Una introducción al forcing

3. Modelos booleanos de ZFC

Alexandre Miquel

septiembre de 2024

Plan

Plan

Álgebras booleanas

Definición (Álgebra booleana)

Un álgebra booleana es un conjunto ordenado $B = (B, \leq)$ tal que:

(1) B tiene mínimo y máximo:

$$0 := \min(B) \qquad \text{y} \qquad 1 := \max(B)$$

(2) Cada dos elementos $x, y \in B$ tienen ínfimo y supremo:

$$x \wedge y := \inf\{x, y\} \qquad \text{y} \qquad x \vee y := \sup\{x, y\}$$

(3) $\wedge$ (resp. $\vee$) es distributiva con respecto a $\vee$ (resp. $\wedge$):

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{aligned} \qquad (x, y, z \in B)$$

(4) Cada elemento $x \in B$ tiene un complemento $\neg x \in B$, tal que:

$$x \wedge \neg x = 0 \qquad \text{y} \qquad x \vee \neg x = 1$$

Álgebra booleana $=$ retículo acotado, distributivo y complementado

Observaciones (1/2)

Álgebra booleana = retículo acotado, distributivo y complementado

- Las dos leyes de distributividad son equivalentes

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \vee (x \vee z) \end{aligned} \qquad (x, y, z \in B)$$

- Dichas leyes implican que el complemento $\neg x$ (de cada x) es único.

  Es decir: $\neg x$ está definido por $x \wedge \neg x = 0$ y $x \vee \neg x = 1$

- La complementación $x \mapsto \neg x$ es una involución antítona:

$$\neg\neg x = x \qquad \text{y} \qquad (x \leq y \ \text{ sii } \ \neg y \leq \neg x)$$

- En particular, la complementación intercambia $\wedge$ con $\vee$:

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y \qquad \text{y} \qquad \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

Observaciones (2/2)

- Se definen la implicación $x \to y$ y la equivalencia $x \leftrightarrow y$ por:

$$x \to y \ := \ \neg x \vee y \qquad \text{y} \qquad x \leftrightarrow y \ := \ (x \to y) \wedge (y \to x)$$

- Tenemos que:

$$\neg(x \to y) \ = \ x \wedge \neg y \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \neg(x \leftrightarrow y) \ &= \ (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) \\ &= \ x \bigtriangleup y \quad \text{(diferencia simétrica)} \end{aligned}$$

- Relaciones útiles:

$$\begin{aligned} \neg x \leftrightarrow y \ &= \ x \leftrightarrow \neg y \ = \ \neg(x \leftrightarrow y) \ = \ x \bigtriangleup y \\ \neg x \bigtriangleup y \ &= \ x \bigtriangleup \neg y \ = \ \neg(x \bigtriangleup y) \ = \ x \leftrightarrow y \end{aligned}$$

- Se puede caracterizar el orden $x \leq y$ mediante $\wedge$, $\vee$ y $\to$:

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\text{sii} \quad x \wedge y = x \\ &\text{sii} \quad x \vee y = y \\ &\text{sii} \quad x \to y = 1 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} x = y \quad &\text{sii} \quad x \leftrightarrow y = 1 \\ &\text{sii} \quad x \bigtriangleup y = 0 \end{aligned}$$

Ejemplos

- $\mathbf{1} \;:=\; \{0 = 1\}$ (álgebra booleana degenerada)
- $\mathbf{2} \;:=\; \{0, 1\}$ con $0 < 1$ (álgebra booleana trivial)
- $\mathfrak{P}(X)$ con $\subseteq$ (conjunto potencia)
  - Observar que $\mathbf{1} \;\simeq\; \mathfrak{P}(\varnothing)$ y $\mathbf{2} \;\simeq\; \mathfrak{P}(\{*\})$

Proposición (Producto de álgebras booleanas)

El producto $\prod_{i \in I} B_i$ de una familia $(B_i)_{i \in I}$ de álgebras booleanas (equipado con el orden producto) también es un álgebra booleana

- Observar que $\mathfrak{P}(X) \;\simeq\; \mathbf{2}^X \;=\; \prod_{\_\in X} \mathbf{2}$

- Sea Ω un conjunto. Toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ (equipada con $\subseteq$) es una subálgebra booleana del álgebra $\mathfrak{P}(\Omega)$ (con $\subseteq$).

  Más aún, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra booleana (i.e. con todos ínf./sup. numerables)

Morfismos de álgebras booleanas

Definición (Morfismo de álgebras booleanas)

Sean B y B' dos álgebras booleanas. Una función $f : B \to B'$ es un morfismo de álgebras booleanas cuando:

$$\begin{array}{rcl} f(\neg x) & = & \neg f(x) \\ f(x \wedge y) & = & f(x) \wedge f(y) \qquad f(0_B) = 0_{B'} \qquad (x, y \in B) \\ f(x \vee y) & = & f(x) \vee f(y) \qquad f(1_B) = 1_{B'} \end{array}$$

- **Definición:** $\mathbf{BA}$ = categoría de las álgebras booleanas
  (Es una subcategoría no llena de $\mathbf{Pos}$, la categoría de los conjuntos ordenados)

- **Propiedades:**
  (1) Un mapa es un isomorfismo en $\mathbf{BA}$ sii es un isomorfismo en $\mathbf{Pos}$
  (2) Todo morfismo inyectivo $f : B \to B'$ en $\mathbf{BA}$ es un encaje en $\mathbf{Pos}$:
  $$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y) \qquad (x, y \in B)$$
  (3) Por lo tanto, todo morfismo biyectivo en $\mathbf{BA}$ es un isomorfismo

Otras presentaciones equivalentes (1/2)

Se pueden definir las álgebras booleanas de otras maneras equivalentes:

Álgebras booleanas definidas a partir de sus operaciones

- Un álgebra booleana es un conjunto B dado con elementos $0, 1 \in B$ y operaciones $(\neg) : B \to B$ y $(\wedge), (\vee) : B^2 \to B$ tales que:

$$\begin{array}{rclcrcl} (x \wedge y) \wedge z &=& x \wedge (y \wedge z) & \qquad & (x \vee y) \vee z &=& x \vee (y \vee z) \\ x \wedge y &=& y \wedge x & & x \vee y &=& y \vee x \\ x \wedge (y \vee x) &=& x & & x \vee (y \wedge x) &=& x \\ x \wedge \neg x &=& 0 & & x \vee \neg x &=& 1 \end{array}$$

- Con la definición anterior, se deduce el orden por:

$$\begin{array}{ccc} x \leq y & \text{sii} & x \wedge y = x \\ & \text{sii} & x \vee y = y \end{array}$$

Otras presentaciones equivalentes (2/2)

Se pueden definir las álgebras booleanas de otras maneras equivalentes:

Álgebras booleanas definidas como anillos (conmutativos de característica 2)

- Cada álgebra booleana B constituye un anillo conmutativo de característica 2, cuyas operaciones son definidas por:

$$\begin{array}{rclcrcl} 0 & := & 0, & \quad & 1 & := & 1, \\ x+y & := & x \triangle y, & \quad & xy & := & x \wedge y \end{array}$$

- Recíprocamente, cada anillo conmutativo de característica 2 es un álgebra booleana, cuyas operaciones son definidas por:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} 0 & := & 0, & \quad & 1 & := & 1, & \quad & \neg x & := & x+1, \\ x \wedge y & := & xy, & \quad & x \vee y & := & xy+x+y \end{array}$$

- Con esta presentación (equivalente), la noción de morfismo de álgebras booleanas coincide con la noción de morfismo de anillos (restringida a los anillos conmutativos de característica 2)

Filtros e ideales (1/2)

Sea B un álgebra booleana

Definición (Filtro / Ideal)

- Un filtro de B es un subconjunto $F \subseteq B$ tal que:
  1. $1 \in F$ (F no es vacío)
  2. Si $x \in F$ e $y \geq x$, entonces $y \in F$ (F está cerrado superiormente)
  3. Si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$ (F está cerrado por $\wedge$)

  Si además $0 \notin F$ (es decir: $F \neq B$), F es un filtro propio

- Un ideal de B es un subconjunto $I \subseteq B$ tal que:
  1. $0 \in I$ (I no es vacío)
  2. Si $x \in I$ e $y \leq x$, entonces $y \in I$ (I está cerrado inferiormente)
  3. Si $x, y \in I$, entonces $x \vee y \in I$ (I está cerrado por $\vee$)

  Si además $1 \notin I$ (es decir: $I \neq B$), I es un ideal propio

Intuición:
– Filtro = criterio de verdad = “entorno” de 1
– Ideal = criterio de falsedad = “entorno” de 0

Filtros e ideales (2/2)

- Filtros e ideales son duales, vía complementación:

$$\begin{array}{lcl} F \text{ filtro} & \text{sii} & \neg F \text{ ideal} \\ I \text{ ideal} & \text{sii} & \neg I \text{ filtro} \end{array}$$

escribiendo $\neg X \ := \ \{\neg x : x \in X\}$ para todo $X \subseteq B$

- Además, como el conjunto de los filtros (resp. de los ideales) de B es estable por intersección arbitraria...

  ... se puede definir el filtro (el ideal) generado por cualquier $X \subseteq B$

Proposición (Preimagen de un filtro/ideal)

Dado un morfismo $f : B \to B'$ de álgebras booleanas, la preimagen de cualquier filtro (resp. ideal) de B' por f es un filtro (resp. ideal) de B

- En particular: $\begin{cases} f^{-1}(\{0_{B'}\}) \text{ es un ideal de } B \\ f^{-1}(\{1_{B'}\}) \text{ es un filtro de } B \end{cases}$

Cocientes

Se puede cocientar un álgebra booleana B por cualquier filtro $F \subseteq B$ o por cualquier ideal $I \subseteq B$ (por dualidad):

$$\begin{array}{rclcrcl} B/F & := & B/{\sim_F}, & \text{con} & x \sim_F y & :\equiv & (x \leftrightarrow y) \in F \\ B/I & := & B/{\sim_I}, & \text{con} & x \sim_I y & :\equiv & (x \mathbin{\triangle} y) \in I \end{array}$$

Intuición: $\begin{cases} B/F = \text{colapsar } F \text{ sobre } 1 & \text{(cociente por un filtro)} \\ B/I = \text{colapsar } I \text{ sobre } 0 & \text{(cociente por un ideal)} \end{cases}$

Proposición (Álgebra booleana cociente)

El cociente B/F (resp. B/I) es un álgebra booleana

Para todo $x \in B$, tenemos que:

$$\begin{array}{rclcl} [x]_{/F} & = & x \leftrightarrow F \\ [0]_{/F} & = & 0 \leftrightarrow F & = & \neg F \\ [1]_{/F} & = & 1 \leftrightarrow F & = & F \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} [x]_{/I} & = & x \mathbin{\triangle} I \\ [0]_{/I} & = & 0 \mathbin{\triangle} I & = & I \\ [1]_{/I} & = & 1 \mathbin{\triangle} I & = & \neg I \end{array}$$

Fracción de un álgebra booleana

- Para todo $x \in B$: $\left.\begin{array}{l} \uparrow\{x\} \text{ es el filtro principal} \\ \downarrow\{x\} \text{ es el ideal principal} \end{array}\right\}$ generado por x

  Obs.: $\downarrow\{x\}$ y $\uparrow\{x\}$ son álgebras booleanas (con el orden inducido), pero en general no son subálgebras booleanas de B

- Se definen $\left\{\begin{array}{lcccccc} B/_{x=0} & := & B/\downarrow\{x\} & \simeq & \uparrow\{x\} & \simeq & \downarrow\{\neg x\} \\ B/_{x=1} & := & B/\uparrow\{x\} & \simeq & \downarrow\{x\} & \simeq & \uparrow\{\neg x\} \end{array}\right.$

Proposición (Fracción con respecto a un elemento)

Para todo $x \in B$, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} B & \simeq & B/_{x=0} \times B/_{\neg x=0} \\ & \simeq & B/_{x=0} \times B/_{x=1} \quad \simeq \quad \uparrow\{x\} \times \downarrow\{x\} \end{array}$$

Corolario (Álgebras booleanas finitas)

Las álgebra booleanas finitas son las de la forma $B \simeq \mathbf{2}^n$, con $n \in \omega$

Otros ejemplos de cocientes

- Sea $B := (\mathfrak{P}(X), \subseteq)$, con X infinito. Se definen:

$$I_X := \{Y \subseteq X : Y \text{ finito}\} \qquad \text{(conjuntos finitos de } X)$$

$$F_X := \{Y \subseteq X : Y^c \text{ finito}\} = \neg I_X \qquad \text{(conjuntos cofinitos de } X)$$

  El álgebra cociente $\mathfrak{P}(X)/I_X = \mathfrak{P}(X)/F_X$ no tiene átomos(*); por lo tanto no es de la forma $\mathfrak{P}(Z)$ para ningún Z (a menos de iso)

- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. El conjunto

$$[\mu = 0] := \{X \in \mathcal{A} : \mu(X) = 0\}$$

  es un σ-ideal de $\mathcal{A}$ (i.e. con todos los supremos numerables).

