmula $\varphi(\vec{x})$, distinguiendo los siguientes casos:

- $\varphi(\vec{x})$ es sin cuantificadores. Cualquier ordinal $\beta \geq \alpha$ funciona.
- $\varphi(\vec{x})$ es de la forma $\varphi(\vec{x}) \equiv \varphi_1(\vec{x}) \vee \varphi_2(\vec{x})$. Se considera la sucesión creciente de ordinales $(\beta_n)_{n\in\omega}$ definida a partir de $\beta_0 := \alpha$, y donde para cada $n \geq 1$:

  β_n es el mínimo ordinal $\geq \beta_{n-1}$ tal que V_{β_n} refleja fuertemente $\begin{cases} \varphi_1(\vec{x}) & \text{si } n \text{ impar} \\ \varphi_2(\vec{x}) & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

  Se nota $\beta := \sup_{n\in\omega} \beta_n$ $(\geq \alpha)$. Por el Lema 1, se deduce que:
  - $V_\beta = \bigcup_{n\in\omega} V_{\beta_{2n+1}}$ refleja fuertemente la fórmula $\varphi_1(x)$,
  - $V_\beta = \bigcup_{n\in\omega} V_{\beta_{2n+2}}$ refleja fuertemente la fórmula $\varphi_2(x)$,

  y por lo tanto V_β refleja fuertemente la disyunción $\varphi_1(\vec{x}) \vee \varphi_2(\vec{x})$ $(\equiv \varphi(\vec{x}))$.
- El caso donde $\varphi(\vec{x})$ es una negación/conjunción/implicación se trata de modo análogo.
- (casos $\exists/\forall$: véase siguiente diapositiva)

Demostración del principio de reflexión (4/4)

Demo del Lema 2 (continuación y fin).

- $\varphi(\vec{x})$ es de la forma $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists x_0\, \varphi_0(x_0, \vec{x})$. Para todos $\vec{a}$, se nota $\gamma(\vec{a})$ al mínimo ordinal tal que: $\exists a_0\, \varphi_0(a_0, \vec{a}) \;\Leftrightarrow\; (\exists a_0 \in V_{\gamma(\vec{a})})\, \varphi_0(a_0, \vec{a})$.

  Luego se considera la sucesión creciente de ordinales $(\beta_n)_{n\in\omega}$ definida así:

  - β_0 es el mínimo ordinal $\geq \alpha$ tal que V_{β_0} refleja fuertemente $\varphi_0(x_0, \vec{x})$ (por HI)
  - Para todo $n \in \omega$, se nota $\gamma_n := \sup\{\gamma(\vec{a}) : \vec{a} \in V_{\beta_n}\}$ y se define β_{n+1} como el mínimo ordinal $\geq \max(\beta_n, \gamma_n)$ tal que $V_{\beta_{n+1}}$ refl. fuert. $\varphi_0(x_0, \vec{x})$ (por HI)

  Sea $\beta := \sup_{n\in\omega} \beta_n$. Por el Lema 1, $V_\beta = \bigcup_{n\in\omega} V_{\beta_n}$ refleja fuertemente $\varphi_0(x_0, \vec{x})$. Sólo nos queda probar que V_β refleja $\varphi(\vec{x})$. Fijado(s) parámetro(s) $\vec{a} \in V_\beta$, se toma un índice $n \in \omega$ tal que $\vec{a} \in V_{\beta_n}$, y se observa que:

$$
\begin{array}{rcll}
\varphi(\vec{a}) & \Leftrightarrow & \exists a_0\, \varphi_0(a_0, \vec{a}) & \text{(def. de } \varphi(\vec{x})\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (\exists a_0 \in V_{\gamma(\vec{a})})\, \varphi_0(a_0, \vec{a}) & \text{(por def. de } \gamma(\vec{a})\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (\exists a_0 \in V_\beta)\, \varphi_0(a_0, \vec{a}) & \text{(pues } \gamma(\vec{a}) \leq \beta_{n+1} \leq \beta\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (\exists a_0 \in V_\beta)\, \varphi_0^{V_\beta}(a_0, \vec{a}) & \text{(pues } V_\beta \text{ refleja } \varphi_0(x_0, \vec{x})\text{)} \\
& & \equiv\; \varphi^{V_\beta}(\vec{a})\,. &
\end{array}
$$

- El caso donde $\varphi(\vec{x})$ es una cuantificación universal se trata de modo análogo. □

Demo. del teorema. Aplicar el Lema 2 a la fórmula $\varphi(\vec{x}) \;:\equiv\; \varphi_1(\vec{x}) \vee \cdots \vee \varphi_n(\vec{x})$. □

Observaciones (1/2)

Principio de reflexión (recordatorio)

Sean $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})$ fórmulas. Para todo ordinal α, existe un ordinal $\beta \geq \alpha$ tal que V_β refleja las fórmulas $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})$:

$$(\forall \vec{a} \in V_\beta)\Big(\varphi_i^{V_\beta}(\vec{a}) \;\Leftrightarrow\; \varphi_i(\vec{a})\Big) \qquad (i = 1..n)$$

- Siempre se puede exigir (además) que β sea límite (Ejercicio)
- Contrariamente a la prueba del teorema de Löwenheim-Skolem (que no usa el esquema de reemplazo), la prueba del principio de reflexión usa fuertemente el esquema de reemplazo en el caso $\exists$:
  - para construir el ordinal $\gamma_n = \sup\{\gamma(\vec{a}) : \vec{a} \in V_{\beta_n}\}$ a partir de la funcional $\vec{a} \mapsto \gamma(\vec{a})$ (para cada $n \in \omega$)
  - para construir la sucesión $(\beta_n)_{n\in\omega}$ a partir de la funcional $\beta_n \mapsto \beta_{n+1}$
- Por otro lado, la prueba del principio de reflexión no usa AC (contrariamente a la prueba del teorema de Löwenheim-Skolem, que usa AC para equipar el dominio inicial con una función de elección)

Observaciones (2/2)

- AF es crucial (en el caso $\exists$) para construir la funcional $\vec{a} \mapsto \gamma(\vec{a})$ que asocia a cada $\vec{a}$ ($\in V$) el mínimo ordinal $\gamma(\vec{a})$ tal que

$$\exists a_0\, \varphi_0(a_0, \vec{a}) \;\Leftrightarrow\; (\exists a_0 \in V_{\gamma(\vec{a})})\, \varphi_0(a_0, \vec{a})$$

  usando el hecho que $V = \bigcup_{\gamma \in On} V_\gamma$

- Sin embargo, se puede demostrar la siguiente generalización del principo de reflexión sin AF, reemplazando la jerarquía acumulativa por cualquier jerarquía $(W_\alpha)_{\alpha \in On}$ similar:

Teorema (Principio de reflexión generalizado) (en ZF$^-$)

Sea $(W_\alpha)_{\alpha \in On}$ una sucesión transfinita de conjuntos, creciente y tal que $W_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta$ para todo α límite. Se escribe $W := \bigcup_{\alpha \in On} W_\alpha$.
Sean $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})$ fórmulas. Para todo $\alpha \in On$, existe $\beta \geq \alpha$ tal que:

$$(\forall \vec{a} \in W_\beta)\Big(\varphi_i^{W_\beta}(\vec{a}) \;\Leftrightarrow\; \varphi_i^{W}(\vec{a})\Big) \qquad (i = 1..n)$$

Demo. Ejercicio

Aplicación (1/3)

- Se recuerda que: $\quad$ Z $:=$ ZF $-$ Reemplazo $\qquad$ (teoría de Zermelo)
- Ya vimos que ZF $\vdash (V_{2\omega}, \in) \models Z$, y por lo tanto: ZF $\vdash Cons(Z)$
(donde $Z \subseteq Form_0$ internaliza en ZF el conjunto de axiomas de Z)

Teorema

Si ψ es una fórmula cerrada consistente con Z $\quad$ (i.e. tal que: Z $+ \psi \nvdash \perp$), entonces existe una fórmula cerrada ψ' tal que:

$$\mathsf{ZF} + \psi \vdash \psi' \qquad \text{pero} \qquad \mathsf{Z} + \psi \nvdash \psi'$$

