Una introducción al forcing

4. Extensiones genéricas

Alexandre Miquel

octubre de 2024

¿Qué es el forcing?

- Un método inventado por Paul Cohen ('63) para demostrar la independencia de la hipótesis del continuo (HC) en ZFC

Hipótesis del continuo (HC), 1er problema de Hilbert

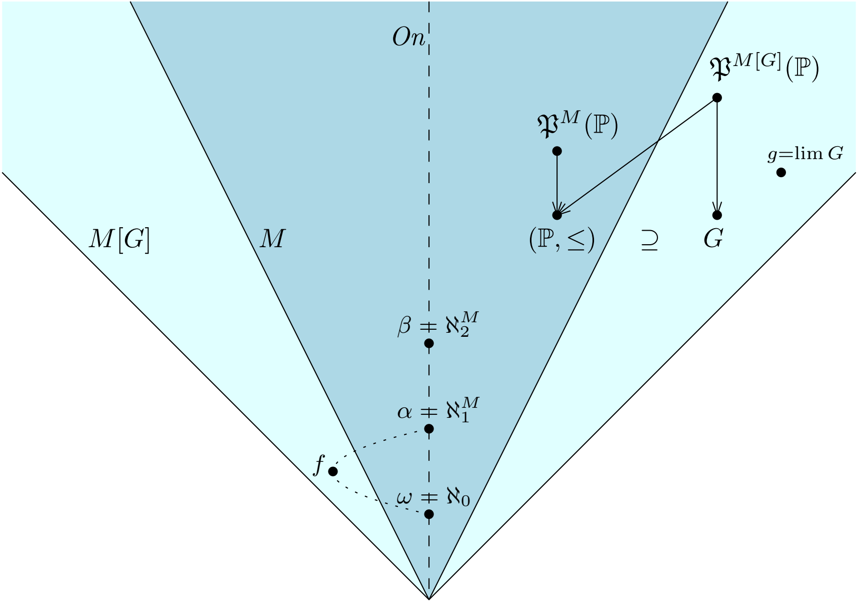
Para todo subconjunto infinito $X \subseteq \mathbb{R}$:

- O bien X es numerable (i.e. en biyección con $\mathbb{N}$)
- O bien X tiene la potencia del continuo (i.e. en biyección con $\mathbb{R}$)

En símbolos: $$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

- Gödel ('38) mostró que ZFC $\nvdash \neg$HC (con los conjuntos constructibles)
- Cohen ('63) mostró que ZFC $\nvdash$ HC (con el método de forcing)
- Relacionado con los modelos booleanos [Scott, Solovay, Vopěnka]
- Permite demostrar muchos resultados de consistencia relativa / independencia en teoría de conjuntos [Solovay, Shelah, Woodin, etc.]

¿Cómo funciona el forcing?



Una analogía con el álgebra

Teoría de conjuntos	**Álgebra**
Empezar con un modelo de base M	Empezar con un cuerpo de base K
Queremos añadir un nuevo conjunto aproximado por los elementos de un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$	Queremos añadir un nuevo punto que debería ser una raíz de un polinomio $P \in K[X]$
Esto define un ficticio filtro genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ (afuera de M)	Esto define una ficticia raíz α de P (afuera de K)
que genera alrededor de M una extensión genérica $M[G]$	que genera alrededor de K una extensión de cuerpo $K[\alpha]$
Construcción: $M[G] \ := \ M^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}/{\sim}$	Construcción: $K[\alpha] \ := \ K[X]/P\,K[X]$

Ejemplo: cómo forzar ¬HC

- **Objetivo:** Forzar la existencia de una inyección $h : \aleph_2 \to \mathfrak{P}(\omega)$.
  La construiremos como función indicatriz $g : \aleph_2 \times \omega \to 2$
- El objeto ideal g está aproximado en el modelo de base M por elementos de $(\mathbb{P}, \leq) = (\mathrm{Fin}(\aleph_2 \times \omega, 2), \supseteq)$ (conjunto de forcing)
- **Invocación de forcing:** Sea $M[G]$ la extensión genérica generada por un filtro genérico $G \subseteq \mathbb{P}$
- En $M[G]$, se nota: $g := \lim G = \bigcup G \quad (: \aleph_2 \times \omega \rightharpoonup 2)$.
  Usando el carácter M-genérico del filtro $G \subseteq \mathbb{P}$, se demuestra que:
  - La función parcial $g : \aleph_2 \times \omega \rightharpoonup 2$ es total
  - La función $h : \aleph_2 \to \mathfrak{P}(\omega)$ correspondiente es inyectiva