  El cociente $\mathcal{A}/[\mu = 0]$ también es una σ-álgebra booleana

Ejercicio (Álgebra booleana numerable sin átomos)

(1) Construir un álgebra booleana numerable sin átomos

(2) Demostrar que dicha álgebra es única (a menos de iso)

(*) Átomo de B = elemento minimal de $B - \{0\}$

Ultrafiltros

Proposición y definición (Ultrafiltro)

Para todo filtro $F \subseteq B$, las siguientes aserciones son equivalentes:

- F es un filtro propio (i.e. $\neq B$) maximal
- F^c $(= B - F)$ es un ideal de B
- $F^c = \neg F$
- $\mathbf{1}_F : B \to \mathbf{2}$ (función indicatriz) es un morfismo
- $B/F \simeq \mathbf{2}$

Cuando es el caso, se dice que F es un ultrafiltro

- El dual de un ultrafiltro es un ideal primo

Teorema del ultrafiltro

Todo filtro propio $F \subsetneq B$ se puede extender en un ultrafiltro $U \supseteq F$

- El teorema del ultrafiltro es consecuencia del axioma de elección (vía el lema de Zorn), pero es estrictamente más débil

Álgebras booleanas completas

Definición (Álgebras booleanas completas)

(1) Un álgebra booleana B es completa cuando todo conjunto $X \subseteq B$ tiene ínfimo y supremo. Notación:

$$\bigwedge_{x \in X} x \ = \ \bigwedge X \ := \ \inf(X) \qquad \text{y} \qquad \bigvee_{x \in X} x \ = \ \bigvee X \ := \ \sup(X)$$

(2) Sean B, B' álgebras booleanas completas. Un mapa $f : B \to B'$ es un morfismo de álgebras booleanas completas cuando conmuta con la negación y con todos los ínfimos y supremos:

$$f(\neg x) = x, \qquad f\left(\bigwedge X\right) = \bigwedge f(X), \qquad f\left(\bigvee X\right) = \bigvee f(X)$$

para todos $x \in B$ y $X \subseteq B$

- **Ejercicio:** Probar que $\displaystyle x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i)$ y $\displaystyle x \vee \bigwedge_{i \in I} y_i = \bigwedge_{i \in I} (x \vee y_i)$

En lo siguiente, sólo consideraremos álgebras booleanas completas

Plan

Funciones totales y parciales en ZF (recordatorio)

- En ZF, las funciones son representadas por grafos funcionales:

$$
\begin{aligned}
(x,y) &:= \{\{x\},\{x,y\}\}\\
f \text{ función} &:\equiv (\forall z \in f)\,\exists x\,\exists y\ z = (x,y) \quad \wedge\\
&\qquad \forall x\,\forall y\,\forall y'\ ((x,y)\in f \wedge (x,y')\in f \Rightarrow y = y')\\
\mathrm{dom}(f) &:= \{x \in \textstyle\bigcup\bigcup f \ :\ \exists y\ (x,y)\in f\}\\
\mathrm{img}(f) &:= \{y \in \textstyle\bigcup\bigcup f \ :\ \exists x\ (x,y)\in f\}\\
f : A \to B &:\equiv f \text{ función} \ \wedge\ \mathrm{dom}(f) = A \ \wedge\ \mathrm{img}(f)\subseteq B\\
B^A &:= \{f \subseteq A\times B \ :\ (f : A \to B)\}
\end{aligned}
$$

- También se pueden representar funciones parciales:

$$f : A \rightharpoonup B \ :\equiv\ f \text{ función} \ \wedge\ \mathrm{dom}(f) \subseteq A \ \wedge\ \mathrm{img}(f) \subseteq B$$

$$B^{\subseteq A} \ :=\ \{f \subseteq A \times B \ :\ (f : A \rightharpoonup B)\} \ =\ \bigcup_{A'\subseteq A} B^{A'}$$

Construcción del modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$ (1/2)

En lo que sigue, se trabaja en ZF (o una extensión), y se fija un álgebra booleana completa $\mathbb{B}$, que parametriza la construcción

- De modo análogo a la jerarquía acumulativa, se define la sucesión transfinita $(V_\alpha^{\mathbb{B}})_{\alpha\in On}$ por:

$$V_\alpha^{\mathbb{B}} \;:=\; \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{B}^{\subseteq V_\beta^{\mathbb{B}}} \qquad (\alpha \in On)$$

- Es claro que la sucesión $(V_\alpha^{\mathbb{B}})_{\alpha\in On}$ es creciente. Además:

Proposición

Para todo $\alpha \in On$, tenemos que:

$$V_0^{\mathbb{B}} = \varnothing, \qquad V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^{\subseteq V_\alpha^{\mathbb{B}}} \quad \text{y} \quad V_\alpha^{\mathbb{B}} = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{\mathbb{B}} \qquad (\text{si } \alpha \text{ límite})$$

Demo. Se sigue de que $X \subseteq Y \;\Rightarrow\; \mathbb{B}^{\subseteq X} \subseteq \mathbb{B}^{\subseteq Y}$. □

Recordatorio: $X \subseteq Y \;\not\Rightarrow\; \mathbb{B}^X \subseteq \mathbb{B}^Y$ (razón para preferir funciones parciales)

Construcción del modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$ (2/2)

Definición (Modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$)

El modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$ es la unión transfinita de $(V^{\mathbb{B}}_\alpha)_{\alpha \in On}$:

$$u \in V^{\mathbb{B}} \qquad \text{sii} \qquad (\exists \alpha \in On)\ u \in V^{\mathbb{B}}_\alpha$$

Sus elementos son los $\mathbb{B}$-nombres

Lema: Para todo u, tenemos que:

$$u \in V^{\mathbb{B}} \qquad \text{sii} \qquad u \text{ función } \wedge \ \mathrm{dom}(u) \subseteq V^{\mathbb{B}} \ \wedge \ \mathrm{img}(u) \subseteq \mathbb{B}$$

- **Intuición:** $$V^{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^{\subseteq V^{\mathbb{B}}} = \bigcup_{X \subseteq V^{\mathbb{B}} \ (X \text{ conjunto})} \mathbb{B}^X$$

Principio de inducción en $V^{\mathbb{B}}$

Dada una fórmula $\varphi(u)$ (sobre $u \in V^{\mathbb{B}}$), tenemos que:

$$(\forall u \in V^{\mathbb{B}}) \big((\forall v \in \mathrm{dom}(u))\, \varphi(v) \ \Rightarrow \ \varphi(u) \big) \ \Rightarrow \ (\forall u \in V^{\mathbb{B}})\, \varphi(u)$$

Encaje de V en $V^{\mathbb{B}}$

- A cada conjunto $x \in V$ se asocia el $\mathbb{B}$-nombre $\check{x} \in V^{\mathbb{B}}$ definido por:

  $$\check{x} \; := \; \{(\check{y}, 1) \, : \, y \in x\} \qquad \text{(por } \in\text{-recursión)}$$

  y se considera la clase $\check{V} \; := \; \{\check{x} \, : \, x \in V\} \; (\subseteq V^{\mathbb{B}})$

  - Los elementos de $\check{V}$ son los $\mathbb{B}$-nombres estándar

Lema

(1) Si $x \in V_\alpha$, entonces $\check{x} \in V_\alpha^{\mathbb{B}}$ $(\alpha \in On)$

(2) La correspondencia $x \mapsto \check{x}$ es inyectiva

Corolario: Las clases $V^{\mathbb{B}}$ y $\check{V}$ $(\subseteq V^{\mathbb{B}})$ son clases propias

- **Intuición:** $\check{V}$ = copia de V adentro de $V^{\mathbb{B}}$
  - Permite ver $V^{\mathbb{B}}$ como una "expansión" de V $(\cong \check{V} \subseteq V^{\mathbb{B}})$

Intermezzo: Los conjuntos finitos como listas (1/2)

- En programación funcional, se pueden representar los conjuntos finitos por listas finitas. Por ejemplo en Haskell:

```
type Set = [Int]                                -- conjuntos de enteros

forall_in :: Set -> (Int -> Bool) -> Bool       -- combinador universal
  ...
exists_in :: Set -> (Int -> Bool) -> Bool       -- combinador existencial
  ...
```

- Como la representación de un conjunto por una lista no es única, se necesita trabajar a menos de igualdad extensional:

```
set_mem :: Int -> Set -> Bool                   -- pertenencia directa
set_mem x u = exists_in u (\y -> y == x)

set_sub :: Set -> Set -> Bool                   -- inclusion
set_sub u v = forall_in u (\x -> set_mem x v)

set_eq :: Set -> Set -> Bool                    -- igualdad extensional
set_eq u v = set_sub u v && set_sub v u
```

¡Sólo funciona con listas bien fundadas!

Intermezzo: Los conjuntos finitos como listas (2/2)

- ¿Qué pasa si queremos trabajar con conjuntos de conjuntos? En Haskell, tenemos que introducir un tipo recursivo:

```
data Set = C [Set]                                -- conjuntos recursivos

forall_in :: Set -> (Set -> Bool) -> Bool         -- combinator universal
  ...
exists_in :: Set -> (Set -> Bool) -> Bool         -- combinator existencial
  ...
```

- En este marco, la igualdad, la inclusión y la pertenencia tienen que ser definidas por recursión mutua:

```
set_eq :: Set -> Set -> Bool                      -- igualdad extensional
set_eq u v = set_sub u v && set_sub v u

set_sub :: Set -> Set -> Bool                     -- inclusion
set_sub u v = forall_in u (\x -> set_mem x v)

set_mem :: Set -> Set -> Bool                     -- pertenencia extensional
set_mem u v = exists_in v (\v’ -> set_eq u v’)
```

¡Sólo funciona con listas y conjuntos bien fundados!

Interpretación de las fórmulas atómicas

Definición

A cada $u, v \in V^{\mathbb{B}}$ se asocian valores $[\![u = v]\!]$, $[\![u \subseteq v]\!]$, $[\![u \in v]\!]$ $\in$ $\mathbb{B}$ definidos por recursión mutua sobre los rangos de u y v en $V^{\mathbb{B}}$:

$$\begin{aligned}
[\![\underset{\alpha}{u} = \underset{\alpha}{v}]\!] &:= [\![\underset{\alpha}{u} \subseteq \underset{\alpha}{v}]\!] \wedge [\![\underset{\alpha}{v} \subseteq \underset{\alpha}{u}]\!] \\
[\![\underset{\alpha}{u} \subseteq \underset{\alpha}{v}]\!] &:= \bigwedge_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \to [\![\underset{<\alpha}{u'} \in \underset{\alpha}{v}]\!]\big) \\
[\![\underset{<\alpha}{u} \in \underset{\alpha}{v}]\!] &:= \bigvee_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \big(v(v') \wedge [\![\underset{<\alpha}{u} = \underset{<\alpha}{v'}]\!]\big)
\end{aligned}$$

- **Intuición:**

$$\begin{aligned}
[\![u = v]\!] &= [\![u \subseteq v \wedge v \subseteq u]\!] \\
[\![u \subseteq v]\!] &= [\![\forall x' \, (x' \varepsilon u \Rightarrow x' \in v)]\!] \\
[\![u \in v]\!] &= [\![\exists y' \, (y' \varepsilon v \wedge u = y')]\!]
\end{aligned}$$

donde $x \varepsilon y$ es la relación de pertenencia fuerte (o intensional)

interpretada por $[\![u \varepsilon v]\!] := \begin{cases} v(u) & \text{si } u \in \mathrm{dom}(v) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Propiedades de $[\![\cdot = \cdot]\!]$ y $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ (1/7)

Proposición ($[\![\cdot = \cdot]\!]$ es una equivalencia en $V^{\mathbb{B}}$)

Para todos $u, v, w \in V^{\mathbb{B}}$:

(1) $[\![u = u]\!] = 1$

(2) $[\![u = v]\!] = [\![v = u]\!]$

(3) $[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![u = w]\!]$

Demo. (1) Se demuestra que $[\![u = u]\!] = 1$ por inducción sobre $u \in V^{\mathbb{B}}$.
Para ello, supongamos que $[\![u' = u']\!] = 1$ para todo $u' \in \mathrm{dom}(u)$ (HI).
Para todo $v \in \mathrm{dom}(u)$, tenemos que $[\![v = v]\!] = 1$, luego

$$u(v) \;=\; u(v) \wedge [\![v = v]\!] \;\leq\; \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \wedge [\![v = u']\!]\big) \;=\; [\![v \in u]\!],$$

es decir: $u(v) \leq [\![v \in u]\!]$. Por lo tanto, tenemos que:

$$[\![u = u]\!] \;=\; [\![u \subseteq u]\!] \;=\; \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(v) \to [\![v \in u]\!]\big) \;=\; \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(u)} 1 \;=\; 1.$$

(...)