En particular, las teorías ZF $+ \psi$ y Z $+ \psi$ nunca son equivalentes

Corolario: ZF no es finitamente axiomatizable

Demo. Si ZF se pudiera axiomatizar con finitos axiomas $\psi_1, \ldots, \psi_n$, también se podría axiomatizar con el único axioma $\psi := \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$. Por lo tanto, las tres teorías ZF, ZF $+ \psi$ y Z $+ \psi$ serían equivalentes, lo que es imposible por el teorema anterior. $\square$

Aplicación (2/3)

- En Z, sólo se puede definir el conjunto V_α cuando α es finito
  (ya se necesita el reemplazo para definir $V_\omega := \bigcup_{n\in\omega} V_n$)

- Sin embargo, se puede expresar en Z que "$X = V_\alpha$", escribiendo:

$$\begin{array}{lll} X = V_\alpha & :\equiv & \exists f \big(f \text{ función} \ \wedge \ \mathrm{dom}(f) = \alpha + 1 \quad \wedge \\ & & \quad f(0) = \varnothing \ \wedge \ f(\alpha) = X \quad \wedge \\ & & \quad (\forall \beta < \alpha) \ f(\beta + 1) = \mathfrak{P}(f(\beta)) \quad \wedge \\ & & \quad (\forall \beta \le \alpha) \ (\beta \text{ límite} \ \Rightarrow \ f(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma)) \big) \end{array}$$

  (pero sólo se puede mostrar en Z que $\exists X\,(X = V_\alpha)$ cuando α es finito)

- Fijada una fórmula cerrada ψ, se define:

$$\psi' \ :\equiv \ (\exists \alpha \in On) \ \exists X \ (\alpha \text{ límite} > \omega \ \wedge \ X = V_\alpha \ \wedge \ \psi^X)$$

- Se trata ahora de demostrar la:

Proposición

Si $Z + \psi$ es consistente, entonces: $ZF + \psi \ \vdash \ \psi'$ y $Z + \psi \ \nvdash \ \psi'$

Aplicación (3/3)

- **Recordatorio:** En el principio de reflexión (Lema 2), siempre se puede exigir que el ordinal $\beta \geq \alpha$ sea un ordinal límite (Ejercicio)

Demo de la Proposición.

- Razonando en ZF $+ \psi$:

  Se observa que $(\forall\alpha \in On)\ \exists! X\ \ X = V_\alpha$ (por ZF) y se escribe α al mínimo ordinal límite $> \omega$ que refleja ψ, es decir: $\psi^{V_\alpha} \Leftrightarrow \psi$. Por lo tanto: ψ^{V_α} (por ψ)

  En conclusión: ZF $+ \psi \ \vdash\ (\exists\alpha \in On)\ \exists X\ (\alpha$ límite $> \omega\ \wedge\ X = V_\alpha\ \wedge\ \psi^X)$
  es decir: ZF $+ \psi \ \vdash\ \psi'$

- Razonando en Z $+ \psi + \psi'$:

  Por ψ', existe un ordinal límite $\alpha > \omega$ y un conjunto X tal que $X = V_\alpha$ y ψ^X.
  Como $X = V_\alpha$ (con α límite y $> \omega$), tenemos que $(X, \in) \models Z$, donde Z es el conjunto (internalizado) de los axiomas de Z. Y como ψ^X, tenemos que $(X, \in) \models \lceil\psi\rceil$.

  Entonces $(X, \in) \models Z \cup \{\lceil\psi\rceil\}$, y por lo tanto $Cons(Z \cup \{\lceil\psi\rceil\})$.

  En conclusión: Z $+ \psi + \psi' \ \vdash\ Cons(Z \cup \{\lceil\psi\rceil\})$
  es decir: Z $+ \psi \ \vdash\ \psi' \Rightarrow Cons(Z \cup \{\lceil\psi\rceil\})$

  Pero como Z $+ \psi$ es consistente, tenemos que Z $+ \psi \ \nvdash\ Cons(Z \cup \{\lceil\psi\rceil\})$ (por el 2$^{\text{do}}$ teorema de incompletitud), y por lo tanto: Z $+ \psi \ \nvdash\ \psi'$. □

Plan

Definición de los subconjuntos definibles

Definición (Subconjuntos definibles)

Sea X un conjunto. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es definible (en X) cuando existe una fórmula interna $f \in Form_{n+1}$ (para algún $n \in \omega$) y parámetros $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que para todo $x \in X$:

$$x \in Y \quad \text{sii} \quad (X, \in) \models f(x, x_1, \ldots, x_n)$$

Se dice que Y es definible a partir de f y $(x_1, \ldots, x_n)$

- Cabe destacar que la noción de subconjunto definible está definida por la siguiente fórmula (externa) de ZF:

$$Y \text{ subconjunto definible de } X \quad :\equiv$$
$$Y \subseteq X \ \wedge \ (\exists n \in \omega)(\exists f \in Form_{n+1})(\exists (x_1, \ldots, x_n) \in X^n)$$
$$(\forall x \in X)\,(x \in Y \ \Leftrightarrow \ (X, \in) \models f(x, x_1, \ldots, x_n))$$

- Usando el esquema de comprensión, se define

$$\mathrm{Def}(X) \ := \ \{Y \in \mathfrak{P}(X) \ : \ Y \text{ subconjunto definible de } X\}$$

Propiedades de los subconjuntos definibles (1/5)

- Por construcción, el conjunto $\mathrm{Def}(X)$ es un subconjunto de $\mathfrak{P}(X)$, cuya propiedad principal es la siguiente:

Proposición

Para cada fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ y para todos $x_1, \ldots, x_n \in X$:

$$\{x \in X \ :\ \varphi^X(x, x_1, \ldots, x_n)\} \ \in \ \mathrm{Def}(X)$$

Demo. Tenemos que
$\{x \in X \ :\ \varphi^X(x, x_1, \ldots, x_n)\} \ = \ \{x \in X \ :\ (X, \in) \models \ulcorner\varphi\urcorner(x, x_1, \ldots, x_n)\} \ \in \ \mathrm{Def}(X)$ $\square$

- El conjunto $\mathrm{Def}(X)$ contiene más generalmente los subconjuntos definidos a partir de todas las fórmulas internas, inclusive las que no son estándar (si tales fórmulas internas existen)

- Por otro lado, un conjunto de la forma $\{x \in X \ :\ \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)\}$ (i.e. sin relativización a X) no es definible en general

Propiedades de los subconjuntos definibles (2/5)

Proposición (Subálgebra booleana)

El conjunto $\mathrm{Def}(X)$ es una subálgebra booleana de $\mathfrak{P}(X)$:

(1) $\varnothing,\ X \ \in\ \mathrm{Def}(X)$

(2) Si $Y, Y' \in \mathrm{Def}(X)$, entonces $Y^c,\ (Y \cap Y'),\ (Y \cup Y')\ \in\ \mathrm{Def}(X)$

Demo.

- X es definible a partir de la fórmula $\mathtt{x}_0 \doteq \mathtt{x}_0$ (sin parámetros).
- $\varnothing$ es definible a partir de la fórmula $\dot{\neg}(\mathtt{x}_0 \doteq \mathtt{x}_0)$ (sin parámetros).
- Si $Y \subseteq X$ es definible a partir de una fórmula f con n parámetros $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, entonces su complemento $Y^c \subseteq X$ es definible a partir de la fórmula $\dot{\neg} f$ con los mismos n parámetros $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$.
- Si $Y \subseteq X$ es definible a partir de una fórmula f con n parámetros $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, e $Y' \subseteq X$ definible a partir de otra fórmula f' con m parámetros $(y_1, \ldots, y_m) \in X^m$, entonces la unión $Y \cup Y'$ es definible a partir de la fórmula $f \mathbin{\dot{\vee}} f''$ con los $n + m$ parámetros $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in X^{n+m}$, donde f'' es la fórmula obtenida reemplazando en f' cada ocurrencia de la variable $\mathtt{x}_i$ $(i \in [1..m])$ por la variable $\mathtt{x}_{n+i}$. □

Propiedades de los subconjuntos definibles (3/5)

Proposición

$\mathrm{Def}(X)$ contiene todos los subconjuntos finitos y cofinitos de X:

$$\mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(X) \cup \mathfrak{P}_{\mathsf{cofin}}(X) \;\subseteq\; \mathrm{Def}(X)$$