Detalles técnicos (i.e. condición de cadena numerable) bajo la alfombra

Modelos transitivos (1/3)

- **Recordatorio:** En ZF (o cualquier extensión), un modelo transitivo de ZF es una clase M no vacía y transitiva tal que:

$$\underbrace{M \models \varphi}_{\varphi^M} \quad \text{para todo axioma/teorema de ZF}$$

Caracterización

Una clase transitiva M es un modelo transitivo de ZF si y sólo si:

(1) $\omega \in M$

(2) $a, b \in M \ \Rightarrow\ \{a, b\} \in M \ \wedge\ \left(\bigcup a\right) \in M \ \wedge\ \underbrace{(\mathfrak{P}(a) \cap M)}_{=\,\mathfrak{P}^M(a)} \in M$

(3) $a, \vec{z} \in M \ \Rightarrow\ \left\{x \in a \,:\, \varphi^M(x, \vec{z})\right\} \in M$

para cada fórmula $\varphi(x, \vec{z})$ del lenguaje

(4) $a, \vec{z} \in M \ \wedge\ (\forall x \in a)(\exists! y \in M)\, \varphi^M(x, y, \vec{z}) \ \Rightarrow$
$(\exists b \in M)(\forall x \in a)(\exists y \in b)\, \varphi^M(x, y, \vec{z})$

para cada fórmula $\varphi(x, y, \vec{z})$ del lenguaje

Modelos transitivos (2/3)

- En cualquier modelo transitivo $M \models \mathsf{ZF}$, tenemos que

$$On^M = On \cap M \qquad \text{y} \qquad Cn^M \supseteq Cn \cap M$$

$(On(\alpha) =$ fórmula $\Delta_0)$ $\qquad$ $(Cn(\alpha) =$ fórmula $\Pi_1)$

- En M, las operaciones Δ_0 tienen el mismo significado que en V:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\{a,b\}^M &=& \{a,b\} & (a,b)^M &=& (a,b) \\
\mathrm{dom}^M(f) &=& \mathrm{dom}(f) & \mathrm{img}^M(f) &=& \mathrm{img}(f) \\
(A\cup B)^M &=& A\cup B & (A+B)^M &=& A+B \\
(A\cap B)^M &=& A\cap B & (A\times B)^M &=& A\times B \\
\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^M &=& \bigcup_{i\in I} A_i & \left(\sum_{i\in I} A_i\right)^M &=& \sum_{i\in I} A_i
\end{array}$$

(suponiendo que $a, b, f, A, B, I, A_i \in M$)

- Pero las operaciones Π_1 tienen que ser restringidas a M:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{P}^M(A) &=& \mathfrak{P}(A) \cap M \\
(B^A)^M &=& B^A \cap M
\end{array} \qquad \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^M = \left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap M$$

Modelos transitivos (3/3)

- Cada modelo transitivo $M \models \mathsf{ZF}$ tiene su jerarquía acumulativa interna $(M_\alpha)_{\alpha \in On^M}$ $(= (V_\alpha^M)_{\alpha \in On^M})$, definida por:

$$M_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}^M(M_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} (\mathfrak{P}(M_\beta) \cap M) \qquad (\alpha \in On \cap M)$$

- Por lo tanto, sólo hay dos posibilidades:

(1) O bien $On \subseteq M$, y luego: $On^M = On$.

- ▶ M es un modelo interno de ZF

(2) O bien $On \not\subseteq M$, y luego $On^M = \mu$, donde $\mu = \min(On - M)$.

Entonces: $M = \bigcup_{\beta \in On^M} M_\alpha = \bigcup_{\alpha<\mu} M_\alpha$ es un conjunto

- ▶ M es un modelo transitivo conjuntista de ZF

Plan

Plan

Condiciones de forcing

- Un conjunto de forcing es un conjunto ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ no vacío. Sus elementos se llaman condiciones (de forcing), y la relación

$$p \leq q \quad \text{se lee:} \quad \text{“}p \text{ es más fuerte que } q\text{”}$$

- **Intuición:** Los elementos de $\mathbb{P}$ representan aproximaciones potenciales de algún "objeto ideal" que queremos añadir al universo. En este marco:

$$\begin{aligned} p \leq q \quad &\equiv \quad \text{“}p \text{ es más fuerte que } q\text{”} \\ &\equiv \quad \text{“}p \text{ es una mejor aproximación que } q\text{”} \\ &\equiv \quad \text{“}p \text{ contiene más información que } q\text{”} \\ &\equiv \quad \text{“}p \text{ implica } q\text{”} \end{aligned}$$