Propiedades de $[\![\cdot = \cdot]\!]$ y $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ (2/7)

Demo (continuación). (2) Tenemos que

$$[\![u = v]\!] \; = \; [\![u \subseteq v]\!] \wedge [\![v \subseteq u]\!] \; = \; [\![v \subseteq u]\!] \wedge [\![u \subseteq v]\!] \; = \; [\![v = u]\!].$$

(3) Por inducción sobre $u, v, w \in V^{\mathbb{B}}$. Supongamos que

$$[\![u' = v']\!] \wedge [\![v' = w']\!] \leq [\![u' = w']\!]$$

para todos $u' \in \mathrm{dom}(u)$, $v' \in \mathrm{dom}(v)$, $w' \in \mathrm{dom}(w)$. Dado $u' \in \mathrm{dom}(u)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\![v \subseteq w]\!] \quad &= \bigwedge_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \big(v(v') \to [\![v' \in w]\!]\big) \\
&= \bigwedge_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(v') \to \bigvee_{w' \in \mathrm{dom}(w)} \big(w(w') \wedge [\![v' = w']\!]\big)\Big) \\
&\leq \bigwedge_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(v') \wedge [\![u' = v']\!] \to \bigvee_{w' \in \mathrm{dom}(w)} \big(w(w') \wedge [\![v' = w']\!]\big)\Big) \\
&\leq \bigwedge_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(v') \wedge [\![u' = v']\!] \to \bigvee_{w' \in \mathrm{dom}(w)} \big(w(w') \wedge [\![u' = w']\!]\big)\Big) \quad \text{(por HI)} \\
&= \bigvee_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \big(v(v') \wedge [\![u' = v']\!]\big) \; \to \bigvee_{w' \in \mathrm{dom}(w)} \big(w(w') \wedge [\![u' = w']\!]\big) \\
&= [\![u' \in v]\!] \to [\![u' \in w]\!] \, . \qquad (*)
\end{aligned}$$

Propiedades de $[\![\cdot = \cdot]\!]$ y $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ (3/7)

Demo (fin (3)). Ya vimos que $[\![v \subseteq w]\!] \ \leq\ [\![u' \in v]\!] \to [\![u' \in w]\!] \quad (u' \in \mathrm{dom}(u))$. $(*)$
Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\![u \subseteq v]\!] \wedge [\![v \subseteq w]\!] \quad &= \bigwedge_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \to [\![u' \in v]\!]\big) \ \wedge\ [\![v \subseteq w]\!] \\
&\leq \bigwedge_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \Big(\big(u(u') \to [\![u' \in v]\!]\big) \wedge [\![v \subseteq w]\!]\Big) \\
&\leq \bigwedge_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \Big(\big(u(u') \to [\![u' \in v]\!]\big) \wedge \big([\![u' \in v]\!] \to [\![u' \in w]\!]\big)\Big) \quad \text{(por } (*)\text{)} \\
&\leq \bigwedge_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \to [\![u' \in w]\!]\big) \ =\ [\![u \subseteq w]\!]\,.
\end{aligned}$$

Intercambiando u/u' con w/w' en el razonamiento anterior, también se deduce de HI que:

$$[\![w \subseteq v]\!] \wedge [\![v \subseteq u]\!] \ \leq\ [\![w \subseteq u]\!]$$

y por lo tanto: $$[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \ \leq\ [\![u = w]\!].$$ □

Propiedades de $[\![\cdot = \cdot]\!]$ y $[\![\cdot \in \cdot]\!]$

Proposición ($[\![\cdot \in \cdot]\!]$ es compatible con $[\![\cdot = \cdot]\!]$ en $V^{\mathbb{B}}$)

Para todos $u, v, w, \vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$:

(1) $u(v) \leq [\![v \in u]\!]$ si $v \in \mathrm{dom}(u)$

(2) $[\![u = v]\!] \wedge [\![v \in w]\!] \leq [\![u \in w]\!]$

(3) $[\![u \in v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![u \in w]\!]$

- **Observación:** En lógica de primer orden, las fórmulas

$$\forall x\, x = x \qquad (= \text{reflexiva})$$
$$\forall x\, \forall y\, (x = y \Rightarrow y = x) \qquad (= \text{simétrica})$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z) \qquad (= \text{transitiva})$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z) \qquad (\in \text{ compat. con } = \text{ por la izq.})$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \in y \wedge y = z \Rightarrow x \in z) \qquad (\in \text{ compat. con } = \text{ por la der.})$$

permiten axiomatizar la igualdad[†] en cualquier sistema de deducción clásica (NK, LK) sin reglas para la igualdad

---

[†]Para el lenguaje de ZF, cuyo único símbolo no lógico es $\in$

Propiedades de $[\![\cdot = \cdot]\!]$ y $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ (5/7)

Demo. (1) $u(v) \;=\; u(v) \wedge [\![v = v]\!] \;\leq\; \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \wedge [\![u' = v]\!]\big) \;=\; [\![v \in u]\!].$

(2)
$$\begin{aligned} [\![u = v]\!] \wedge [\![v \in w]\!] &= [\![u = v]\!] \wedge \bigvee_{w' \in \mathrm{dom}(w)} \big(w(w') \wedge [\![w' = v]\!]\big) \\ &= \bigvee_{w' \in \mathrm{dom}(w)} \big(w(w') \wedge [\![w' = v]\!] \wedge [\![v = u]\!]\big) \\ &\leq \bigvee_{w' \in \mathrm{dom}(w)} \big(w(w') \wedge [\![w' = u]\!]\big) \;=\; [\![u \in w]\!]\,. \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} [\![u \in v]\!] \wedge [\![v = w]\!] &= \bigvee_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \big(v(v') \wedge [\![v' = u]\!]\big) \wedge [\![v = w]\!] \\ &= \bigvee_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \big([\![u = v']\!] \wedge v(v') \wedge [\![v = w]\!]\big) \\ &\leq \bigvee_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \big([\![u = v']\!] \wedge v(v') \wedge (v(v') \to [\![v' \in w]\!])\big) \\ &\leq \bigvee_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \big([\![u = v']\!] \wedge [\![v' \in w]\!]\big) \;\leq\; [\![u \in w]\!]\,. \qquad \text{(por (2))} \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de $[\![\cdot = \cdot]\!]$ y $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ (6/7)

- **Recordatorio:** Cada conjunto x (usual) está representado en $V^{\mathbb{B}}$ por el $\mathbb{B}$-nombre $\check{x}$ definido por:

$$\check{x} \ := \ \{(\check{y}, 1) \, : \, y \in x\} \qquad (\in V^{\mathbb{B}})$$

- **Notación:** $\check{V} \ := \ \{\check{x} \, : \, x \in V\} \ \subseteq \ V^{\mathbb{B}}$ (imagen de $x \mapsto \check{x}$)

Proposición

Para todos $x, y \in V$ e $u \in V^{\mathbb{B}}$:

(1) $[\![u \in \check{x}]\!] \ = \ \bigvee_{y \in x} [\![u = \check{y}]\!]$

(2) $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si } x \in y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad [\![\check{x} = \check{y}]\!] \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Intuición: La correspondencia $\begin{cases} V & \to & V^{\mathbb{B}} \\ x & \mapsto & \check{x} \end{cases}$ es un “encaje” de V en $V^{\mathbb{B}}$

Propiedades de $[\![\cdot = \cdot]\!]$ y $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ (7/7)

Demo. (1) Tenemos que:

$$[\![u \in \check{x}]\!] \;=\; \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(\check{x})} (\check{x}(v) \wedge [\![u = v]\!]) \;=\; \bigvee_{y \in x} (1 \wedge [\![u = \check{y}]\!]) \;=\; \bigvee_{y \in x} [\![u = \check{y}]\!].$$

(2) Primero se demuestra que $[\![\check{x} = \check{y}]\!] = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ por $\in$-inducción sobre x e y.
Suponiendo que la propiedad se cumple para todos $x' \in x$, $y' \in y$ (HI), se observa que:

$$\begin{aligned} [\![\check{x} \subseteq \check{y}]\!] \;&=\; \bigwedge_{u' \in \mathrm{dom}(\check{x})} (\check{x}(u') \to [\![u' \in \check{y}]\!]) \;=\; \bigwedge_{x' \in x} [\![\check{x}' \in \check{y}]\!] \underset{(1)}{=} \bigwedge_{x' \in x} \bigvee_{y' \in y} [\![\check{x}' = \check{y}']\!] \\ &\underset{\text{(HI)}}{=} \bigwedge_{x' \in x} \bigvee_{y' \in y} \begin{cases} 1 & \text{si } x' = y' \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } x \subseteq y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

De modo simétrico, tenemos que $[\![\check{y} \subseteq \check{x}]\!] = \begin{cases} 1 & \text{si } y \subseteq x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ y por lo tanto:

$$[\![\check{x} = \check{y}]\!] \;=\; [\![\check{x} \subseteq \check{y}]\!] \wedge [\![\check{y} \subseteq \check{x}]\!] \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{2.1}$$

Luego, tenemos que: $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] \underset{(1)}{=} \bigvee_{z \in y} [\![\check{x} = \check{z}]\!] \underset{(2.1)}{=} \bigvee_{z \in y} \begin{cases} 1 & \text{si } x = z \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ □

El símbolo de predicado $\check{V}$

- **Recordatorio:** $\check{V} \ := \ \{\check{x} \,:\, x \in V\} \ \subseteq \ V^{\mathbb{B}}$
- En lo siguiente, es cómodo trabajar en el lenguaje de ZF extendido con un predicado unario "$x \in \check{V}$" interpretado en $V^{\mathbb{B}}$ por:

$$[\![u \in \check{V}]\!] \ := \ \bigvee_{x \in V} [\![u = \check{x}]\!] \qquad (u \in V^{\mathbb{B}})$$

  - Lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ $(\supsetneq \mathscr{L}_{\in} = \mathscr{L}_{\mathsf{ZF}})$

Proposición ($[\![\cdot \in \check{V}]\!]$ es compatible con $[\![\cdot = \cdot]\!]$ en $V^{\mathbb{B}}$)

Para todos $u, v \in V^{\mathbb{B}}$: $\qquad [\![u = v]\!] \wedge [\![v \in \check{V}]\!] \leq [\![u \in \check{V}]\!]$

Demo. Para todos $u, v \in \check{V}$, tenemos que

$$\begin{aligned} [\![u = v]\!] \wedge [\![v \in \check{V}]\!] \ &= \ [\![u = v]\!] \wedge \bigvee_{x \in V} [\![v = \check{x}]\!] \\ &= \ \bigvee_{x \in V} ([\![u = v]\!] \wedge [\![v = \check{x}]\!]) \ \leq \ \bigvee_{x \in V} [\![u = \check{x}]\!] \ = \ [\![u \in \check{V}]\!] . \end{aligned}$$

$\square$

Plan

Interpretación del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$

A partir de ahora, se trabaja en el lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ $(\supsetneq \mathscr{L}_{\mathsf{ZF}})$

- Se interpreta cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ por una funcional
$$b = [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!] \;:\; \left(V^{\mathbb{B}}\right)^n \to \mathbb{B}$$

Definición (Interpretación del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$)

- Ya definimos los valores de verdad $[\![u = v]\!]$, $[\![u \in v]\!]$, $[\![u \in \check{V}]\!] \in \mathbb{B}$ asociadas a las fórmulas atómicas (por inducción interna sobre u y v)
- Se completa la definición por recursión externa sobre $\varphi(\vec{x})$:

$$[\![\neg\varphi(\vec{u})]\!] := \neg[\![\varphi(\vec{u})]\!] \qquad [\![\varphi(\vec{u}) \Rightarrow \psi(\vec{u})]\!] := [\![\varphi(\vec{u})]\!] \to [\![\psi(\vec{u})]\!]$$

$$[\![\varphi(\vec{u}) \wedge \psi(\vec{u})]\!] := [\![\varphi(\vec{u})]\!] \wedge [\![\psi(\vec{u})]\!] \qquad [\![\varphi(\vec{u}) \vee \psi(\vec{u})]\!] := [\![\varphi(\vec{u})]\!] \vee [\![\psi(\vec{u})]\!]$$

$$[\![\forall y\, \varphi(y, \vec{u})]\!] := \bigwedge_{v \in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(v, \vec{u})]\!] \qquad [\![\exists y\, \varphi(y, \vec{u})]\!] := \bigvee_{v \in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(v, \vec{u})]\!]$$

- **Notación:** $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u_1, \ldots, u_n) \quad :\equiv \quad [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!] = 1$

Corrección lógica

Proposición (Regla de Leibniz)

Sea $\varphi(x, \vec{z})$ una fórmula. Para todos $u, v, \vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(u, \vec{w})]\!] \leq [\![\varphi(v, \vec{w})]\!]$$

Demo. Por inducción externa sobre la fórmula $\varphi(x, \vec{z})$, usando las propiedades de $[\![\cdot = \cdot]\!]$, $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ y $[\![\cdot \in \check{V}]\!]$ en el caso donde $\varphi(x, \vec{z})$ es una fórmula atómica. $\square$

- Dado un contexto $\Gamma(\vec{x}) \equiv \varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})$, se escribe:

$$[\![\Gamma(\vec{u})]\!] := [\![\varphi_1(\vec{u})]\!] \wedge \cdots \wedge [\![\varphi_n(\vec{u})]\!]$$

Teorema (Corrección)

Si un secuente $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ es derivable en el sistema NK, entonces:

$$\mathsf{ZF} \vdash (\forall \vec{u} \in V^{\mathbb{B}})\ [\![\Gamma(\vec{u})]\!] \leq [\![\varphi(\vec{u})]\!]$$

Demo. Por inducción externa sobre la derivación de $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$, usando la identidad $[\![u = u]\!] = 1$ para la regla $=$-intro y la Prop. anterior para la regla $=$-elim. $\square$

Cuantificaciones relativizadas

Proposicíon (Cuantificaciones relativizadas)

Sea $\varphi(x, \vec{z})$ una fórmula. Para todos $u, \vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} [\![(\exists x \in u)\, \varphi(x, \vec{w})]\!] &= \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(v) \wedge [\![\varphi(u, \vec{w})]\!]\big) \\ [\![(\forall x \in u)\, \varphi(x, \vec{w})]\!] &= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(v) \to [\![\varphi(v, \vec{w})]\!]\big) \end{aligned}$$

Demo. Dados $u, \vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} [\![(\exists x \in u)\, \varphi(x, \vec{w})]\!] &= [\![\exists x\, (x \in u \wedge \varphi(x, \vec{w}))]\!] = \bigvee_{v \in V^{\mathbb{B}}} \big([\![v \in u]\!] \wedge [\![\varphi(v, \vec{w})]\!]\big) \\ &= \bigvee_{v \in V^{\mathbb{B}}} \Big(\bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \wedge [\![v = u']\!]\big) \;\wedge\; [\![\varphi(v, \vec{w})]\!] \Big) \\ &= \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(u') \;\wedge\; \bigvee_{v \in V^{\mathbb{B}}} \big([\![v = u']\!] \wedge [\![\varphi(v, \vec{w})]\!]\big) \Big) \\ &= \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \wedge [\![\exists x\, (x = u' \wedge \varphi(x, \vec{w}))]\!]\big) = \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \wedge [\![\varphi(u', \vec{w})]\!]\big)\,. \end{aligned}$$