Demo. Como $\mathrm{Def}(X)$ es una subálgebra booleana de $\mathfrak{P}(X)$, basta con observar que $\{x\} \in \mathrm{Def}(X)$ para todo $x \in X$, siendo el subconjunto $\{x\} \subseteq X$ definible a partir de la fórmula $\mathtt{x}_0 \doteq \mathtt{x}_1$ con el único parámetro $x \in X$ (asociado a $\mathtt{x}_1$). □

Corolario

Si X es finito, entonces $\mathrm{Def}(X) = \mathfrak{P}(X)$

- Sin embargo, cuando X es infinito, el conjunto $\mathrm{Def}(X)$ puede contener conjuntos infinitos-coinfinitos, por ejemplo:

$$\{\{z_1, z_2\} \,:\, z_1, z_2 \in V_\omega\} \;=\; \{x \in V_\omega \,:\, (X, \in) \models f(x)\} \;\in\; \mathrm{Def}(V_\omega)$$

con $\quad f \;=\; \dot{\exists}\,\mathtt{x}_1\; \dot{\exists}\,\mathtt{x}_2\; \dot{\forall}\,\mathtt{x}_3\,(\mathtt{x}_3 \mathrel{\dot{\in}} \mathtt{x}_0 \;\dot{\Leftrightarrow}\; \mathtt{x}_3 \doteq \mathtt{x}_1 \mathrel{\dot{\vee}} \mathtt{x}_3 \doteq \mathtt{x}_2)$

Propiedades de los subconjuntos definibles (4/5)

Proposición (con AC)

Si X es infinito, entonces: $|\mathrm{Def}(X)| = |X|,$ (mismo cardinal)

y por lo tanto: $\mathrm{Def}(X) \subsetneq \mathfrak{P}(X)$ (inclusión estricta)

Demo. El conjunto $\mathrm{Def}(X)$ es la imagen de la función

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{def}_X & : \displaystyle\sum_{n\in\omega}(Form_{n+1} \times X^n) & \to & \mathfrak{P}(X) \\ & (n, (f, (x_1, \dots, x_n))) & \mapsto & \{x \in X : X \models f(x, x_1, \dots, x_n)\} \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que $|\mathrm{Def}(X)| = |\mathrm{img}(\mathrm{def}_X)| \leq |\sum_{n\in\omega}(Form_{n+1} \times X^n)| = |X|$ (pues X infinito). La desigualdad $|X| \leq |\mathrm{Def}(X)|$ sigue de que $\{x\} \in \mathrm{Def}(X)$ para todo $x \in X$. Además $|\mathrm{Def}(X)| = |X| < |\mathfrak{P}(X)|$ (por Cantor), y luego $\mathrm{Def}(X) \subsetneq \mathfrak{P}(X)$. □

Propiedades de los subconjuntos definibles (5/5)

Proposición (sin AC)

Si X es bien ordenable, entonces $\mathrm{Def}(X)$ también lo es.

Además existe (en ZF) una funcional $\leq \ \mapsto \ \leq^*$ que asocia a cada buen orden $\leq$ sobre X otro buen orden $\leq^*$ sobre $\mathrm{Def}(X)$

Demo. Se fija un buen orden $\leq_{Form}$ sobre el conjunto (numerable) $Form$.

Dado un buen orden $\leq$ sobre X, se equipa el conjunto $D_X := \sum_{n\in\omega}(Form_{n+1} \times X^n)$ con el buen orden $\leq^\dagger$ definido por:

$$(n,(f,\vec{x})) \leq^\dagger (m,(g,\vec{y})) \quad :\equiv \quad \begin{array}{ll} n < m & \vee \\ n = m \ \wedge \ f <_{Form} g & \vee \\ n = m \ \wedge \ f = g \ \wedge \ \vec{x} \leq_{\mathsf{lex}_n} \vec{y} & \end{array}$$

donde $\leq_{\mathsf{lex}_n}$ es el (buen) orden lexicográfico sobre X^n inducido por el (buen) orden $\leq$ sobre X.
Luego se transporta el buen orden $\leq^\dagger$ (sobre D_X) en el conjunto $\mathrm{Def}(X)$ a través de la sobreyección $\mathrm{def}_X : D_X \twoheadrightarrow \mathrm{Def}(X)$, escribiendo:

$$Y \leq^* Z \quad :\equiv \quad \min_{(S,\leq^\dagger)}(\mathrm{def}_X^{-1}(Y)) \ \leq^\dagger \ \min_{(S,\leq^\dagger)}(\mathrm{def}_X^{-1}(Z))$$

para todos $Y, Z \in \mathrm{Def}(X)$. $\square$

No monotonicidad de $X \mapsto \mathrm{Def}(X)$ (1/2)

- La correspondencia $X \mapsto \mathrm{Def}(X)$ no es monótona en general:

$$X \subseteq Y \quad \not\Rightarrow \quad \mathrm{Def}(X) \subseteq \mathrm{Def}(Y)$$

- **Contraejemplo:** Tomar Y conjunto infinito y $X \subseteq Y$ no definible en Y. Tenemos que $X \in \mathrm{Def}(X)$, $X \notin \mathrm{Def}(Y)$, luego: $\mathrm{Def}(X) \not\subseteq \mathrm{Def}(Y)$

- Sin embargo:

Proposición

Si $X \subseteq Y$ y $X \in Y$, entonces $\mathrm{Def}(X) \subseteq \mathrm{Def}(Y)$

- Demostración basada en la internalización (en el conjunto Form) de la noción (externa) de relativización: $\varphi \mapsto \varphi^Z$

- Formalmente, se define la relativización (interna) $(f, \mathtt{z}) \mapsto f^{\mathtt{z}}$ por:

$$\begin{array}{rclcrcl} (\mathtt{x} \doteq \mathtt{y})^{\mathtt{z}} & := & \mathtt{x} \doteq \mathtt{y} & \qquad & (\mathtt{x} \mathrel{\dot{\in}} \mathtt{y})^{\mathtt{z}} & := & \mathtt{x} \mathrel{\dot{\in}} \mathtt{y} \\ (\dot{\neg}\, f)^{\mathtt{z}} & := & \dot{\neg}(f^{\mathtt{z}}) & & (f_1 \mathrel{\dot{\vee}} f_2)^{\mathtt{z}} & := & f_1^{\mathtt{z}} \mathrel{\dot{\vee}} f_2^{\mathtt{z}} \\ ((\dot{\exists}\,\mathtt{x})\, f)^{\mathtt{z}} & := & (\dot{\exists}\,\mathtt{x})(\mathtt{x} \mathrel{\dot{\in}} \mathtt{z} \mathrel{\dot{\wedge}} f^{\mathtt{z}}) & & \multicolumn{3}{l}{\text{(suponiendo que } \mathtt{x} \neq \mathtt{z}\text{)}} \end{array}$$

No monotonicidad de $X \mapsto \mathrm{Def}(X)$ (2/2)

Lema

Sean X, Y conjuntos tales que $X \subseteq Y$ y $X \in Y$.
Para cada fórmula interna $f = f(\mathtt{x}_1, \dots \mathtt{x}_n)$, para cada variable interna $\mathtt{z} \neq \mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n$ y para todos $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, tenemos que:

$$(X, \in) \models f(x_1, \dots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad (Y, \in) \models (f^{\mathtt{z}})(x_1, \dots, x_n, X)$$

(asociando la variable z al parámetro X en el lado derecho)

Demo. Por inducción (interna) sobre f. □

Demo. de la Proposición. Sean X, Y tales que $X \subseteq Y$ y $X \in Y$. Sea $Z \in \mathrm{Def}(X)$ un subconjunto de X definido por una fórmula f con parámetros $(x_1, \dots, x_n) \in X$.
Para todo $x \in Y$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x \in Z \quad &\Leftrightarrow \quad x \in X \wedge X \models f(x, x_1, \dots, x_n) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in X \wedge Y \models (f^{\mathtt{z}})(x, x_1, \dots, x_n, X) \qquad \text{(por el Lema)} \\ &\Leftrightarrow \quad Y \models f'(x, x_1, \dots, x_n, X) \end{aligned}$$

tomando $\mathtt{z} := \mathtt{x}_{n+1}$ y $f' := \mathtt{x}_0 \mathrel{\dot\in} \mathtt{z} \mathrel{\dot\wedge} f^{\mathtt{z}}$. Por lo tanto: $Z \in \mathrm{Def}(Y)$. □

Construcción del universo constructible (1/2)

- De modo análogo a la jerarquía acumulativa $(V_\alpha)_{\alpha\in On}$, se define la jerarquía constructible $(L_\alpha)_{\alpha\in On}$ por:

$$L_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Def}(L_\beta) \qquad (\alpha \in On)$$

Proposición (en ZF)

La sucesión transfinita $(L_\alpha)_{\alpha\in On}$ es estrictamente creciente (para $\subseteq$), y para todo $\alpha \in On$:

(1) $L_\alpha \subseteq V_\alpha$

(2) L_α es un conjunto transitivo

(3) $L_0 = \varnothing$, $\quad L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$ $\quad$ y $\quad L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$ (si α límite)

Demo. Ejercicio. Los ítems (2) y (3) se basan en el:

Lema: Si X es transitivo, entonces $\mathrm{Def}(X)$ es transitivo

Demo. Ejercicio.