- En la mayoría de los casos, la relación $p \leq q$ está definida como $p \supseteq q$ (inclusión inversa); por eso algunos autores [Shelah] escriben $p \geq q$ antes que $p \leq q$. Aquí se usará la notación usual $p \leq q$, que captura la idea de una implicación lógica

Elementos compatibles, incompatibles

- Para todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}$, se notan:

$$\downarrow X := \{p \in \mathbb{P} : (\exists q \in X)\, q \geq p\} \qquad \text{(clausura inferior de } X\text{)}$$
$$\uparrow X := \{p \in \mathbb{P} : (\exists q \in X)\, q \leq p\} \qquad \text{(clausura superior de } X\text{)}$$

- Dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$ son compatibles (notación: $p \top q$) cuando tienen una cota inferior común:

$$p \top q \qquad \text{sii} \qquad (\exists r \in \mathbb{P})\,(r \leq p \wedge r \leq q)$$

  Si no, se dice que p y q son incompatibles (notación: $p \perp q$):

$$p \perp q \qquad \text{sii} \qquad \neg(\exists r \in \mathbb{P})\,(r \leq p \wedge r \leq q)$$

- Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena cuando cada dos elementos distintos de A son incompatibles:

$$A \text{ anticadena} \qquad \text{sii} \qquad (\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P})(p_1 \neq p_2 \Rightarrow p_1 \perp p_2)$$

Subconjuntos densos y predensos

- Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso cuando todo elemento de $\mathbb{P}$ está acotado inferiormente ("implicado") por un elemento de D:

$$\begin{array}{lll} D \subseteq \mathbb{P} \text{ denso} & \text{sii} & (\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in D)(q \leq p) \\ & \text{sii} & \uparrow D = \mathbb{P} \end{array}$$

- **Obs.:** Dicha noción de densidad corresponde a la noción usual de densidad para la topología cuyos abiertos son los subconjuntos de $\mathbb{P}$ cerrados inferiormente:

$$U \subseteq \mathbb{P} \text{ abierto} \qquad \text{sii} \qquad \downarrow U = U$$

- Más generalmente: un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es predenso cuando todo elemento de $\mathbb{P}$ es compatible con un elemento de D:

$$\begin{array}{lll} D \subseteq \mathbb{P} \text{ predenso} & \text{sii} & (\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in D)(q \top p) \\ & \text{sii} & (\forall p \in \mathbb{P})(\exists r \in \downarrow D)(r \leq p) \\ & \text{sii} & \downarrow D \text{ denso} \\ & \text{sii} & \uparrow\downarrow D = \mathbb{P} \end{array}$$

Filtros genéricos (1/2)

- Un subconjunto $F \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro cuando:

  (i) $F \neq \varnothing$ (no vacío)

  (ii) $(\forall p, q \in \mathbb{P})\,(p \in F \wedge p \leq q \Rightarrow q \in F)$ (clausura superior)

  (iii) $(\forall p, q \in F)(\exists r \in F)\,(r \leq p \wedge r \leq q)$ (compatibilidad interna)

- A partir de ahora, se supone que $(\mathbb{P}, \leq) \in M$, donde M es un modelo transitivo de ZF (M puede ser un conjunto o una clase propia)

- Se observa que las fórmulas

  "$\leq$ es un orden sobre $\mathbb{P}$", "$Y = {\downarrow}X$", "$Y = {\uparrow}X$",
  "$p \top q$", "$p \perp q$", "$A \subseteq \mathbb{P}$ anticadena",
  "$D \subseteq \mathbb{P}$ denso", "$D \subseteq \mathbb{P}$ predenso", "$F \subseteq \mathbb{P}$ filtro"

  son Δ_0, y luego tienen mismo significado en M y en V
  (bajo la hipótesis que los subconjuntos $X, Y, A, D, F \subseteq \mathbb{P}$ están en M)

Filtros genéricos (2/2)

- Dado un modelo transitivo $M \models \mathsf{ZF}$ tal que $(\mathbb{P}, \leq) \in M$:

Definición (Filtro genérico)

Un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ es M-genérico cuando interseca todo subconjunto denso de $\mathbb{P}$ en M:

$$G \text{ es } M\text{-genérico} \quad \text{sii} \quad (\forall D \in M)(D \subseteq \mathbb{P} \text{ denso } \Rightarrow \ D \cap G \neq \varnothing)$$

- **Obs.:** Sólo se consideran los subconjuntos densos en M

Proposición

Para todo filtro $G \subseteq \mathbb{P}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) G es M-genérico