La otra identidad se deduce por dualidad. □

Axioma de extensionalidad

- Por la Prop. anterior, se observa que para todos $a, b \in V^{\mathbb{B}}$:

$$\underbrace{[\![(\forall x \in a)\ x \in b]\!]}_{\text{inclusión usual}} \;=\; \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(a)} \big(a(u) \to [\![u \in b]\!]\big) \;=\; \underbrace{[\![a \subseteq b]\!]}_{\text{inclusión primitiva}}$$

- Luego por la def. de $[\![\cdot = \cdot]\!]$, se deduce que:

$$\begin{aligned} [\![a = b]\!] \;&=\; \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(a)} \big(a(u) \to [\![u \in b]\!]\big) \;\wedge\; \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(b)} \big(b(u) \to [\![u \in a]\!]\big) \\ &=\; [\![(\forall x \in a)\ x \in b]\!] \wedge [\![(\forall x \in b)\ x \in a]\!] \\ &=\; [\![\forall x\, (x \in a \Leftrightarrow x \in b)]\!] \end{aligned}$$

- Por lo tanto:

Proposición (Validez del axioma de extensionalidad)

$$V^{\mathbb{B}} \;\models\; \forall a\ \forall b\ \big(\forall x\, (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \;\Rightarrow\; a = b\big)$$

Axioma del par

Proposición (Validez del axioma del par)

$$V^{\mathbb{B}} \models \forall a\, \forall b\, \exists c\, \forall x\, (x \in c \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$$

Demo. Dados $a, b \in V^{\mathbb{B}}$, se define $c \in V^{\mathbb{B}}$ por

$$\mathrm{dom}(c) := \{a, b\} \quad \text{y} \quad c(a) = c(b) := 1.$$

Luego, para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$ se observa que

$$\begin{aligned} [\![u \in c]\!] &= \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(c)} \big(c(v) \wedge [\![v = u]\!]\big) = \big(c(a) \wedge [\![a = u]\!]\big) \vee \big(c(b) \wedge [\![b = u]\!]\big) \\ &= [\![a = u]\!] \vee [\![b = u]\!] = [\![u = a \vee u = b]\!]. \end{aligned}$$

□

Esquema de comprensión

Proposición (Validez de los axiomas de comprensión)

$$V^{\mathbb{B}} \models \forall\vec{z}\ \forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in c \Leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x,\vec{z}))$$

para cada fórmula $\varphi(x,\vec{z})$ del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$

Demo. Dados $\vec{w}, a \in V^{\mathbb{B}}$, se define $b \in V^{\mathbb{B}}$ por

$$\mathrm{dom}(b) := \mathrm{dom}(a) \quad \text{y} \quad b(u) := a(u) \wedge [\![\varphi(u,\vec{w})]\!] \qquad (u \in \mathrm{dom}(b))$$

Luego, para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$ se observa que

$$\begin{aligned} [\![u \in b]\!] &= \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(b)} (b(v) \wedge [\![v = u]\!]) = \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(a)} (a(v) \wedge [\![\varphi(v,\vec{w})]\!] \wedge [\![v = u]\!]) \\ &= [\![(\exists y \in a)\,(\varphi(y,\vec{w}) \wedge y = u)]\!] = [\![u \in a \wedge \varphi(u,\vec{w})]\!]. \end{aligned}$$

$\square$

Axioma de unión

Proposición (Validez del axioma de unión)

$$V^{\mathbb{B}} \models \forall a\, \exists b\, \forall x\, (x \in b \;\Leftrightarrow\; (\exists y \in a)\; x \in y)$$

Demo. Dado $a \in V^{\mathbb{B}}$, se define $b \in V^{\mathbb{B}}$ por

$$\mathrm{dom}(b) \;:=\; \bigcup_{v \in \mathrm{dom}(a)} \mathrm{dom}(v) \qquad \text{y} \qquad b(u) \;:=\; [\![(\exists y \in a)\, u \in y]\!] \qquad\qquad (u \in \mathrm{dom}(b))$$

Luego, para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$ se observa que

$$\begin{aligned} [\![u \in b]\!] &= \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(b)} \big(b(u') \wedge [\![u = u']\!]\big) \\ &= \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(b)} \big([\![(\exists y \in a)\; u' \in y]\!] \wedge [\![u = u']\!]\big) \;\leq\; [\![(\exists y \in a)\; u \in y]\!] \end{aligned}$$

mientras que:

$$\begin{aligned} [\![u \in b]\!] &= \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(b)} \big([\![(\exists y' \in a)\; u' \in y']\!] \wedge [\![u = u']\!]\big) \\ &\geq \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(a)} \; \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(v)} \big([\![(\exists y' \in a)\; u' \in y']\!] \wedge [\![u = u']\!]\big) \\ &\geq \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(a)} \Big(a(v) \wedge \bigvee_{u' \in \mathrm{dom}(v)} \Big(v(u') \wedge \big([\![(\exists y' \in a)\; u' \in y']\!] \wedge [\![u = u']\!]\big)\Big)\Big) \\ &= [\![(\exists y \in a)(\exists x' \in y)((\exists y' \in a)\, x' \in y' \wedge u = x')]\!] \;=\; [\![(\exists y \in a)\; u \in y]\!]\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Axioma del conjunto potencia (1/2)

Proposición (Validez del axioma del conjunto potencia)

$$V^{\mathbb{B}} \models \forall a\, \exists b\, \forall x\, (x \in b \;\Leftrightarrow\; x \subseteq a)$$

Demo. Sea $a \in V^{\mathbb{B}}$. A cada $u \in V^{\mathbb{B}}$ se asocia el nombre $a{\restriction}u \in V^{\mathbb{B}}$ definido par

$$\mathrm{dom}(a{\restriction}u) := \mathrm{dom}(a) \quad \text{y} \quad (a{\restriction}u)(v) := a(v) \wedge [\![v \in u]\!] \qquad (v \in \mathrm{dom}(a))$$

Se observa que

$$\begin{aligned}[\![u \subseteq a{\restriction}u)]\!] &= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(v) \to [\![v \in a{\restriction}u]\!]\big) \\ &= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(u)} \Big(u(v) \to \bigvee_{v' \in \mathrm{dom}(a)} \big(a(v') \wedge [\![v' \in u]\!] \wedge [\![v' = v]\!]\big)\Big) \\ &= [\![(\forall y \in u)(\exists y' \in a)\ (y' \in u \wedge y' = y)]\!] \;=\; [\![u \subseteq a]\!]\end{aligned}$$

mientras

$$\begin{aligned}[\![a{\restriction}u \subseteq u]\!] &= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(a{\restriction}u)} \big((a{\restriction}u)(v) \to [\![v \in u]\!]\big) \\ &= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(a)} \big(a(v) \wedge [\![v \in u]\!] \to [\![v \in u]\!]\big) \;=\; 1\end{aligned}$$

y por lo tanto $\quad [\![u = a{\restriction}u]\!] \;=\; [\![u \subseteq a{\restriction}u]\!] \wedge [\![a{\restriction}u \subseteq u]\!] \;=\; [\![u \subseteq a]\!]\,.$ (...)

Axioma del conjunto potencia (2/2)

Demo (continuación). Además, se observa que

$$[\![a{\restriction}u \subseteq a]\!] \;=\; \bigwedge_{v\in\mathrm{dom}(a{\restriction}u)}\big((a{\restriction}u)(v) \to [\![v\in a]\!]\big) \;=\; \bigwedge_{v\in\mathrm{dom}(a)}\big(a(v)\wedge[\![v\in u]\!] \to [\![v\in a]\!]\big) \;=\; 1.$$

Ahora se considera el nombre $b \in V^{\mathbb{B}}$ definido por

$$\mathrm{dom}(b) \;:=\; \mathbb{B}^{\mathrm{dom}(a)} \qquad \text{y} \qquad b(u) \;:=\; [\![u\subseteq a]\!] \qquad\qquad (u\in\mathrm{dom}(b))$$

Luego, para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$ se observa que

$$[\![u\in b]\!] \;=\; \bigvee_{v\in\mathrm{dom}(b)}\big(b(v)\wedge[\![v=u]\!]\big) \;=\; \bigvee_{v\in\mathrm{dom}(b)}\big([\![v\subseteq a]\!]\wedge[\![v=u]\!]\big) \;\le\; [\![u\subseteq a]\!]$$

mientras

$$\begin{aligned}[\![u\in b]\!] \;=\; \bigvee_{v\in B^{\mathrm{dom}(a)}}\big(b(v)\wedge[\![v=u]\!]\big) \;&\ge\; b(a{\restriction}u)\wedge[\![a{\restriction}u=u]\!]\\ &=\; [\![a{\restriction}u\subseteq a]\!]\wedge[\![u\subseteq a]\!] \;=\; [\![u\subseteq a]\!]\end{aligned}$$

y por lo tanto: $\quad [\![u\in b]\!] \;=\; [\![u\subseteq a]\!].$ $\square$

Axioma de infinitud

Proposición (Validez del axioma de infinitud)

$$V^{\mathbb{B}} \models \exists a \big((\exists x \in a)\ \forall z\ z \notin x \quad \wedge \\ (\forall x \in a)(\exists y \in a)\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \in x \vee z = x)\big)$$

Demo. Se considera el $\mathbb{B}$-nombre $a := \check{\omega} = \{(\check{n}, 1) : n \in \omega\}$, donde $\check{n} = \{(\check{p}, 1) : p < n\}$ para todo $n \in \omega$.
Para todos $n \in \omega$ y $u \in V^{\mathbb{B}}$, se observa que:

$$[\![u \in \check{0}]\!] = 0$$

$$[\![u \in (n+1)\check{}\,]\!] = [\![u \in \check{n} \vee u = \check{n}]\!]$$

y por lo tanto:

$$[\![(\exists x \in a)\ \forall z\ z \notin x]\!] = \bigvee_{n<\omega} [\![\forall z\ z \notin x]\!] \geq [\![\forall z\ z \notin \check{0}]\!] = 1$$

y

$$[\![(\forall x \in a)(\exists y \in a)\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \in x \vee z = x)]\!]$$
$$= \bigwedge_{n<\omega} \bigvee_{p<\omega} [\![\forall z\ (z \in \check{p} \Leftrightarrow z \in \check{n} \vee z = \check{n})]\!]$$
$$\geq \bigwedge_{n<\omega} [\![\forall z\ (z \in (n+1)\check{} \Leftrightarrow z \in \check{n} \vee z = \check{n})]\!] = 1.$$

□

Esquema de colección

Proposición (Validez de los axiomas de colección)

$$V^{\mathbb{B}} \models \forall\vec{z}\ \forall a\ \Big((\forall x\in a)\ \exists y\ \varphi(x,y,\vec{z})\ \Rightarrow\ \exists b\ (\forall x\in a)(\exists y\in b)\ \varphi(x,y,\vec{z})\Big)$$

para cada fórmula $\varphi(x,y,\vec{z})$ del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$

Demo. Dados $\vec{w}, a \in V^{\mathbb{B}}$, se escribe

$$U\ :=\ \big\{(u,h)\in \mathrm{dom}(a)\times\mathbb{B}\ :\ (\exists v\in V^{\mathbb{B}})\ [\![\varphi(u,v,\vec{w})]\!] = h\big\}.$$

Por construcción, tenemos que $(\forall(u,h)\in U)(\exists v\in V^{\mathbb{B}})\ [\![\varphi(u,v,\vec{w})]\!] = h$, luego por el esquema de colección, existe un conjunto $W\subseteq V^{\mathbb{B}}$ tal que $(\forall(u,h)\in U)(\exists v\in W)\ [\![\varphi(u,v)]\!] = h$.

Ahora se considera el nombre $b\in V^{\mathbb{B}}$ definido por

$$\mathrm{dom}(b)\ :=\ W \qquad \text{y} \qquad b(v)\ :=\ 1 \qquad\qquad (v\in\mathrm{dom}(b))$$

Sea $u\in\mathrm{dom}(a)$. Por construcción de U y W, tenemos que:

$$\begin{aligned}[\![\exists y\ \varphi(u,y,\vec{w})]\!]\ &=\ \bigvee_{v\in V^{\mathbb{B}}}[\![\varphi(u,v,\vec{w})]\!]\ =\ \bigvee_{v\in W}[\![\varphi(u,v,\vec{w})]\!]\\ &=\ \bigvee_{v\in\mathrm{dom}(b)}\big(b(v)\wedge[\![\varphi(u,v,\vec{w})]\!]\big)\ =\ [\![(\exists y\in b)\ \varphi(u,y,\vec{w})]\!]\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $[\![(\forall x\in a)\ \exists y\ \varphi(x,y,\vec{w})]\!]\ =\ [\![(\forall x\in a)(\exists y\in b)\ \varphi(x,y,\vec{w})]\!]$. □

Principio de $\in$-inducción

- **Recordatorio:** En ZF^-, el axioma de fundación es equivalente al principio de $\in$-inducción

Proposición (Validez del principio de $\in$-inducción)

$$V^{\mathbb{B}} \models \forall \vec{z}\ \forall x\ \big((\forall y \in x)\, \varphi(y, \vec{z}) \ \Rightarrow\ \varphi(x, \vec{z})\big) \ \Rightarrow\ \forall x\ \varphi(x, \vec{z})$$

para cada fórmula $\varphi(x, \vec{z})$ del lenguaje $\mathscr{L}_{\in, \check{V}}$

Demo. Dados $\vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$, se nota $h := [\![\forall x\, ((\forall y \in x)\, \varphi(y, \vec{w}) \ \Rightarrow\ \varphi(x, \vec{w}))]\!]$ $(\in \mathbb{B})$.

Se demuestra por inducción sobre $u \in V^{\mathbb{B}}$ que $[\![\varphi(u, \vec{w})]\!] \geq h$.