Construcción del universo constructible (2/2)

Definición (Universo constructible)

El universo constructible L es la unión transfinita de $(L_\alpha)_{\alpha \in On}$:

$$x \in L \qquad \text{sii} \qquad (\exists \alpha \in On)\ x \in L_\alpha$$

Sus elementos son los conjuntos constructibles

Proposición (Constructibilidad de los ordinales) (en ZF)

$On \subseteq L \ \wedge\ (\forall \alpha, \beta \in On)\,(\beta \in L_\alpha \ \Leftrightarrow\ \beta < \alpha)$ (es decir: $L_\alpha \cap On = \alpha$)

En particular, L es una clase propia

Demo. **1.** Demostremos que $(\forall \alpha \in On)\ \alpha \notin L_\alpha$. Por el absurdo, se considera el mínimo $\alpha \in On$ tal que $\alpha \in L_\alpha$. Como $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Def}(L_\beta)$, existe $\beta < \alpha$ tal que $\alpha \in \mathrm{Def}(L_\beta)$, y por lo tanto $\beta \in \alpha \subseteq L_\beta$: esto contradice la minimalidad de α. Entonces $(\forall \alpha \in On)\ \alpha \notin L_\alpha$.

2. Por monotonía se deduce que $(\forall \beta \geq \alpha)\ \beta \notin L_\alpha$, y por lo tanto: $L_\alpha \cap On \subseteq \alpha$.

3. Demostremos que $\alpha \in L_{\alpha+1}$ por inducción sobre $\alpha \in On$. Supongamos que $\beta \in L_{\beta+1}$ para todo $\beta < \alpha$ (HI). Entonces $\alpha \subseteq L_\alpha$, luego $L_\alpha \cap On = \alpha$, y por lo tanto:

$$\alpha = \{x \in L_\alpha : On(x)\} = \{x \in L_\alpha : On^{L_\alpha}(x)\} \in \mathrm{Def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$$

(pues la fórmula $On(x)$ es Δ_0). □

Axioma de constructibilidad

- El axioma de constructibilidad (notación: $V = L$)

$$\forall x\,(\exists \alpha \in On)\ x \in L_\alpha$$

expresa (en ZF) que todo conjunto es constructible

- En las siguientes diapositivas, vamos a demostrar el

Teorema

La clase $L \subseteq V$ (equipada con $\in$) es un modelo interno de ZF que satisface el axioma de constructibilidad:

(ZF $\vdash$) $$(L, \in) \models \text{ZF} + V = L$$

- Es decir: (1) $\text{ZF} \vdash \varphi^L$ para cada axioma φ de ZF
  (2) $\text{ZF} \vdash (V = L)^L$

y por lo tanto: $\text{ZF} \vdash \varphi^L$ para cada teorema de $\text{ZF} + V = L$

- Implica que: $\text{ZF} + V = L \approx \text{ZF}$

$(L, \in)$ es un modelo interno de ZF (1/3)

- Empezamos por:

Proposición: $(L, \in) \models$ ZF (en ZF)

Demo.

- **Axioma de extensionalidad** Queremos demostrar que:

$$(\forall a, b \in L)((\forall x \in L)(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \;\Rightarrow\; a = b)$$

Obvio, pues la clase L es transitiva.

- **Axioma de pares** Queremos demostrar que:

$$(\forall a, b \in L)(\exists c \in L)(\forall x \in L)(x \in c \Leftrightarrow x = a \vee x = b).$$

Eso equivale a demostrar que para todos $a, b \in L$, el par $c := \{a, b\}$ es constructible. Para ello, se fija un ordinal $\alpha \in On$ tal que $a, b \in L_\alpha$, y se observa que

$$c \;=\; \{a, b\} \;=\; \left\{x \in L_\alpha : (x = a \vee x = b)^{L_\alpha}\right\} \;\in\; \mathrm{Def}(L_\alpha) \;\subseteq\; L.$$

- **Axioma de unión** Queremos demostrar que:

$$(\forall a \in L)(\exists b \in L)(\forall x \in L)(x \in b \Leftrightarrow (\exists y \in L)(y \in a \wedge x \in y)).$$

Eso equivale a demostrar que para todo $a \in L$, el conjunto $b := \bigcup a$ es constructible. Para ello, se fija un ordinal $\alpha \in On$ tal que $a \in L_\alpha$, y se observa que:

$$b \;=\; \bigcup a \;=\; \left\{x \in L_\alpha : \big(\exists y\,(y \in a \wedge x \in y)\big)^{L_\alpha}\right\} \;\in\; \mathrm{Def}(L_\alpha) \;\subseteq\; L.$$

(...)

$(L, \in)$ es un modelo interno de ZF (2/3)

Demo (continuación).

- **Axiomas de comprensión** Para cada fórmula $\varphi(x, \vec{z})$, queremos demostrar que:

$$(\forall \vec{z} \in L)(\forall a \in L)(\exists b \in L)(\forall x \in L)(x \in b \iff x \in a \wedge \varphi^L(x, \vec{z})).$$

Eso equivale a demostrar que para todos $\vec{z}, a \in L$, el conjunto $b := \{x \in a : \varphi^L(x, \vec{z})\}$ es constructible. Para ello, se fija un ordinal $\alpha \in On$ tal que $\vec{z}, a \in L_\alpha$. Por el principio de reflexión (generalizado a la jerarquía $(L_\alpha)_{\alpha \in On}$), existe $\beta \geq \alpha$ tal que

$$(\forall x, \vec{z} \in L_\beta)\big(\varphi^{L_\beta}(x, \vec{z}) \iff \varphi^L(x, \vec{z})\big).$$

Luego se observa que:

$$b \;=\; \{x \in a : \varphi^L(x, \vec{z})\} \;=\; \{x \in L_\beta : (x \in a \wedge \varphi(x, \vec{z}))^{L_\beta}\} \;\in\; \mathrm{Def}(L_\beta) \;\subseteq\; L.$$

- **Axioma del conjunto potencia** Queremos demostrar que

$$(\forall a \in L)(\exists b \in L)(\forall x \in L)(x \in b \iff x \subseteq a)$$

(observando que $(x \subseteq a)^L \iff x \subseteq a$ para todos $x, a \in L$). Eso equivale a demostrar que para todo $a \in L$, el conjunto $b := \mathfrak{P}(a) \cap L$ es constructible. Para ello, se fija un ordinal $\alpha \in On$ tal que $\mathfrak{P}(a) \cap L \subseteq L_\alpha$. Luego se observa que:

$$b \;=\; \mathfrak{P}(a) \cap L \;=\; \{x \in L_\alpha : (x \subseteq a)^L\} \;\in\; \mathrm{Def}(L_\alpha) \;\subseteq\; L.$$

- **Axioma de infinitud** Queremos mostrar que $(\exists x \in L)(x \text{ ordinal límite})^L$. Basta con observar que $\omega \in L$, y que la fórmula "x ordinal límite" es absoluta en L (pues Δ_0). (...)

$(L, \in)$ es un modelo interno de ZF (3/3)

Demo (continuación y fin).

- **Axiomas de reemplazo** Para cada fórmula $\psi(x, y, \vec{z})$, queremos demostrar que:

$$(\forall \vec{z}, a \in L)\big((\forall x \in L)(x \in a \Rightarrow (\exists! y \in L)\, \psi^L(x, y, \vec{z})) \;\Rightarrow\; (\exists b \in L)(\forall x \in L)(x \in a \Rightarrow (\exists y \in L)(y \in b \wedge \psi^L(x, y, \vec{z})))\big)$$

es decir: $(\forall \vec{z}, a \in L)\big((\forall x \in a)(\exists! y \in L)\, \psi^L(x, y, \vec{z}) \;\Rightarrow\; (\exists b \in L)(\forall x \in a)(\exists y \in b)\, \psi^L(x, y, \vec{z})\big)$.