(2) G interseca todo subconjunto abierto denso $D \subseteq \mathbb{P}$ tal que $D \in M$

(3) G interseca todo subconjunto predenso $D \subseteq \mathbb{P}$ tal que $D \in M$

(4) G interseca toda anticadena maximal $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que $A \in M$ (con AC)

Demo: Ejercicio

Filtros genéricos triviales (1/2)

- Un elemento $p \in \mathbb{P}$ es un átomo (en el sentido del forcing$^{(*)}$) cuando todas sus cotas inferiores son compatibles entre sí:

$$p \text{ átomo} \qquad \text{sii} \qquad (\forall q_1, q_2 \leq p)(q_1 \top q_2)$$

- Dado un átomo $p_0 \in \mathbb{P}$, se escribe $G_{p_0} := \{q \in \mathbb{P} : q \top p_0\}$. Por construcción, es claro que $G_{p_0} \in M$. Además:

Proposición

Para todo átomo $p_0 \in \mathbb{P}$, el conjunto G_{p_0} es un filtro V-genérico

Demo. **1. G_{p_0} es un filtro.** Es claro que G_{p_0} es no vacío y cerrado superiormente. Dados $q_1, q_2 \in G_{p_0}$, tenemos que $q_1 \top p_0$ y $q_2 \top p_0$, luego existen $r_1, r_2 \in \mathbb{P}$ tales que $r_1 \leq q_1$, $r_2 \leq q_2$ y $r_1, r_2 \leq p_0$. Pero como p_0 es un átomo, tenemos que $r_1 \top r_2$, y existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq r_1$ y $r \leq r_2$. Por lo tanto, tenemos que $r \in G_{p_0}$, $r \leq q_1$ y $r \leq q_2$.

2. G_{p_0} es V-genérico. Sea un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ denso (en V). Por densidad, existe $q \in D$ tal que $q \leq p_0$. Entonces $q \top p_0$, es decir $q \in G_{p_0} \cap D$. □

- Los filtros genéricos de la forma G_{p_0} (con $p_0 \in \mathbb{P}$ átomo) son llamados filtros genéricos triviales. Están todos en M

$^{(*)}$Veremos más adelante el vínculo con los átomos de las álgebras booleanas

Filtros genéricos triviales (2/2)

- Más aún, los filtros genéricos triviales $G_{p_0} \subseteq \mathbb{P}$ (con $p_0 \in \mathbb{P}$ átomo) son los únicos filtros M-genéricos que están en M:

Proposición

Para todo filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$:

$$G \in M \qquad \text{sii} \qquad (\exists p_0 \in \mathbb{P})(p_0 \text{ átomo } \wedge \ G = G_{p_0})$$

Demo. $(\Rightarrow)$: Supongamos que $G \in M$. Tenemos que $G^c (:= \mathbb{P} - G) \in M$, y como G^c no interseca G, el conjunto G^c no es predenso. Luego existe $p_0 \in \mathbb{P}$ tal que $(\forall q \in G^c)(q \perp p_0)$. Por contrarrecíproco, tenemos que $q \top p_0 \Rightarrow q \in G$ para todo $q \in \mathbb{P}$, es decir: $G_{p_0} \subseteq G$. Por otro lado, como G es un filtro y $p_0 \in G$, tenemos que $q \in G \Rightarrow q \top p_0$ para todo q, es decir $G \subseteq G_{p_0}$, y al final $G = G_{p_0}$. Sólo queda mostrar que p_0 es un átomo. Para ello, dados $q_1, q_2 \leq p_0$, se observa que $q_1, q_2 \in G_{p_0} = G$, y como G es un filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq q_1$ y $r \leq q_2$, lo que demuestra que $q_1 \top q_2$. $(\Leftarrow)$: Obvio. $\square$

Corolario: Si el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq)$ no tiene átomos, entonces todo filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ está afuera de M: $G \notin M$

- En la práctica, se usarán conjuntos de forcing sin átomos

El lema de Rasiowa-Sikorski

- **Problema:** ¿Existen filtros M-genéricos no triviales?

Lema (Rasiowa-Sikorski) (con DC)

Si los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que están en M forman un conjunto numerable (en V), entonces existe un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ (en V).