Para ello, consideremos $u \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $[\![\varphi(v, \vec{w})]\!] \geq h$ para todo $v \in \mathrm{dom}(u)$ (HI).
Por (HI), se deduce que $[\![(\forall y \in u)\, \varphi(y, \vec{w})]\!] \geq h$, y como $[\![(\forall y \in u)\, \varphi(y, \vec{w}) \Rightarrow \varphi(u, \vec{w}))]\!] \geq h$ (por la def. de h), se concluye que $[\![\varphi(u, \vec{w})]\!] \geq h$. Entonces tenemos que $[\![\forall x\ \varphi(x, \vec{w})]\!] \geq h$, y por lo tanto $[\![\forall x\, ((\forall y \in x)\, \varphi(y, \vec{w}) \ \Rightarrow\ \varphi(x, \vec{w})) \ \Rightarrow\ \forall x\ \varphi(x, \vec{w})]\!] = 1$. $\square$

Corolario (Validez del axioma de fundación)

$$V^{\mathbb{B}} \models \forall a\, (a \neq \varnothing \ \Rightarrow\ (\exists x \in a)\ x \cap a = \varnothing)$$

Satisfacción de los teoremas de ZF

- **En resumen:** Fijada un álgebra booleana completa $\mathbb{B}$, construimos una clase $V^{\mathbb{B}}$ ($\subseteq V$) de los $\mathbb{B}$-nombres así como una interpretación

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}_{\in,\check{V}} & \to & \mathbb{B} \\ \varphi(x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & [\![\varphi(u_1,\ldots,u_n)]\!] \end{array}$$

de las fórmulas del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ (con parámetros en $V^{\mathbb{B}}$) tal que:

(1) Todas las reglas de deducción clásicas (NK) son válidas en $V^{\mathbb{B}}$

(2) (ZF $\vdash$) $\underbrace{V^{\mathbb{B}} \models \varphi}_{[\![\varphi]\!] = 1_{\mathbb{B}}}$ para todo axioma φ de ZF (i.e. $V^{\mathbb{B}} \models$ ZF)

- Por lo tanto:

Teorema: (ZF $\vdash$) $V^{\mathbb{B}} \models \varphi$ para todo teorema φ de ZF

- Pero la interpretación también incluye el nuevo predicado $x \in \check{V}$ (que representa el universo inicial V adentro del universo booleano $V^{\mathbb{B}}$)

- ¿Cuáles son las propiedades de la clase $\check{V}$ adentro de $V^{\mathbb{B}}$?

Propiedades de la clase $\check{V}$ en $V^{\mathbb{B}}$ (1/3)

Lema (Cuantificaciones relativizadas a $\check{V}$)

Sea $\varphi(x,\vec{z})$ una fórmula de $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$. Para todo $\vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$[\![(\exists x \in \check{V})\, \varphi(x,\vec{w})]\!] = \bigvee_{x \in V} [\![\varphi(\check{x},\vec{w})]\!]$$

$$[\![(\forall x \in \check{V})\, \varphi(x,\vec{w})]\!] = \bigwedge_{x \in V} [\![\varphi(\check{x},\vec{w})]\!]$$

Demo. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\![(\exists x \in \check{V})\, \varphi(x,\vec{w})]\!] &= \bigvee_{u \in V^{\mathbb{B}}} \left([\![u \in \check{V}]\!] \wedge [\![\varphi(u,\vec{w})]\!]\right) \\
&= \bigvee_{u \in V^{\mathbb{B}}} \left(\left(\bigvee_{x \in \check{V}} [\![u = \check{x}]\!]\right) \wedge [\![\varphi(u,\vec{w})]\!]\right) \\
&= \bigvee_{u \in V^{\mathbb{B}}} \bigvee_{x \in V} \left([\![u = \check{x}]\!] \wedge [\![\varphi(u,\vec{w})]\!]\right) \\
&= \bigvee_{x \in V} [\![\exists y\, (y = \check{x} \wedge \varphi(y,\vec{w}))]\!] = \bigvee_{x \in V} [\![\varphi(\check{x},\vec{w})]\!]\,.
\end{aligned}$$

La otra identidad se deduce por dualidad. □

Propiedades de la clase $\check{V}$ en $V^{\mathbb{B}}$ (2/3)

Proposición (Estructura de la clase $\check{V}$ en $V^{\mathbb{B}}$)

(1) $V^{\mathbb{B}} \models \check{x} \in \check{V}$ para todo $x \in V$

(2) $V^{\mathbb{B}} \models (\forall x \in \check{V})\ x \subseteq \check{V}$ (i.e. $\check{V}$ es una clase transitiva)

(3) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow V^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$
para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de ZF y para todos $x_1, \ldots, x_n \in V$

Demo. (1) Para todo $x \in V$, tenemos que

$$[\![\check{x} \in \check{V}]\!] = \bigvee_{y \in V} [\![\check{x} = \check{y}]\!] \geq [\![\check{x} = \check{x}]\!] = 1\,.$$

(2) Tenemos que:

$$\begin{aligned}[\![(\forall x \in \check{V})\ x \subseteq \check{V}]\!] &= \bigwedge_{x \in V} [\![(\forall y \in \check{x})\, y \in \check{V}]\!] = \bigwedge_{x \in V} \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(\check{x})} (\check{x}(v) \rightarrow [\![v \in \check{V}]\!]) \\ &= \bigwedge_{x \in V} \bigwedge_{y \in x} (1 \rightarrow [\![\check{y} \in \check{V}]\!]) = 1.\end{aligned}$$

(3) Por inducción externa sobre la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, usando el lema de relativización en el caso donde la fórmula es una cuantificación existencial o universal. $\square$

Propiedades de la clase $\check{V}$ en $V^{\mathbb{B}}$ (3/3)

- La equivalencia

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) \quad \Leftrightarrow \quad V^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}(\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n) \qquad (x_1,\ldots,x_n \in V)$$

expresa que (en $V^{\mathbb{B}}$) la clase $\check{V}$ cumple las mismas propiedades que el universo inicial V (mediante la relativización $\varphi \mapsto \varphi^{\check{V}}$)

- En particular, $\check{V}$ es (adentro de $V^{\mathbb{B}}$) un modelo transitivo de ZF:

Proposición: (ZF $\vdash$) $V^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}$ para todo teorema φ de ZF

Es decir: (ZF $\vdash$) $V^{\mathbb{B}} \models (\check{V}, \in) \models$ ZF

- Más generalmente, en toda extensión $\mathscr{T} \supseteq$ ZF (con $\mathscr{L}_{\mathscr{T}} = \mathscr{L}_{\text{ZF}}$), la clase $\check{V}$ cumple todos los teoremas de $\mathscr{T}$ relativizados a $\check{V}$:

Proposición: $\mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}$ para todo teorema φ de $\mathscr{T}$

Es decir: $\mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{B}} \models (\check{V}, \in) \models \mathscr{T}$

Los ordinales en $V^{\mathbb{B}}$ (1/2)

Lema (Ordinales en $V^{\mathbb{B}}$)

Para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$: $$[\![On(u)]\!] = \bigvee_{\alpha \in On} [\![u = \check{\alpha}]\!]$$

Demo. Para todo $\alpha \in On$, tenemos que $[\![On(\check{\alpha})]\!] = [\![On^{\check{V}}(\check{\alpha})]\!] = 1$ (pues $On(x)$ es Δ_0), entonces $[\![u = \check{\alpha}]\!] = [\![u = \check{\alpha}]\!] \wedge [\![On(\check{\alpha})]\!] \leq [\![On(u)]\!]$, y por lo tanto $\bigvee_{\alpha \in On} [\![u = \check{\alpha}]\!] \leq [\![On(u)]\!]$.

Para todo $v \in V^{\mathbb{B}}$, se considera la clase $D_v := \{\alpha \in On \,:\, [\![v = \check{\alpha}]\!] \neq 0\}$, y se observa que para todos $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in D_v$, tenemos que $[\![u = \check{\alpha}_1]\!] \wedge [\![u = \check{\alpha}_2]\!] \leq [\![\check{\alpha}_1 = \check{\alpha}_2]\!] = 0$, y por lo tanto $[\![u = \check{\alpha}_1]\!] \neq [\![u = \check{\alpha}_2]\!]$. Acabamos de mostrar que la correspondencia

$$(\alpha \mapsto [\![u = \check{\alpha}]\!]) \;:\; D_v \to (\mathbb{B} - \{0\})$$

es inyectiva, lo que implica que la clase D_v es un conjunto para todo $v \in V^{\mathbb{B}}$. Entonces existe un ordinal $\beta \notin \bigcup_{v \in \mathrm{dom}(u)} D_v$, es decir tal que $[\![v = \check{\beta}]\!] = 0$ para todo $v \in \mathrm{dom}(u)$. Luego tenemos que $[\![\check{\beta} \in u]\!] = \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(u)} (u(v) \wedge [\![v = \check{\beta}]\!]) = 0$, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} [\![On(u)]\!] &\leq [\![u \in \check{\beta}]\!] \vee [\![u = \check{\beta}]\!] \vee [\![\check{\beta} \in u]\!] \\ &= [\![u \in \check{\beta}]\!] \vee [\![u = \check{\beta}]\!] = \bigvee_{\alpha \leq \beta} [\![u = \check{\alpha}]\!] \leq \bigvee_{\alpha \in On} [\![u = \check{\alpha}]\!]\,. \end{aligned}$$

□

Los ordinales en $V^{\mathbb{B}}$ (2/2)

Proposición

$V^{\mathbb{B}} \models On \subseteq \check{V}$

Demo. Por el lema anterior, tenemos que:

$$[\![On(u)]\!] = \bigvee_{\alpha \in On} [\![u = \check{\alpha}]\!] \leq \bigvee_{x \in V} [\![u = \check{x}]\!] = [\![u \in \check{V}]\!] \qquad \text{(para todo } u \in V^{\mathbb{B}}\text{)}$$

y por lo tanto $[\![On \subseteq \check{V}]\!] = [\![\forall x\,(On(x) \Rightarrow x \in \check{V})]\!] = 1$. □

- Y como la fórmula $On(x)$ es Δ_0, se deduce que:

Corolario

$V^{\mathbb{B}} \models \forall \alpha \left(On(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \check{V} \wedge On^{\check{V}}(\alpha)\right)$

- **Conclusión:** (ZF $\vdash$) $V^{\mathbb{B}} \models \check{V}$ es un modelo interno de ZF

  y más aún: $\mathscr{T} \vdash$ $V^{\mathbb{B}} \models \check{V}$ es un modelo interno de $\mathscr{T}$

  en toda extensión $\mathscr{T} \supseteq$ ZF (con $\mathscr{L}_{\mathscr{T}} = \mathscr{L}_{\text{ZF}}$)

El axioma de elección en $V^{\mathbb{B}}$ (1/3)

Lema (en ZF)

$V^{\mathbb{B}} \models \forall X\ (\exists Y \in \check{V})\ (\exists f : Y \to X)\ f$ sobreyectiva

Demo. Dado un $\mathbb{B}$-nombre A, se trata de construir dos $\mathbb{B}$-nombres C y f tales que:

$$[\![C \in \check{V}]\!] = 1 \quad \text{y} \quad [\![f : C \to A \text{ sobreyectiva}]\!] = 1.$$

Para ello, se recuerda que en el modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$, los pares (no ordenado y ordenado) formados a partir de dos $\mathbb{B}$-nombres u y v son representados por los $\mathbb{B}$-nombres

$$\{u,v\}^{\mathbb{B}} := \{(u,1),(v,1)\}\ \ (\in V^{\mathbb{B}}) \qquad \text{y} \qquad (u,v)^{\mathbb{B}} := \{\{u\}^{\mathbb{B}},\{u,v\}^{\mathbb{B}}\}^{\mathbb{B}}.$$

Sean $C := (\mathrm{dom}(A))\check{}$ y $f := \{((\check{u},u)^{\mathbb{B}}, A(u)) : u \in \mathrm{dom}(A)\}$.
Tenemos que $[\![C \in \check{V}]\!] = 1$ (por def. de C). Luego, se observa que:

$$\begin{aligned}
&[\![(\forall z \in f)(\exists x \in C)(\exists y \in A)\ z = (x,y)]\!] \\
&\quad = \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(f)} \Big(f(t) \to \bigvee_{\substack{v' \in \mathrm{dom}(C) \\ w \in \mathrm{dom}(A)}} \big(C(v') \wedge A(w) \wedge [\![t = (v',w)]\!] \big) \Big) \\
&\quad = \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(A)} \Big(A(u) \to \bigvee_{\substack{v \in \mathrm{dom}(A) \\ w \in \mathrm{dom}(A)}} \big(1 \wedge A(w) \wedge [\![(\check{u},u) = (\check{v},w)]\!] \big) \Big) \\
&\quad \geq \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(A)} \big(A(u) \to (A(u) \wedge [\![(\check{u},u) = (\check{u},u)]\!]) \big) \ = \ 1\,.
\end{aligned}$$

(...)