Aplicando el esquema de reemplazo al conjunto a con la fórmula $y \in L \wedge \psi^L(x, y, \vec{z})$, se obtiene un conjunto $b_0 \subseteq L$ tal que $(\forall x \in a)(\exists y \in b_0)\, \psi^L(x, y, \vec{z})$. Se fija ahora un ordinal $\alpha \in On$ tal que $\vec{z}, a \in L_\alpha$ y $b_0 \subseteq L_\alpha$. Por el principio de reflexión (generalizado a la jerarquía $(L_\alpha)_{\alpha \in On}$), existe $\beta \geq \alpha$ tal que:

$$(\forall x, y, \vec{z} \in L_\beta)\big(\psi^{L_\beta}(x, y, \vec{z}) \;\Leftrightarrow\; \psi^L(x, y, \vec{z})\big).$$

Luego se define $b \;:=\; \big\{y \in L_\beta : (\exists x \in a)\, \psi^L(x, y, \vec{z})\big\}$, y se concluye observando que

$$b \;=\; \big\{y \in L_\beta : \big((\exists x \in a)\, \psi(x, y, \vec{z})\big)^{L_\beta}\big\} \;\in\; \mathrm{Def}(L_\beta) \;\subseteq\; L$$

mientras que $(\forall x \in a)(\exists y \in b)\, \psi^L(x, y, \vec{z})$.

- **Axioma de fundación** Queremos demostrar (en ZF) que

$$(\forall a \in L)((\exists x \in L)(x \in a) \Rightarrow (\exists x \in L)(x \in a \wedge (\forall y \in L)(y \in a \Rightarrow y \notin x))).$$

Obvio, pues la clase L es transitiva y $L \subseteq V$. □

$(L, \in)$ satisface $V = L$

- Sólo nos queda demostrar que:

Proposición: $(L, \in) \models V = L$ (en ZF)

- La demostración consiste esencialmente en observar que todas las fórmulas involucradas en la definición de la relación funcional "$Y = L_\alpha$" (inclusive la propia relación "$Y = L_\alpha$") son de clase Σ_1 †

- Para ello, se usará frecuentemente el siguiente lema:

Lema (Composición de relaciones/funcionales de clase Σ_1)

Sean $\psi(\vec{x}, y, \vec{z})$ una fórmula Σ_1 e $y = F(\vec{x})$ una relación funcional Σ_1 (definida a partir de una fórmula $\varphi_F(\vec{x}, y) \ : \ \Sigma_1$). Entonces la relación

$$\psi(\vec{x}, F(\vec{x}), \vec{z}) \quad :\equiv \quad \exists y \, (\varphi_F(\vec{x}, y) \wedge \psi(\vec{x}, y, \vec{z}))$$

es de clase Σ_1

Demo. Obvio

---

† Se considera aquí la noción de fórmula Σ_1 a menos de equivalencia lógica en ZF

$(L, \in)$ satisface $V = L$ (2/8)

- Más generalmente, si $y = F_1(\vec{x})$, ..., $y = F_k(\vec{x})$ y $z = G(\vec{y})$ son relaciones funcionales de clase Σ_1 (con $\vec{y} \equiv y_1, \ldots, y_k$), entonces la relación funcional

$$z = G(F_1(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{x}))$$

es de clase Σ_1

- Por ejemplo, las relaciones funcionales $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, $y = 4$, $y = \omega$, $y = \{x\}$, $y = x_1 \times x_2$ e $y = x_1 \cup x_2$ son Δ_0 y luego Σ_1. Entonces la relación compuesta

$$\begin{aligned} Y = \Phi(X) \quad :\equiv \quad Y = {} & \{0\} \times (\omega \times \omega) \ \cup \ \{1\} \times (\omega \times \omega) \ \cup \\ & \{2\} \times X \ \cup \ \{3\} \times (X \times X) \ \cup \ \{4\} \times (\omega \times X) \end{aligned}$$

es de clase Σ_1, y por lo tanto:

Lema: La fórmula $Y = \mathit{Form}$ es de clase Σ_1

Demo. Form es el único punto fijo de Φ (en ZF), luego: $Y = \mathit{Form} \Leftrightarrow Y = \Phi(Y)$. □

$(L, \in)$ satisface $V = L$ (3/8)

- **Recordatorio:** A cada fórmula interna $f \in \mathit{Form}$ se asocia su conjunto de variables libres $FV(f) \subseteq \mathit{Var}$ (donde $\mathit{Var} = \omega$)

Lema: La relación funcional $Y = FV(f)$ es de clase Σ_1

Demo. La función $h : \mathit{Form} \to \mathfrak{P}_{\mathsf{fin}}(\omega)$ que asocia a cada fórmula interna $f \in \mathit{Form}$ el conjunto $h(f) = FV(f)$ de sus variables libres está definida por la fórmula Σ_1:

$$\begin{array}{rcll}
\varphi(h) & :\equiv & h \text{ función } \wedge \operatorname{dom}(h) = \mathit{Form} & \wedge \\
 & & (\forall v_1, v_2 \in \omega)\, h(v_1 \mathrel{\dot{=}} v_2) = \{v_1, v_2\} & \wedge \\
 & & (\forall v_1, v_2 \in \omega)\, h(v_1 \mathrel{\dot{\in}} v_2) = \{v_1, v_2\} & \wedge \\
 & & (\forall f \in \mathit{Form})\, h(\dot{\neg} f) = h(f) & \wedge \\
 & & (\forall f_1, f_2 \in \mathit{Form})\, h(f_1 \mathrel{\dot{\vee}} f_2) = h(f_1) \cup h(f_2) & \wedge \\
 & & (\forall v \in \omega)\, (\forall f \in \mathit{Form})\, h((\dot{\exists}\, v)\, f) = h(f) - \{v\} &
\end{array}$$

(pues todas las fórmulas involucradas en la definición anterior son Δ_0 o Σ_1).

Se concluye, observando que: $Y = FV(f) \;\Leftrightarrow\; \exists h\, [\varphi(h) \wedge Y = h(f)]$. $\square$

$(L, \in)$ satisface $V = L$ (4/8)

- Queremos demostrar ahora que el predicado $(X, \in) \models f[\rho]$ ("la fórmula f con parám. en ρ está satisfecha en $(X, \in)$") es de clase Σ_1
- **Dificultad:** La relación $Y = X^{Var}$ $(= X^{\omega})$ no es de clase Σ_1
  - Reemplazar X^{Var} por $X^{FV(f)}$ (conjunto de las valuaciones finitas)

Lema: La relación funcional $Y = X^{FV(f)}$ es de clase Σ_1

Demo. Dados un conjunto finito $V \subseteq Var$ y una variable $v \in Var - V$, se observa que

$$X^{V \cup \{v\}} = \mathrm{distr}(X^V, v, X) := \{\rho \cup \{(v, x)\} \ : \ \rho \in X^V \land x \in X\},$$

donde la relación funcional $Z = \mathrm{distr}(Y, v, X)$ está definida por la fórmula Σ_1

$$\begin{aligned} Z = \mathrm{distr}(Y, v, X) \quad :\equiv \quad & (\forall \rho \in Y)(\forall x \in X)\, \rho \cup \{(v, x)\} \in Z \ \land \\ & (\forall \rho' \in Z)(\exists \rho \in Y)(\exists x \in X)\, \rho' = \rho \cup \{(v, x)\}\,. \end{aligned}$$

Luego, se observa que:

$$\begin{aligned} Y = X^{FV(f)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists n\, \exists g\, \exists h\, [& n \in \omega \ \land \ g : n \xrightarrow{\sim} FV(f) \ \land \ h \text{ función } \land \\ & \mathrm{dom}(h) = n + 1 \ \land \ h(0) = \{\varnothing\} \ \land \ h(n) = Y \ \land \\ & (\forall i < n)\, h(i+1) = \mathrm{distr}(h(i), g(i), X)]\,. \end{aligned}$$

□

$(L, \in)$ satisface $V = L$ (5/8)

- De modo análogo, la relación funcional $Y = Val_X(f)$ $(\subseteq X^{Var})$ ("Y es el valor de verdad de f en X") no es Σ_1
  - Reemplazar $Val_X(f)$ por el valor de verdad reducido
    $$Val'_X(f) := \{\rho \restriction FV(f) \ : \ \rho \in Val_X(f)\} \qquad (\subseteq X^{FV(f)})$$

Lema: La relación funcional $Y = Val'_X(f)$ es de clase Σ_1

Demo. Dado un conjunto X, la función h que asocia a cada fórmula $f \in Form$ su valor de verdad reducido $h(f) = Val'_X(f)$ está definido por la fórmula $\varphi(X, h) : \Sigma_1$ definida por:

$$\begin{array}{lll}
\varphi(X,h) & \equiv & h \text{ función } \wedge \ \mathrm{dom}(h) = Form \qquad \wedge \\
& & (\forall v_1, v_2 \in \omega)(\forall \rho \in X^{FV(v_1 \doteq v_2)})\,[\rho \in h(v_1 \doteq v_2) \Leftrightarrow \rho(v_1) = \rho(v_2)] \qquad \wedge \\
& & (\forall v_1, v_2 \in \omega)\,(\forall \rho \in X^{FV(v_1 \dot{\in} v_2)})\,[\rho \in h(v_1 \dot{\in} v_2) \Leftrightarrow \rho(v_1) \in \rho(v_2)] \qquad \wedge \\
& & (\forall f \in Form)\,(\forall \rho \in X^{FV(\dot{\neg} f)})[\rho \in h(\dot{\neg} f) \Leftrightarrow \rho \in h(f)] \qquad \wedge \\
& & (\forall f_1, f_2 \in Form)\,(\forall \rho \in X^{FV(f_1 \dot{\vee} f_2)}) \\
& & \quad [\rho \in h(f_1 \dot{\vee} f_2) \ \Leftrightarrow \ (\rho \restriction FV(f_1)) \in h(f_1) \vee (\rho \restriction FV(f_2)) \in h(f_2)] \qquad \wedge \\
& & (\forall v \in \omega)\,(\forall f \in Form)\,(\forall \rho \in X^{FV((\dot{\exists} v) f)}) \\
& & \quad [\rho \in h((\dot{\exists} v) f) \ \Leftrightarrow \ (\exists x \in X)\,(\rho \cup \{(v, x)\}) \in h(f)]
\end{array}$$

Luego, se observa que: $Y = Val'_X(f) \ \Leftrightarrow \ \exists h\,[\varphi(X,h) \wedge h(f) = Y]$. $\square$

$(L, \in)$ satisface $V = L$ (6/8)

Lema: La relación funcional $Y = \mathrm{Def}(X)$ es de clase Σ_1

Demo. Escribiendo

$$Z = \mathrm{def}_X(f, \rho) \quad :\equiv \quad Z \subseteq X \ \wedge \ (\forall x \in X)\,[x \in Z \Leftrightarrow (\rho \cup \{(\mathtt{x}_0, x)\}) \in \mathit{Val}'_X(f)],$$

("$Z \subseteq X$ está definido por la fórmula f con parámetros ρ"), se observa que:

$$\begin{aligned} Y = \mathrm{Def}(X) \quad \equiv \quad & (\forall f \in \mathit{Form})\,(\forall \rho \in X^{FV((\dot\exists\, \mathtt{x}_0) f)})\,\mathrm{def}_X(f, \rho) \in Y \ \wedge \\ & (\forall Z \in Y)\,(\exists f \in \mathit{Form})\,(\exists \rho \in X^{FV((\dot\exists\, \mathtt{x}_0) f)})\,Z = \mathrm{def}_X(f, \rho)\,. \end{aligned}$$

□

Lema: La relación funcional $Y = L_\alpha$ es de clase Σ_1

Demo. Para cada ordinal α, la función h de dominio α que asocia a cada ordinal $\beta < \alpha$ el conjunto $h(\beta) = L_\beta$ está definida por la Σ_1-fórmula $\varphi(\alpha, h)$ dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, h) \quad \equiv \quad & h \text{ función} \ \wedge \ \mathrm{dom}(h) = \alpha \ \wedge \\ & (\forall \beta < \alpha)\,(\forall \gamma < \beta)\,\mathrm{Def}(h(\gamma)) \subseteq h(\beta) \ \wedge \\ & (\forall \beta < \alpha)\,(\forall x \in h(\beta))\,(\exists \gamma < \beta)\,x \in \mathrm{Def}(h(\gamma))\,. \end{aligned}$$

Luego, se observa que: $Y = L_\alpha \ \Leftrightarrow \ \mathit{On}(\alpha) \wedge \exists h\,[\varphi(\alpha + 1, h) \wedge Y = h(\alpha)]$. □

$(L, \in)$ satisface $V = L$

Proposición (La operación $\alpha \mapsto L_\alpha$ es absoluta)

La operación $\alpha \mapsto L_\alpha$ es absoluta, en el sentido en que para todo modelo interno M de ZF, tenemos que:

$$(\forall \alpha \in On)\ \forall Y\ \big(Y = L_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad Y \in M\ \wedge\ (Y = L_\alpha)^M\big).$$

Es decir: $L_\alpha \in M$ y $L_\alpha = L_\alpha^M$ (para todo $\alpha \in On$)

Demo. En ZF, la relación $Y = L_\alpha$ es funcional con respecto a $\alpha \in On$, es decir:

$$\text{ZF} \vdash (\forall \alpha \in On)\, \exists! Y\, (Y = L_\alpha).$$

Entonces para cualquier modelo interno M de ZF, tenemos que:

$$(\forall \alpha \in On^M)\, (\exists! Y \in M)\, (Y = L_\alpha)^M.$$

Luego, para cada ordinal $\alpha \in On$ $(= On^M)$, existe un único conjunto Y $(\in V)$ tal que $Y = L_\alpha$ así como un único conjunto $Y' \in M$ tal que $(Y' = L_\alpha)^M$. Pero como la fórmula "$Y = L_\alpha$" es de clase Σ_1, también tenemos que $Y' = L_\alpha$ (en V), y por lo tanto $Y = Y'$ por unicidad. $\square$

$(L, \in)$ satisface $V = L$

- Ahora podemos demostrar la:

Proposición (recordatorio): $(L, \in) \models V = L$

Demo. La fórmula $(V = L)^L$ se cumple en ZF, pues:

$$\begin{aligned}
(V = L)^L &\equiv \big(\forall x\, (\exists \alpha \in On)\, \exists Y\, (Y = L_\alpha \wedge x \in Y)\big)^L \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in L)(\exists \alpha \in On^L)(\exists Y \in L)\, ((Y = L_\alpha)^L \wedge x \in Y) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in L)(\exists \alpha \in On)\, \exists Y\, (Y = L_\alpha \wedge x \in Y) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in L)\, x \in L \quad \text{(tautología).}
\end{aligned}$$

□

- Esto acaba la prueba de que L es un modelo interno de ZF que cumple el axioma de constructibilidad:

(ZF $\vdash$) $\qquad (L, \in) \models \mathsf{ZF} + V = L$

Corolario: $\mathsf{ZF} + V = L \approx \mathsf{ZF}$ (equiconsistencia)

Minimalidad de L

Teorema (Minimalidad de L)

La clase L es el mínimo modelo interno de ZF, pues

(ZF $\vdash$) $$L \subseteq M \ \wedge \ L = L^M$$

para todo modelo interno M de ZF

Demo. Ya vimos que la relación funcional $Y = L_\alpha$ es absoluta en todo modelo interno M de ZF, en el sentido en que $L_\alpha \in M$ y $L_\alpha = L_\alpha^M$ para todo $\alpha \in On$, y por lo tanto: $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha \subseteq M$. Además, para todo x, tenemos que:

$$\begin{aligned} x \in L \ &\Leftrightarrow \ (\exists \alpha \in On)\ x \in L_\alpha \ \Leftrightarrow \ (\exists \alpha \in On^M)\ x \in L_\alpha^M \\ &\Leftrightarrow \ \big((\exists \alpha \in On)\ x \in L_\alpha\big)^M \ \Leftrightarrow \ (x \in L)^M . \end{aligned}$$

□

- **Ejercicio:** Demostrar que si M es un modelo transitivo de ZF tal que $On \not\subseteq M$, entonces M es un conjunto, y

$$M \subseteq V_\alpha, \qquad On^M = On \cap M = \alpha, \qquad L^M = L \cap M = L_\alpha,$$

donde $\alpha = \min(On - M)$

  - Modelo estándar de ZF (= conjunto transitivo $M \models$ ZF)