El axioma de elección en $V^{\mathbb{B}}$ (2/3)

Demo (continuación y fin). Para todos $u, v \in \mathrm{dom}(A)$, se observa que

$$\begin{aligned}
[\![(\check{u}, v) \in f]\!] &= \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(f)} \big(f(t) \wedge [\![(\check{u}, v) = t]\!]\big) = \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(A)} \big(A(w) \wedge [\![(\check{u}, v) = (\check{w}, w)]\!]\big) \\
&= \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(A)} \big(A(w) \wedge [\![\check{u} = \check{w}]\!] \wedge [\![v = w]\!]\big) = A(u) \wedge [\![v = u]\!],
\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&[\![(\forall x \in C)(\forall y_1, y_2 \in A)\,((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2]\!] \\
&\quad = \bigwedge_{u, v_1, v_2 \in \mathrm{dom}(A)} \Big(A(v_1) \to A(v_2) \to \big([\![(\check{u}, v_1) \in f]\!] \wedge [\![(\check{u}, v_2) \in f]\!] \to [\![v_1 = v_2]\!]\big)\Big) \\
&\quad = \bigwedge_{u, v_1, v_2 \in \mathrm{dom}(A)} \big(A(v_1) \wedge A(v_2) \wedge A(u) \wedge [\![v_1 = u]\!] \wedge [\![v_2 = u]\!] \to [\![v_1 = v_2]\!]\big) = 1,
\end{aligned}$$

lo que acaba de demostrar que $[\![f : C \to A]\!] = 1$. Por fin, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\![(\forall y \in A)(\exists x \in C)\ (x, y) \in f]\!] &= \bigwedge_{v \in A} \Big(A(v) \to \bigvee_{u' \mathrm{dom}(C)} (C(u) \wedge [\![(u', v) \in f]\!]\Big) \\
&= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(A)} \Big(A(v) \to \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(A)} (1 \wedge [\![(\check{u}, v) \in f]\!])\Big) \\
&\geq \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(A)} \big(A(v) \to [\![(\check{v}, v) \in f]\!]\big) \\
&= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(A)} \big(A(v) \to A(v) \wedge [\![v = v]\!]\big) = 1.
\end{aligned}$$

$\square$

El axioma de elección en $V^{\mathbb{B}}$ (3/3)

- En las diapositivas anteriores, demostramos en ZF que $V^{\mathbb{B}} \models \varphi$ para todo axioma/teorema φ de ZF. Además, en ZFC:

Proposición (Validez del axioma de elección)

ZFC $\vdash$ $V^{\mathbb{B}} \models$ AC

Demo (en ZFC). Como AC $\Leftrightarrow$ $V^{\mathbb{B}} \models \mathrm{AC}^{\check{V}}$, se deduce (en ZFC) que $V^{\mathbb{B}} \models \mathrm{AC}^{\check{V}}$.
A partir de ahora, se trabaja en la teoría inducida por el modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$:

Como $\mathrm{AC}^{\check{V}}$, tenemos que $(\forall Y \in \check{V})(Y \text{ es bien ordenable})^{\check{V}}$. Pero como la fórmula

"Y es bien ordenable", equivalente a $\exists\alpha\, \exists f\, (On(\alpha) \land f : \alpha \overset{\sim}{\to} Y)$,

es de clase Σ_1, se deduce que todo conjunto $Y \in \check{V}$ es bien ordenable (por ascensión). Ahora se considera un conjunto X cualquiera (i.e. en V). Por el lema anterior, existe un conjunto $Y \in \check{V}$ y una sobreyección $f : Y \twoheadrightarrow X$. Sea $\preceq_0$ un buen orden sobre Y. La relación $\preceq$ sobre X definida por

$$x \preceq x' \ :\equiv\ \min(f^{-1}(x)) \preceq_0 \min(f^{-1}(x'))$$

es un buen orden sobre X, lo que demuestra que X también es bien ordenable. □

Teoría inducida por $V^{\mathbb{B}}$ (1/2)

- En la metateoría, la construcción del modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$ (en ZF) es una traducción lógica de $\mathsf{ZF}_{\check{V}}$[‡] en ZF:

$$\begin{array}{rcrcl} (V^{\mathbb{B}} \models \cdot) & : & \mathsf{ZF}_{\check{V}} & \to & \mathsf{ZF} \\ & & \varphi & \mapsto & V^{\mathbb{B}} \models \varphi \end{array}$$

  (Traducción parametrizada por un álgebra booleana completa $\mathbb{B}$ de ZF)

- Como toda traducción lógica, la traducción lógica $V^{\mathbb{B}} \models \cdot$ induce más generalmente una transformación de teorías:
  - **Input:** Una extensión $\mathscr{T} \supseteq \mathsf{ZF}$ con símb. de constante $\mathbb{B}$ tal que:

    $$\mathscr{T} \ \vdash \ \text{“}\mathbb{B} \text{ es un álgebra booleana completa”}$$

  - **Output:** La teoría $\mathscr{T}^{\mathbb{B}}$ sobre el lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ definida por:

    $$\mathscr{T}^{\mathbb{B}} \vdash \varphi \qquad \text{sii} \qquad \mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{B}} \models \varphi$$

  Intuición: $\mathscr{T}^{\mathbb{B}} \ := $ preimagen de $\mathscr{T}$ por $V^{\mathbb{B}} \models \cdot$

[‡] $\mathsf{ZF}_{\check{V}} = \mathsf{ZF}$ con comprensión y reemplazo extendidos al lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$

Teoría inducida por $V^{\mathbb{B}}$ (2/2)

- **Recordatorio:** Dada una extensión $\mathscr{T} \supseteq \mathsf{ZF}$ tal que

$$\mathscr{T} \vdash \text{“}\mathbb{B} \text{ es un álgebra booleana completa”}$$

construimos una teoría $\mathscr{T}^{\mathbb{B}}$ sobre el lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ por:

$$\mathscr{T}^{\mathbb{B}} \vdash \varphi \quad \text{sii} \quad \mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{B}} \models \varphi$$

- Es claro que $\mathscr{T}^{\mathbb{B}} \vdash \bot$ implica $\mathscr{T} \vdash \mathbb{B} = \mathbf{1}$ (consistencia relativa)

- En las diapositivas anteriores, mostramos que:

(1) $\mathscr{T}^{\mathbb{B}} \vdash \varphi$ para todo axioma/teorema φ de $\mathsf{ZF}_{\check{V}}$

(2) $\mathscr{T}^{\mathbb{B}} \vdash (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \ \wedge\ On \subseteq \check{V}$

(3) $\mathscr{T}^{\mathbb{B}} \vdash \varphi^{\check{V}}$ para todo axioma/teorema φ de $\mathscr{T}$ (en $\mathscr{L}_{\mathsf{ZF}}$)

(4) Si $\mathscr{T} \vdash \mathsf{AC}$, entonces $\mathscr{T}^{\mathbb{B}} \vdash \mathsf{AC}$

- ¿Cuáles son las otras propiedades de $\mathscr{T}^{\mathbb{B}}$? ¿Axiomatización?

Plan

Anticadenas y particiones de la unidad

Sea B un álgebra booleana

Definición (Anticadenas y particiones de la unidad)

Un conjunto $A \subseteq B$ es una anticadena cuando

$$(\forall a, a' \in A)\,(a \neq a' \;\Rightarrow\; a \wedge a' = 0).$$

Cuando además $\bigvee A = 1$, se dice que A es una partición de la unidad

Definición alternativa (con familias)

Una familia $A = (a_i)_{i \in I} \in B^I$ es una anticadena cuando

$$(\forall i, j \in I)\,(i \neq j \;\Rightarrow\; a_i \wedge a_j = 0).$$

Cuando además $\bigvee_{i \in I} a_i = 1$, se dice que A es una partición de la unidad

Mezclas

Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana completa

Definición (Mezcla)

Dadas dos familias $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$ (los "coeficientes") y $(u_i)_{i\in I} \in (V^{\mathbb{B}})^I$ (los $\mathbb{B}$-nombres), se define la mezcla $\sum_{i\in I} a_i \cdot u_i$ $(\in V^{\mathbb{B}})$ por:

$$\mathrm{dom}\Big(\textstyle\sum_{i\in I} a_i \cdot u_i\Big) := \bigcup_{i\in I} \mathrm{dom}(u_i)$$

$$\Big(\textstyle\sum_{i\in I} a_i \cdot u_i\Big)(v) := \bigvee_{i\in I} (a_i \wedge [\![v \in u_i]\!]) \qquad (v \in \bigcup_{i\in I} \mathrm{dom}(u_i))$$

- **Intuición:** mezcla = combinación booleana
- Se puede formar una mezcla con cualquier familia de "coeficientes" $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$, pero en la mayoría de los casos, uno se restringe a anticadenas (o particiones de 1)

$\Rightarrow$ Razón en la diapo siguiente

Mezclas

Lema de la mezcla

Sea $u := \sum_{i\in I} a_i \cdot u_i$, con $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$ y $(u_i)_{i\in I} \in (V^{\mathbb{B}})^I$.

Si $a_i \wedge a_j \leq [\![u_i = u_j]\!]$ para todos $i, j \in I$, entonces

$$a_i \leq [\![u = u_i]\!] \quad \text{para todo } i \in I$$

- **Obs.:** La condición "$a_i \wedge a_j \leq [\![u_i = u_j]\!] \ (i, j \in I)$" se cumple automáticamente cuando la familia $(a_i)_{i\in I}$ es una anticadena

Demo. Dado $i \in I$, probemos que $a_i \leq [\![u \subseteq u_i]\!]$ y $a_i \leq [\![u_i \subseteq u]\!]$.

- Para todo $v \in \mathrm{dom}(u)$, tenemos que

  $$a_i \wedge u(v) \ = \ \bigvee_{j\in I}(a_i \wedge a_j \wedge [\![v \in u_j]\!]) \ \leq \ \bigvee_{j\in I}([\![u_i = u_j]\!] \wedge [\![v \in u_j]\!]) \ \leq \ [\![v \in u_i]\!]$$

  y por lo tanto: $a_i \ \leq \ \bigwedge_{v\in\mathrm{dom}(u)}(u(v) \to [\![v \in u_i]\!]) \ = \ [\![u \subseteq u_i]\!]$.

- Para todo $v \in \mathrm{dom}(u_i)$, tenemos que

  $$a_i \wedge u_i(v) \ \leq \ a_i \wedge [\![v \in u_i]\!] \ \leq \ u(v) \ \leq \ [\![v \in u]\!]$$

  y por lo tanto: $a_i \ \leq \ \bigwedge_{v\in\mathrm{dom}(u_i)}(u_i(v) \to [\![v \in u]\!]) \ = \ [\![u_i \subseteq u]\!]$. $\square$

Mezclas

- El lema de la mezcla implica que cada clase de la forma
$$\{u \in V^{\mathbb{B}} \ : \ V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u, \vec{w})\} \ \subseteq \ V^{\mathbb{B}}$$
está cerrada bajo cualquier mezcla con una partición de 1:

Corolario (Mezcla de testigos)

Sea $\varphi(x, \vec{w})$ una fórmula (con parámetros $\vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$). Si $(u_i)_{i \in I} \in (V^{\mathbb{B}})^I$ es una familia tal que $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u_i, \vec{w})$ para todo $i \in I$, entonces:
$$V^{\mathbb{B}} \models \varphi\left(\textstyle\sum_{i \in I} a_i \cdot u_i, \ \vec{w}\right)$$
para toda partición de la unidad $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}^I$

Demo: Supongamos que $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u_i, \vec{w})$ para todo $i \in I$. Fijada una partición de la unidad $(a_i)_{i \in I}$, escribamos $u := \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i$. Para todo $i \in I$, tenemos que
$$a_i \ \leq \ [\![u = u_i]\!] \ = \ [\![u = u_i]\!] \wedge [\![\varphi(u_i, \vec{w})]\!] \ \leq \ [\![\varphi(u, \vec{w})]\!]$$
y por lo tanto: $\quad 1 \ = \ \bigvee_{i \in I} a_i \ \leq \ [\![\varphi(u, \vec{w})]\!] \qquad$ (es decir: $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u, \vec{w})$). $\square$

Mezclas

- Otra consecuencia del lema de la mezcla:

Lema (Validez de una implicación)

Sean $\varphi(x, \vec{w})$ y $\psi(x, \vec{w})$ dos fórmulas (con parámetros $\vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$) tales que:

(1) Existe $u_0 \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u_0, \vec{w})$

(2) $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u, \vec{w})$ implica $V^{\mathbb{B}} \models \psi(u, \vec{w})$ para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$.

Entonces: $V^{\mathbb{B}} \models \forall x \, (\varphi(x, \vec{w}) \Rightarrow \psi(x, \vec{w}))$

Demo: Fijemos $u_0 \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u_0, \vec{w})$ (por (1)).

Dado $u \in V^{\mathbb{B}}$, se trata de mostrar que $[\![\varphi(u, \vec{w})]\!] \leq [\![\psi(u, \vec{w})]\!]$. Para ello, se escribe $b := [\![\varphi(u, \vec{w})]\!]$ y se considera la mezcla $u' := b \cdot u + \neg b \cdot u_0$. Se observa que:

- $b \leq [\![u' = u]\!]$ y $[\![\varphi(u, \vec{w})]\!] = b$, luego $b \leq [\![u' = u]\!] \wedge [\![\varphi(u, \vec{w})]\!] \leq [\![\varphi(u', \vec{w})]\!]$.
- $\neg b \leq [\![u' = u_0]\!]$ y $[\![\varphi(u_0, \vec{w})]\!] = 1$, luego $\neg b \leq [\![u' = u_0]\!] \wedge [\![\varphi(u_0, \vec{w})]\!] \leq [\![\varphi(u', \vec{w})]\!]$.