Punto de vista de los modelos de Tarski (1/2)

- **Recordatorio:** Un modelo de Tarski de ZF es un grafo‡ $(\mathscr{M}, \in^{\mathscr{M}})$ que cumple todos los axiomas (y luego todos los teoremas) de ZF
- Cuando la relación $\in^{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}^2$ está bien fundada (en la metateoría), existe (por el teorema de colapso) un conjunto transitivo M tal que:

$$(\mathscr{M}, \in^{\mathscr{M}}) \ \cong \ (M, \in) \qquad \text{(modelo estándar)}$$

- Sin embargo, el teorema de completitud no implica la existencia de modelos bien fundados o estándar¶ (si ZF es consistente)
- Dado un modelo $\mathscr{M} \models$ ZF (bien fundado o no), se escriben:

$$\begin{aligned} On^{\mathscr{M}} &:= \{a \in \mathscr{M} \ : \ (\mathscr{M}, \in^{\mathscr{M}}) \models On(a)\} \\ L^{\mathscr{M}} &:= \{a \in \mathscr{M} \ : \ (\mathscr{M}, \in^{\mathscr{M}}) \models L(a)\} \end{aligned} \qquad \text{(etc.)}$$

‡Donde $\mathscr{M}$ es un conjunto en el sentido de la metateoría

¶Pero la existencia de cardinales grandes (en la metateoría) implica la existencia de modelos estándar de la forma $M = V_\kappa$ (con κ grande)

Punto de vista de los modelos de Tarski (2/2)

- Sea $\mathscr{M} = (\mathscr{M}, \in^{\mathscr{M}})$ un modelo de Tarski de ZF. Un submodelo de $\mathscr{M}$ es un subconjunto[§] $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$ tal que $(\mathscr{N}, \in^{\mathscr{M}}_{\restriction \mathscr{N}^2}) \models \mathrm{ZF}$

  Un submodelo $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$ no tiene que ser definible en $\mathscr{M}$ (por una fórmula de ZF con parámetros en $\mathscr{M}$)

- Un submodelo $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$ es transitivo cuando para todos $a, a' \in \mathscr{M}$: $a \in \mathscr{N}$ y $a' \in^{\mathscr{M}} a$ implican $a' \in \mathscr{N}$

Teorema (Minimalidad de $L^{\mathscr{M}}$ en $\mathscr{M}$)

En cada modelo de Tarski $\mathscr{M} \models \mathrm{ZF}$, el subconjunto $L^{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}$ es el mínimo submodelo transitivo de $\mathscr{M}$ que contiene $On^{\mathscr{M}}$:

(1) $L^{\mathscr{M}} \models \mathrm{ZF}$ $(+\ V = L)$ (con $On^{\mathscr{M}} \subseteq L^{\mathscr{M}}$)

(2) Para todo submodelo transitivo $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$ tal que $On^{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{N}$, tenemos que: $L^{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{N}$ y $L^{\mathscr{M}} = L^{\mathscr{N}}$

Demo. Ejercicio

[§] En el sentido de la metateoría

Plan

$V = L$ implica AC

Proposición (en ZF)

Todos los conjuntos L_α ($\alpha \in On$) son bien ordenables, así como la clase $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$

Demo. Para todo $x \in L$, se nota $\ell(x)$ al mínimo ordinal tal que $x \in L_{\ell(x)}$.

Ya construimos una funcional $(\leq) \mapsto (\leq^*)$ que asocia a cada buen orden $\leq$ sobre un conjunto X un buen orden $\leq^*$ sobre el conjunto $\mathrm{Def}(X)$.

Por recursión sobre α se construye un buen orden $\leq_\alpha$ sobre L_α del siguiente modo:

- El buen orden $\leq_0$ sobre $L_0 = \varnothing$ es el orden vacío
- Para todo ordinal α, el buen orden $\leq_{\alpha+1}$ sobre $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$ es el orden $\leq_\alpha^*$
- Para todo ordinal límite α, el buen orden $\leq_\alpha$ sobre $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$ está definido por:

$$x \leq_\alpha y \quad :\equiv \quad \ell(x) < \ell(y) \ \lor \ (\ell(x) = \ell(y) \ \land \ x \leq_{\ell(x)} y) \qquad \text{(para todos } x, y \in L_\alpha)$$

Luego, se define el buen orden $\leq_L$ sobre la clase $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$, escribiendo:

$$x \leq_L y \quad :\equiv \quad \ell(x) < \ell(y) \ \lor \ (\ell(x) = \ell(y) \ \land \ x \leq_{\ell(x)} y) \qquad \text{(para todos } x, y \in L) \qquad \square$$

Corolario: ZF $\vdash V = L \Rightarrow$ AC

Hipótesis generalizada del continuo (HGC)

- **Recordatorio:** La jerarquía $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in On}$ de los cardinales infinitos está definida (en ZF) por:

$$\aleph_0 := \omega \qquad \aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+ \qquad \aleph_\lambda := \sup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \quad (\lambda \text{ límite})$$

- También se define (en ZFC) la jerarquía $(\beth_\alpha)_{\alpha \in On}$ por:

$$\beth_0 := \omega \qquad \beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha} \qquad \beth_\lambda := \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha \quad (\lambda \text{ límite})$$

(Observar que $|\mathfrak{P}(\omega)| = |\mathbb{R}| = \beth_1$)

- Con estas notaciones (en ZFC), se notan:

HC: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (hipótesis del continuo)

$\Leftrightarrow$ $\aleph_1 = \beth_1$

HGC: $(\forall \alpha \in On)\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ (hip. gen. del continuo)

$\Leftrightarrow$ $(\forall \alpha \in On)\ \aleph_\alpha = \beth_\alpha$

Cardinal de las operaciones de clase Σ_1 (1/2)

Proposición (Cardinal de las operaciones Σ_1) (en ZFC)

Sea $y = F(x)$ una funcional de clase Σ_1, definida a partir de una fórmula $\varphi(x, y)$ de clase Σ_1 (sin parámetros). Entonces:

$$|F(x)| \leq \max(|\mathrm{Cl}(x)|, \aleph_0) \qquad \text{(para todo } x \in \mathrm{dom}(F)\text{)}$$

donde $\mathrm{Cl}(x)$ es la clausura transitiva de x

Demo. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que la fórmula $\varphi(x, y)$ ("$y = F(x)$") es estrictamente Σ_1 (es decir: $\varphi(x, y) \equiv \exists\vec{z}\,\psi(\vec{z}, x, y)$, donde $\psi(\vec{z}, x, y)$ es Δ_0).

En lo que sigue, se fija $x \in \mathrm{dom}(F)$ así como un ordinal α tal que $x \in V_\alpha$.

1. Reflexión. Por reflexión, existe $\beta \geq \alpha$ tal que $(\exists y \in V_\beta)\,\varphi^{V_\beta}(x, y) \Leftrightarrow \exists y\,\varphi(x, y)$, y como $\exists y\,\varphi(x, y)$ (pues $x \in \mathrm{dom}(F)$), se deduce que $(\exists y \in V_\beta)\,\varphi^{V_\beta}(x, y)$.

2. Löwenheim-Skolem. Sea $P := \mathrm{Cl}(\{x\}) = \{x\} \cup \mathrm{Cl}(x)$ (notar que $|P| = |\mathrm{Cl}(x)| + 1$). Por el teorema de Löwenheim-Skolem, existe $Q \subseteq V_\beta$ tal que $P \subseteq Q$, $|Q| \leq \max(|P|, \aleph_0) = \max(|\mathrm{Cl}(x)|, \aleph_0)$, y tal que $(Q, \in)$ es elementalmente equivalente a $(V_\beta, \in)$.
Y como $(\exists y \in V_\beta)\,\varphi^{V_\beta}(x, y)$, se deduce que $(\exists y \in Q)\,\varphi^{Q}(x, y)$. (...)

Cardinal de las operaciones de clase Σ_1 (2/2)

Demo (continuación y fin). Tenemos que $(\exists y \in Q)\, \varphi^Q(x, y)$.