Por lo tanto, tenemos que $1 = b \vee \neg b \leq [\![\varphi(u', \vec{w})]\!]$, y luego $[\![\psi(u', \vec{w})]\!] = 1$ por (2).
Se concluye observando que $[\![\varphi(u, \vec{w})]\!] = b \leq [\![u' = u]\!] \wedge [\![\psi(u', \vec{w})]\!] \leq [\![\psi(u, \vec{w})]\!]$. $\square$

Ejemplos de mezclas (1/3)

- **Recordatorio:** $$[\![u \in \check{V}]\!] \ := \ \bigvee_{x\in V} [\![u = \check{x}]\!] \qquad (u \in V^{\mathbb{B}})$$

  Tenemos que $V^{\mathbb{B}} \models \check{x} \in \check{V}$ para todo $x \in V$, y más generalmente:

  $$V^{\mathbb{B}} \ \models \ \sum_{x\in I} a_i \cdot \check{x}_i \ \in \ \check{V}$$

  para toda familia $(x_i)_{i\in I} \in V^I$ y para toda partición $(a_i)_{i\in I}$ de 1

Proposición ($\mathbb{B}$-nombres u tales que $V^{\mathbb{B}} \models u \in \check{V}$)

Para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$V^{\mathbb{B}} \models u \in \check{V} \quad \text{sii} \quad \Big[\!\!\Big[u = \sum_{i\in I} a_i \cdot \check{x}_i\Big]\!\!\Big] = 1 \ \text{ para ciertos } \begin{cases} (a_i)_{i\in I} \text{ p. de } 1 \\ (x_i)_{i\in I} \in V^I \end{cases}$$

- **Conclusión:** Los $\mathbb{B}$-nombres $u \in V^{\mathbb{B}}$ tales que $V^{\mathbb{B}} \models u \in \check{V}$ son exactamente las mezclas de $\mathbb{B}$-nombres estándar (con part. de 1)

Ejemplos de mezclas (2/3)

Demo. (Implicación directa) Sea $u \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $[\![u \in \check{V}]\!] \;=\; \bigvee_{x \in V} [\![u = \check{x}]\!] \;=\; 1.$

Se considera la clase $I := \{x \in V \,:\, [\![u = \check{x}]\!] \neq 0\}$. Dados $x_1 \neq x_2 \in I$, se observa que

$$[\![u = \check{x}_1]\!] \wedge [\![u = \check{x}_2]\!] \;\leq\; [\![\check{x}_1 = \check{x}_2]\!] \;=\; 0, \qquad (*)$$

y por lo tanto $[\![u = \check{x}_1]\!] \neq [\![u = \check{x}_2]\!]$. Acabamos de mostrar que la correspondencia

$$(x \mapsto [\![u = \check{x}]\!]) \;:\; I \to \mathbb{B}^*$$

es inyectiva, lo que implica que la clase I es un conjunto. Además, es claro por $(*)$ que la familia $(a_x)_{x \in I} := ([\![u = \check{x}]\!])_{x \in I}$ es una anticadena, y más aún una partición de 1, ya que

$$\bigvee_{x \in I} a_x \;=\; \bigvee_{x \in I} [\![u = \check{x}]\!] \;=\; \bigvee_{x \in V} [\![u = \check{x}]\!] \;=\; 1. \qquad \text{(por hipótesis)}$$

Sea $v := \sum_{x \in I} a_x \cdot \check{x}$. Para todo $x \in I$, tenemos que $a_x = [\![u = \check{x}]\!]$ y $a_x \leq [\![v = \check{x}]\!]$ (por el lema de la mezcla), y por lo tanto: $a_x \leq [\![u = v]\!]$. Pasando al supremo, se concluye que:

$$1 \;=\; \bigvee_{x \in I} a_x \;\leq\; [\![u = v]\!].$$

(Implicación recíproca) Sea $u \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $\left[\!\left[u = \sum_{i \in I} a_i \cdot \alpha_i\right]\!\right] = 1$ para cierta partición de la unidad $(a_x)_{i \in I}$ y para cierta familia $(x_i)_{i \in I} \in V^I$. Por mezcla de testigos, se concluye que:

$$1 = \left[\!\left[\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot \check{x}_i\right) \in \check{V}\right]\!\right] = \left[\!\left[\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot \check{x}_i\right) \in \check{V}\right]\!\right] \wedge \left[\!\left[u = \sum_{i \in I} a_i \cdot \check{x}_i\right]\!\right] \leq [\![u \in \check{V}]\!],$$

y por lo tanto: $V^{\mathbb{B}} \models u \in \check{V}$. $\square$

Ejemplos de mezclas (3/3)

- De modo ánalogo, los ordinales de $V^{\mathbb{B}}$ son exactamente las mezclas de ordinales estándar (con particiones de 1):

Proposición (Ordinales de $V^{\mathbb{B}}$)

Para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$V^{\mathbb{B}} \models On(u) \quad \text{sii} \quad \left[\!\left[u = \sum_{i \in I} a_i \cdot \check{\alpha}_i \right]\!\right] = 1 \ \text{ para ciertos } \begin{cases} (a_i)_{i \in I} \text{ p. de } 1 \\ (\alpha_i)_{i \in I} \in On^I \end{cases}$$

Demo. Ejercicio

Principio del máximo (1/2)

Recordatorio: $$[\![\exists x\,\varphi(x,\vec{w})]\!] \;:=\; \bigvee_{u\in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(u,\vec{w})]\!] \qquad \text{(supremo)}$$

Teorema (Principio del máximo) (con AC)

Para cada fórmula $\varphi(x,\vec{w})$ (con parámetros $\vec{w}$), existe $u^*\in V^{\mathbb{B}}$ tal que:

$$[\![\exists x\,\varphi(x,\vec{w})]\!] \;=\; [\![\varphi(u^*,\vec{w})]\!] \qquad \text{(máximo)}$$

En particular si $V^{\mathbb{B}}\models\exists x\,\varphi(x,\vec{w})$, entonces $V^{\mathbb{B}}\models\varphi(u^*,\vec{w})$ para algún $u^*\in V^{\mathbb{B}}$

Demo. Como $B_{\varphi,\vec{w}} := \{[\![\varphi(u,\vec{w})]\!] : u\in V^{\mathbb{B}}\}$ $(\subseteq\mathbb{B})$ es un conjunto, existe por Col. + AC un ordinal α y una familia $(u_\xi)_{\xi<\alpha}\in(V^{\mathbb{B}})^\alpha$ tal que $\{[\![\varphi(u_\xi,\vec{w})]\!] : \xi<\alpha\} = B_{\varphi,\vec{w}}$.

Para todo $\xi<\alpha$, se define $a_\xi \;:=\; [\![\varphi(u_\xi,\vec{w})]\!] - \bigvee_{\eta<\xi}[\![\varphi(u_\eta,\vec{w})]\!]$ (por recursión sobre ξ), y se nota $u^* := \sum_{\xi<\alpha} a_\xi\cdot u_\xi$.

Por construcción, la familia $(a_\xi)_{\xi<\alpha}$ es una anticadena. Para todo $\xi<\alpha$, tenemos que $a_\xi\le[\![u^*=u_\xi]\!]$ (lema de la mezcla) y $a_\xi\le[\![\varphi(u_\xi,\vec{w})]\!]$ (def. de a_ξ), entonces:

$$a_\xi \;\le\; [\![u^*=u_\xi]\!]\wedge[\![\varphi(u_\xi,\vec{w})]\!] \;\le\; [\![\varphi(u^*,\vec{w})]\!].$$

Por lo tanto: $[\![\exists x\,\varphi(x,\vec{w})]\!] = \bigvee_{\xi<\alpha}[\![\varphi(u_\xi,\vec{w})]\!] = \bigvee_{\xi<\alpha} a_\xi \le [\![\varphi(u^*,\vec{w})]\!]$ $(\le [\![\exists x\,\varphi(x,\vec{w})]\!])$. $\square$

Principio del máximo (2/2)

- Por dualidad, también tenemos el principio del mínimo:

$$[\![\exists x\, \varphi(x,\vec{w})]\!] \;=\; \bigvee_{u\in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(u,\vec{w})]\!] \;=\; [\![\varphi(u^*,\vec{w})]\!] \quad \text{para algún } u^* \in V^{\mathbb{B}}$$

$$[\![\forall x\, \varphi(x,\vec{w})]\!] \;=\; \bigwedge_{u\in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(u,\vec{w})]\!] \;=\; [\![\varphi(u_*,\vec{w})]\!] \quad \text{para algún } u_* \in V^{\mathbb{B}}$$

- Dicho de otro modo, la funcional

$$(u \;\mapsto\; [\![\varphi(u,\vec{w})]\!]) \quad : \quad V^{\mathbb{B}} \to \mathbb{B}$$

  alcanza su máximo y su mínimo para cualquier fórmula $\varphi(x,\vec{w})$ con parámetros $\vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$. Se dice que el modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$ está lleno

- **¡Cuidado!** El principio del máximo es consecuencia de AC (en V).

  Ejercicio: Mostrar que el principio del máximo implica AC en V (bajo la hipótesis que $|\mathbb{B}| \geq 2$)

Plan

Modelo booleano inducido $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \subseteq \mathscr{M}$ (1/3)

Sea un modelo de Tarski $\mathscr{M} \models \mathrm{ZF}$ con un par $(\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}}) \in \mathscr{M}^2$ t.q.:

$\mathscr{M} \models (\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}})$ es un álgebra booleana completa

- En la metateoría, el álgebra booleana interna $(\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}}) \in \mathscr{M}^2$ induce un álgebra booleana externa $(\mathcal{B}, \leq_{\mathcal{B}})$ definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \{a \in \mathscr{M} : \mathscr{M} \models a \in \mathbb{B}\} && (\subseteq \mathscr{M}) \\ a \leq_{\mathcal{B}} a' &:\equiv \mathscr{M} \models a \leq_{\mathbb{B}} a' && (\text{para todos } a, a' \in \mathcal{B}) \end{aligned}$$

Proposición: $(\mathcal{B}, \leq_{\mathcal{B}})$ es un álgebra booleana

Razón: La fórmula "$(\mathbb{B}, \leq)$ es un álgebra booleana" es Δ_0

- En general el álgebra booleana $(\mathcal{B}, \leq_{\mathcal{B}})$ no es completa
  - Pueden existir subconjuntos externos $X \subseteq \mathcal{B}$ sin ínfimo/supremo (i.e. la fórmula "$(\mathbb{B}, \leq)$ es un álgebra booleana completa" es Π_1)

Modelo booleano inducido $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \subseteq \mathscr{M}$ (2/3)

Sea un modelo de Tarski $\mathscr{M} \models \mathrm{ZF}$ con un par $(\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}}) \in \mathscr{M}^2$ t.q.:

$$\mathscr{M} \models (\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}}) \text{ es un álgebra booleana completa}$$

- La construcción de la clase $V^{\mathbb{B}}$ (en ZF) induce un subconjunto

$$\mathscr{M}^{\mathbb{B}} := \{u \in \mathscr{M} \ :\ \mathscr{M} \models u \in V^{\mathbb{B}}\} \qquad (\subseteq \mathscr{M})$$

  y para cada fórmula (externa) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$, la funcional "$b = [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}}$" (en ZF) induce una función:

$$\begin{array}{rcl} \left(\mathscr{M}^{\mathbb{B}}\right)^n & \to & \mathcal{B} \\ (u_1, \ldots, u_n) & \mapsto & [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathcal{B}} \end{array}$$

  - ▶ $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$ es un modelo booleano de ZF adentro de $\mathscr{M}$

- Además, la funcional $x \mapsto \check{x}$ (en ZF) induce una inyección:

$$(u \mapsto \check{u}) \ :\ \mathscr{M} \hookrightarrow \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$$

Modelo booleano inducido $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \subseteq \mathscr{M}$ (3/3)

- Para todas fórmulas φ, ψ con parámetros en $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{array}{rclcrcl} [\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{B}} &=& \neg[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} && [\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]^{\mathcal{B}} &=& [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} \to [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} \\ [\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathcal{B}} &=& [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} \vee [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} && [\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathcal{B}} &=& [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} \wedge [\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} \\ [\![\exists x\, \varphi(x)]\!]^{\mathcal{B}} &=& \displaystyle\bigvee_{u \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(u)]\!]^{\mathcal{B}} && [\![\forall x\, \varphi(x)]\!]^{\mathcal{B}} &=& \displaystyle\bigwedge_{u \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(u)]\!]^{\mathcal{B}} \end{array}$$

Obs.: Aunque el álgebra booleana $\mathcal{B}$ pueda ser incompleta (afuera de $\mathscr{M}$), los supremos/ínfimos que interpretan $\exists x\, \varphi(x)$ / $\forall x\, \varphi(x)$ en $\mathcal{B}$ siempre existen

- ▶ **Notación:** $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \models \varphi(\vec{u}) \quad :\equiv \quad [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}} \qquad (\vec{u} \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$

- Por lo anterior, es claro que:

Proposición (Propiedades del modelo booleano $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$)

(1) $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \models \varphi$ para todo axioma/teorema φ de $\mathsf{ZF}_{\check{V}}$

(2) $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \models (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \wedge On \subseteq \check{V}$

(3) $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_n)$ sii $\mathscr{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$
para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parámetros $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$

(4) Si $\mathscr{M} \models \mathsf{AC}$, entonces $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \models \mathsf{AC}$

Cociente de $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$ por un ultrafiltro (1/3)

- Suponiendo que $\mathscr{M} \models \mathrm{ZFC}$ y $\mathscr{M} \models \mathbb{B} \neq \mathbf{1}$, se considera un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$, que puede venir:
  - o bien de la metateoría (ultrafiltro externo)
  - o bien de un punto $U \in \mathscr{M}$ tal que $\mathscr{M} \models U \subseteq \mathbb{B}$ ultrafiltro, notando $\mathcal{U} := \{a \in \mathscr{M} : \mathscr{M} \models a \in U\}$ (ultrafiltro interno)

- El ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ (interno o externo) induce una relación de equivalencia $\sim$ en el subconjunto $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \subseteq \mathscr{M}$, definida por:

$$u \sim v \quad :\equiv \quad [\![u = v]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \qquad (u, v \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

  y se nota $\mathscr{M}[\mathcal{U}] \ := \ \mathscr{M}^{\mathbb{B}}/{\sim_{\mathcal{U}}}$