3. Colapso de Mostowski. Como el conjunto V_β es transitivo, el modelo $(V_\beta, \in)$ cumple el axioma de extensionalidad, así como el submodelo elemental $(Q, \in)$. Entonces la relación $\in$ restringida a Q es extensional, es decir: $(\forall z, z' \in Q)((z \cap Q) = (z' \cap Q) \Rightarrow z = z')$.
Por el teorema de Mostowski, existe un (único) conjunto Q' transitivo equipado con un (único) isomorfismo $u : (Q, \in) \tilde{\to} (Q', \in)$, definido por: $u(z) = \{u(z') : z' \in (z \cap Q)\}$ $(z \in Q)$.
Luego se demuestra que para toda fórmula interna $f \in Form_n$ $(n \in \omega)$, tenemos que:

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in Q)\big((Q, \in) \models f(x_1, \ldots, x_n) \;\Leftrightarrow\; (Q', \in) \models f(u(x_1), \ldots, u(x_n))\big)$$

(por inducción sobre la fórmula $f \in Form$). Además como el subconjunto $P = \mathrm{Cl}(\{x\}) \subseteq Q$ es transitivo, tenemos que $u(z) = z$ para todo $z \in P$ (por $\in$-inducción), entonces $P \subseteq Q'$.
Por lo tanto, para cada fórmula interna $f \in Form_n$, tenemos que:

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in P)\big((Q, \in) \models f(x_1, \ldots, x_n) \;\Leftrightarrow\; (Q', \in) \models f(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Considerando ahora la fórmula $f := (\dot{\exists}\, \mathtt{y})\lceil\varphi\rceil(\mathtt{x}_1, \mathtt{y})$ con el parámetro $x_1 := x \in P$, se deduce que $(\exists y \in Q)\, \varphi^Q(x, y) \;\Leftrightarrow\; (\exists y \in Q')\, \varphi^{Q'}(x, y)$, y por lo tanto $(\exists y \in Q')\, \varphi^{Q'}(x, y)$.

4. Ascención Por lo anterior, existe $y \in Q'$ tal que $\varphi^{Q'}(x, y)$. Pero como $(Q', \in)$ es un submodelo transitivo de $(V, \in)$, y como la fórmula φ es Σ_1, se deduce que $\varphi(x, y)$ (por ascensión). Por lo tanto, tenemos que $y = F(x)$, y como $y \subseteq Q'$ (pues Q' es transitivo), se concluye que: $|F(x)| = |y| \leq |Q'| = |Q| \leq \max(|P|, \aleph_0) = \max(|\mathrm{Cl}(x)|, \aleph_0)$. $\square$

Cardinal de los conjuntos L_α

- **Notación:** Para todo $x \in L$, se nota $\ell(x) := \min\{\alpha \in On \, : \, x \in L_\alpha\}$

Lema

(1) Para todo $\alpha \geq \omega$, tenemos que $|L_\alpha| = |\alpha|$

(2) Para todo $x \in L$, tenemos que $|\ell(x)| \leq \max(|\mathrm{Cl}(x)|, \ \aleph_0)$

Demo. Para todo $\alpha \geq \omega$, tenemos que $|L_\alpha| \leq \max(|\mathrm{Cl}(\alpha)|, \aleph_0) = |\alpha|$ por la Prop. anterior, pues la funcional $Y = L_\alpha$ es Σ_1. Y como $\alpha \subseteq L_\alpha$, se concluye que $|L_\alpha| = |\alpha|$.

(2) Se observa que la funcional $\alpha = \ell(x)$ es Σ_1, pues:

$$\alpha = \ell(x) \quad \Leftrightarrow \quad On(\alpha) \ \wedge \ \exists Y \, (Y = L_\alpha \wedge x \in Y) \ \wedge \ (\forall \beta < \alpha) \, \exists Y \, (Y = L_\alpha \wedge x \notin Y).$$

Por la Prop. anterior, se deduce que $|\ell(x)| \leq \max(|\mathrm{Cl}(x)|, \aleph_0)$ para todo $x \in L$. $\square$

$V = L$ implica HGC

- Ya vimos en la demostración de $(L, \in) \models$ ZF que:

$$\underbrace{\mathfrak{P}^L(x)}_{\text{conjunto potencia en } L} = \mathfrak{P}(x) \cap L \in L \qquad \text{(para todo } x \in L)$$

Proposición (en ZFC)

Para todo ordinal $\alpha \in On$:

(1) $|\mathfrak{P}^L(\aleph_\alpha)| = |\mathfrak{P}(\aleph_\alpha) \cap L| \leq \aleph_{\alpha+1}$

(2) Si además $V = L$, entonces $|\mathfrak{P}(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$

Demo. (1) Dado $a \in \mathfrak{P}(\aleph_\alpha) \cap L$, tenemos que $|\ell(a)| \leq \max(|\mathrm{Cl}(a)|, \aleph_0) \leq \aleph_\alpha$, entonces $\ell(a) < \aleph_{\alpha+1}$ y luego $a \in L_{\aleph_{\alpha+1}}$. Acabos de mostrar que $\mathfrak{P}(\aleph_\alpha) \cap L \subseteq L_{\aleph_{\alpha+1}}$, y por lo tanto: $|\mathfrak{P}(\aleph_\alpha) \cap L| \leq |L_{\aleph_{\alpha+1}}| = \aleph_{\alpha+1}$.

(2) Si además $V = L$, entonces $|\mathfrak{P}(\aleph_\alpha)| = |\mathfrak{P}(\aleph_\alpha) \cap L| \leq \aleph_{\alpha+1}$, y como $|\mathfrak{P}(\aleph_\alpha)| > \aleph_\alpha$ (por el teorema de Cantor), se deduce que $|\mathfrak{P}(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$. □

Corolario: ZF $\vdash V = L \Rightarrow$ HGC

Absolutez de las fórmulas aritméticas

- En ZF, se llama fórmula aritmética a toda fórmula $\varphi(\vec{x})$ cuyas cuantificaciones son relativizadas a V_ω, es decir tal que

(ZF $\vdash$) $$\forall\vec{x}\,\big(\varphi(\vec{x})\ \Leftrightarrow\ \exists Y\,(Y = V_\omega \wedge \varphi_0(Y,\vec{x}))\big)$$

para cierta fórmula $\varphi_0(Y,\vec{x})$ de clase Δ_0

Proposición (Absolutez de las fórmulas aritméticas)

Toda fórmula aritmética $\varphi(\vec{x})$ es absoluta con respecto a cualquier modelo interno M de ZF: $(\forall\vec{x}\in V_\omega)\,(\varphi(\vec{x})\ \Leftrightarrow \varphi^M(\vec{x}))$

Demo. Recordando que $V_\omega = L_\omega$, se observa que para todos $\vec{x}\in V_\omega$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists Y\,(Y = L_\omega \wedge \varphi_0(Y,\vec{x}))\\ &\Leftrightarrow \quad (\exists Y\in M)\,\big((Y = L_\omega)^M \wedge \varphi_0^M(Y,\vec{x})\big) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^M(\vec{x}).\end{aligned}$$ $\square$

Corolario: ZF, ZFC y $\mathrm{ZF} + V = L$ (así como todas las teorías intermedias) demuestran exactamente las mismas fórmulas aritméticas

Conclusión

- En lo anterior, definimos (adentro de ZF) el universo constructible

$$L \;:=\; \bigcup_{\alpha\in On} L_\alpha, \qquad \text{con} \qquad L_\alpha \;:=\; \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Def}(L_\beta)$$

y demostramos (en ZF) que:

(1) L es un modelo interno de ZF $+\, V = L$

(2) L está incluido en todo modelo interno de ZF

(3) $V = L \;\Rightarrow\;$ AC $\wedge$ HGC

- Por (1) es claro que ZF $+\, V = L$ es equiconsistente con ZF, y por (3) tenemos las inclusiones:

$$\mathsf{ZF}^- \;\subset\; \mathsf{ZF} \;\subset\; \mathsf{ZFC} \;\subset\; \mathsf{ZFC} + \mathsf{HGC} \;\subset\; \mathsf{ZF} + V = L$$

- Por lo tanto, las 5 teorías anteriores son equiconsistentes:

$$\mathsf{ZF}^- \;\approx\; \mathsf{ZF} \;\approx\; \mathsf{ZFC} \;\approx\; \mathsf{ZFC} + \mathsf{HGC} \;\approx\; \mathsf{ZF} + V = L$$

Además, dichas teorías demuestran las mismas fórmulas aritméticas