- Se equipa $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ con las relaciones $\in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]} \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{U}]^2$ y $\check{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{U}]$ definidas por:

$$[u] \in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]} [v] \quad :\equiv \quad [\![u \in v]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \qquad (u, v \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

$$[u] \in \check{\mathscr{M}} \quad :\equiv \quad [\![u \in \check{V}]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \qquad (u \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

Cociente de $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$ por un ultrafiltro (2/3)

- Interpretando los símbolos $\in$ (binario) y $\check{V}$ (unario) del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ por las relaciones $\in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]}$ y $\check{\mathscr{M}}$ in $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$, se demuestra que:

Proposición

Para toda fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ con parámetros $u_1,\ldots,u_n \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi([u_1],\ldots,[u_n]) \qquad \text{sii} \qquad [\![\varphi(u_1,\ldots,u_n)]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U}$$

Demo. Por inducción sobre la fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, distinguiendo los siguientes casos:

- Si $\varphi(x_1,x_2) \equiv x_1 = x_2$, entonces para todos $u_1,u_2 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$:

  $$\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models [u_1] = [u_2] \quad \text{sii} \quad [u_1] = [u_2] \quad \text{sii} \quad u_1 \sim u_2 \quad \text{sii} \quad [\![u_1 = u_2]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U}$$

- Si $\varphi(x_1,x_2) \equiv x_1 \in x_2$, entonces para todos $u_1,u_2 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$:

  $$\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models [u_1] \in [u_2] \quad \text{sii} \quad [u_1] \in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]} [u_2] \quad \text{sii} \quad [\![u_1 \in u_2]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U}$$

- Si $\varphi(x_1) \equiv x_1 \in \check{V}$: análogo.
- Si $\varphi(\vec{x}) \equiv \neg\varphi_1(\vec{x})$, entonces para todos $\vec{u} \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

  $$\begin{array}{llllll} \mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi([\vec{u}]) & \text{sii} & \mathscr{M}[\mathcal{U}] \not\models \varphi_1([\vec{u}]) & \text{sii} & [\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \notin \mathcal{U} & \text{(por HI)} \\ & \text{sii} & \neg_{\mathcal{B}}[\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} & \text{sii} & [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} & (\ldots) \end{array}$$

Cociente de $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$ por un ultrafiltro (3/3)

Demo (continuación).

- Si $\varphi(\vec{x}) \equiv \varphi_1(\vec{x}) \vee \varphi_2(\vec{x})$, entonces para todos $\vec{u} \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{array}{rll} \mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi([\vec{u}]) & \text{sii} & \mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi_1([\vec{u}]) \ \text{ o } \ \mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi_2([\vec{u}]) \\ & \text{sii} & [\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \ \text{ o } \ [\![\varphi_2(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \qquad (\text{por HI}) \\ & \text{sii} & [\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \vee_{\mathcal{B}} [\![\varphi_2(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \ \in \ \mathcal{U} \\ & \text{sii} & [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \end{array}$$

- Si $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists x_0\, \varphi_0(x_0, \vec{x})$, entonces para todos $\vec{u} \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{array}{rll} \mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi([\vec{u}]) & \text{sii} & \mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi_0([u_0], [\vec{u}]) \quad \text{para algún } u_0 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}} \\ & \text{sii} & [\![\varphi_0(u_0, \vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \quad \text{para algún } u_0 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}} \qquad (\text{por HI}) \\ & \text{sii} & \bigvee_{u_0 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}} [\![\varphi_0(u_0, \vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \qquad (\text{por el principio del máximo}) \\ & \text{sii} & [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \end{array}$$

□

- **Obs.:** El caso de las conectivas se basa en las propiedades de los ultrafiltros, mientras que el caso de las cuantificaciones se basa en el carácter lleno del modelo booleano (interno) $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \subseteq \mathscr{M}$
  - Razón por la que tomamos $\mathscr{M} \models$ ZFC ($\Rightarrow$ principio del máximo)

Estructura de $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$

Dado un modelo (de Tarski) $\mathscr{M} \models$ ZFC con $\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}} \in \mathscr{M}$ tales que

$$\mathscr{M} \models (\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}}) \text{ es un álgebrea booleana completa}$$

y escribiendo $\mathcal{B} := \{a \in \mathscr{M} : \mathscr{M} \models a \in \mathbb{B}\}$:

Teorema

Para todo ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ (interno o externo):

(1) El cociente $\mathscr{M}[\mathcal{U}] := \mathscr{M}^{\mathbb{B}}/\sim$ equipado con las relaciones $\in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]}$ y $\check{\mathscr{M}}$ (inducidas por $\mathcal{U}$) es un modelo de ZFC$_{\check{V}}$: $\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models$ ZFC$_{\check{V}}$

(2) Además: $\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \ \wedge\ On \subseteq \check{V}$

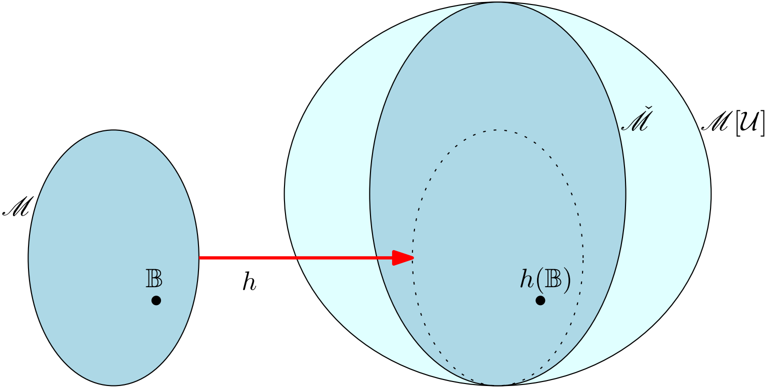
(3) La función $h : \mathscr{M} \to \mathscr{M}[\mathcal{U}]$ definida por $h(a) := [\check{a}]$ $(a \in \mathscr{M})$ es un encaje de $(\mathscr{M}, \in^{\mathscr{M}})$ en $(\mathscr{M}[\mathcal{U}], \in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]})$

(4) Tenemos la inclusión $h(\mathscr{M}) \subseteq \check{\mathscr{M}}$, y a través de ésta, $h(\mathscr{M})$ ($\simeq \mathscr{M}$) es un submodelo elemental de $\check{\mathscr{M}}$

Estructura de $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ (2/7)

Resumen:

$$\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\vDash$} \\ \text{ZFC}}}{\mathscr{M}} \simeq h(\mathscr{M}) \underset{\substack{\text{extensión} \\ \text{elemental}}}{\subseteq} \check{\mathscr{M}} \subseteq \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\vDash$} \\ \text{ZFC}_{\check{V}}}}{\mathscr{M}[\mathcal{U}]}$$



Estructura de $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ (3/7)

Demo. (1) Si ZFC$_{\check{V}} \vdash \varphi$, entonces $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}} \in \mathcal{U}$, y luego $\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi$.

(2) Vimos que: $V^{\mathbb{B}} \models (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \wedge On \subseteq \check{V}$ (en ZF).

Entonces: $[\![(\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \wedge On \subseteq \check{V}]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}} \in \mathcal{U}$

y por lo tanto: $\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \wedge On \subseteq \check{V}$

(3) Para todos $a_1, a_2 \in \mathscr{M}$, tenemos que:

$$a_1 = a_2 \quad \text{sii} \quad [\![\check{a}_1 = \check{a}_2]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}} \quad \text{sii} \quad [\![\check{a}_1 = \check{a}_2]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \quad \text{sii} \quad [\check{a}_1] = [\check{a}_2]$$

$$a_1 \in^{\mathscr{M}} a_2 \quad \text{sii} \quad [\![\check{a}_1 \in \check{a}_2]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}} \quad \text{sii} \quad [\![\check{a}_1 \in \check{a}_2]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \quad \text{sii} \quad [\check{a}_1] \in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]} [\check{a}_2]$$

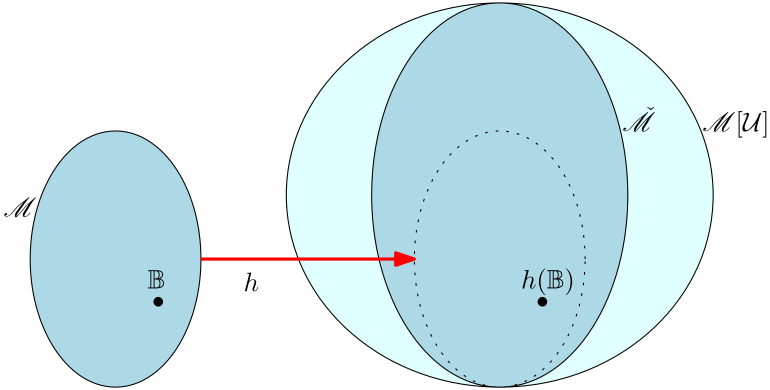
(4) Para toda $a \in \mathscr{M}$, tenemos que $[\![\check{a} \in \check{V}]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathbb{B}} \in \mathcal{U}$, entonces $h(a) = [\check{a}] \in \check{\mathscr{M}}$. Además, para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de ZF con parámetros $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{M}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathscr{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad &\Leftrightarrow \quad [\![\varphi^{\check{V}}(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_n)]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}} \\ &\Leftrightarrow \quad [\![\varphi^{\check{V}}(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_n)]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi^{\check{V}}([\check{a}_1], \ldots, [\check{a}_n]) \\ &\Leftrightarrow \quad \check{\mathscr{M}} \models \varphi([\check{a}_1], \ldots, [\check{a}_n]). \end{aligned}$$

$\square$

Estructura de $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ (4/7)

Resumen: $\underset{\text{ZFC}}{\underset{\Vdash}{\mathscr{M}}} \simeq h(\mathscr{M}) \underset{\substack{\text{extensión}\\ \text{elemental}}}{\subseteq} \check{\mathscr{M}} \subseteq \underset{\text{ZFC}_{\check{V}}}{\underset{\Vdash}{\mathscr{M}[\mathcal{U}]}}$



¿Condición para que $h(\mathscr{M}) = \check{\mathscr{M}}$?

Estructura de $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ (5/7)

Definición: Un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ es $\mathscr{M}$-genérico cuando para todo $X \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X \in \mathscr{M}$, tenemos que $\bigwedge X \in \mathcal{U}$

Proposición: $h(\mathscr{M}) = \check{\mathscr{M}}$ sii $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{B}$ es $\mathscr{M}$-genérico

Demo: Ejercicio

- **Recordatorio:** El ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ puede ser:
  – externo (i.e. definido en la metateoría), o
  – interno (i.e. inducido por algún $U \in \mathscr{M}$ t.q. $\mathscr{M} \models U \subseteq \mathbb{B}$ ultrafiltro)

Proposición (Ultrafiltros genéricos internos)

Para todo ultrafiltro $\mathscr{M}$-genérico $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$:

$\mathcal{U}$ es interno sii $\mathscr{M} \models (\exists a \in \mathbb{B})\,(a \text{ átomo } \wedge\ \mathcal{U} = \uparrow\{a\})$

(i.e. $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal)

sii $h(\mathscr{M}) = \check{\mathscr{M}} = \mathscr{M}[\mathcal{U}]$ (colapso)

Demo: Ejercicio

Estructura de $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ (6/7)

- El lo siguiente, consideraremos ultrafiltros $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{B}$ tales que:

  (1) $\mathcal{U}$ es $\mathscr{M}$-genérico (para asegurarnos que $\check{\mathscr{M}} = h(\mathscr{M}) \simeq \mathscr{M}$)

  (2) $\mathcal{U}$ es externo (para evitar el colapso $\mathscr{M}[\mathcal{U}] = \check{\mathscr{M}} \simeq \mathscr{M}$)

  ¿Existen tales ultrafiltros?

Lema (con DC)

Si el modelo de base $\mathscr{M} \models \mathrm{ZFC}$ es numerable, entonces:

(1) Existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{B}$ que es $\mathscr{M}$-genérico

(2) Si además $\mathcal{U}$ no es un ultrafiltro principal (interno), entonces $h(\mathscr{M}) = \check{\mathscr{M}} \subsetneq \mathscr{M}[\mathcal{U}]$ (ultrafiltro externo)

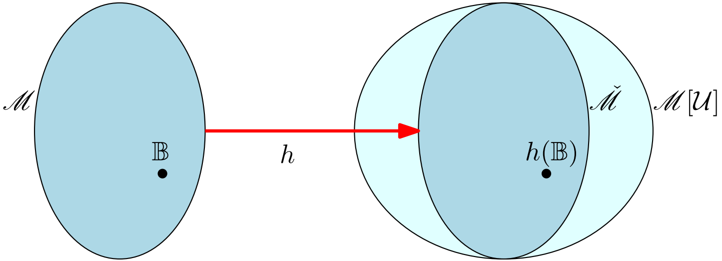
Demo. Ejercicio

- **Obs.:** En (2), la condición que "$\mathcal{U}$ no es un ultrafiltro principal" se cumple automaticamente cuando $\mathscr{M} \models \mathbb{B}$ no tiene átomos

Estructura de $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ (7/7)

Conclusión: Cuando el modelo de base $\mathscr{M}$ es numerable, siempre existe un ultrafiltro $\mathscr{M}$-genérico $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$, de tal modo que:

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{M} & \simeq & \check{\mathscr{M}} & \subseteq & \mathscr{M}[\mathcal{U}] \\ \rotatebox{90}{$\models$} & (h) & & & \rotatebox{90}{$\models$} \\ \mathsf{ZFC} & & & & \mathsf{ZFC}_{\check{V}} \end{array}$$



- Se dice que $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ es la extensión genérica de $\mathscr{M}$ por $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$

Además cuando $\mathcal{U}$ es externo, tenemos que $\check{\mathscr{M}} \subsetneq \mathscr{M}[\mathcal{U}]$