Además, fijada una condición $p_0 \in \mathbb{P}$, se puede imponer que $p_0 \in G$

Demo. Sea $(D_n)_{n\in\omega}$ una enumeración de los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ en M. Fijada una condición $p_0 \in \mathbb{P}$, se construye con DC una sucesión decreciente $(p_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{P}^\omega$, eligiendo para cada $n \in \omega$ la condición $p_{n+1} \in \mathbb{P}$ tal que $p_{n+1} \in D_n$ y $p_{n+1} \leq p_n$ (por la densidad de D_n). Luego, es obvio que $G := \uparrow\{p_n : n \in \omega\}$ es un filtro M-genérico. □

- **Obs.:** La hipótesis se cumple automáticamente cuando M es un modelo transitivo numerable de ZF. En este caso, ni siquiera se necesita DC para construir G (pues $\mathbb{P}$ es bien ordenable en V)
- En forcing, se suele empezar a partir de un modelo de base $M \models$ ZF numerable, lo que garantiza la existencia de un filtro M-genérico G (en general afuera de M) para cualquier conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$

Teorema de la extensión genérica

Teorema (Extensión genérica)

Sean un modelo transitivo $M \models$ ZF y un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$. Para todo filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$, existe una clase $M[G]$ tal que:

(1) $M[G]$ es un modelo transitivo de ZF

(2) $M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$

(3) Para todo modelo transitivo $N \models$ ZF tal que $M \subseteq N$ y $G \in N$, tenemos que $M[G] \subseteq N$ (i.e. $M[G]$ está generado por M y G)

Además, tenemos que:

(4) $On^{M[G]} = On^M$

(5) Si $M \models$ AC, entonces $M[G] \models$ AC

- La clase $M[G]$ se llama extensión genérica de M por G

- **Obs.:** La condición de minimalidad (3) implica que la clase $M[G]$ es única. En particular, cuando $G \in M$, tenemos que $M[G] = M$

Preliminares: ortogonal de un subconjunto de $\mathbb{P}$ (1/2)

- Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{P}$, se define su ortogonal $X^{\perp} \subseteq \mathbb{P}$ por:

$$\begin{aligned} X^{\perp} &:= \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \in X)\, p \perp q\} \\ &= \{p \in \mathbb{P} : (\forall r \leq p)(\forall q \geq r)\, q \notin X\} \\ &= \{p \in \mathbb{P} : (\forall r \leq p)\, r \notin {\downarrow}X\} \\ &= \{p \in \mathbb{P} : {\downarrow}\{p\} \cap {\downarrow}X = \varnothing\} \end{aligned}$$

Lema

Para todos $X, Y \subseteq \mathbb{P}$, tenemos que:

(1) $X \subseteq Y$ implica $X^{\perp} \supseteq Y^{\perp}$

(2) $X \subseteq X^{\perp\perp}$

(3) $X^{\perp\perp\perp} = X^{\perp}$

(4) $X^{\perp}$ está cerrado inferiormente

(5) $X \cap X^{\perp} = \varnothing$

(6) $X \cup X^{\perp}$ es predenso

Demo: Ejercicio

Preliminares: ortogonal de un subconjunto de $\mathbb{P}$ (2/2)

- Además para toda familia $(X_i)_{i\in I} \in \mathfrak{P}(\mathbb{P})^I$, se observa que:

$$\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big)^{\perp} = \bigcap_{i\in I} X_i^{\perp}$$

(No hay propiedad análoga para el ortogonal de una intersección)

Lema

Para todos $X, Y \subseteq \mathbb{P}$ cerrados inferiormente, tenemos que:

(1) $X^{\perp} = \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \le p)\, q \notin X\}$

(2) $X^{\perp\perp} = \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \le p)(\exists r \le q)\, r \in X\}$

(3) $(X \cap Y)^{\perp\perp} = X^{\perp\perp} \cap Y^{\perp\perp}$

Demo. (1) Tenemos que $X^{\perp} = \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \le p)\ q \notin {\downarrow}X\} = \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \le p)\ q \notin X\}$, y luego (2) $X^{\perp\perp} = \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \le p)\ q \notin X^{\perp}\} = \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \le p)(\exists r \le q)\ r \in X\}$.
(3) La inclusión $(X \cap Y)^{\perp\perp} \subseteq X^{\perp\perp} \cap Y^{\perp\perp}$ es obvia. Recíprocamente, sea $p \in X^{\perp\perp} \cap Y^{\perp\perp}$. Queremos probar que $p \in (X \cap Y)^{\perp\perp}$, es decir: $(\forall q \le p)(\exists r \le q)\ r \in X \cap Y$ (por (2)). Sea $q \le p$. Como $p \in X^{\perp\perp}$, existe $r \le q$ tal que $r \in X$. Y como $p \in Y^{\perp\perp}$, existe $s \le r\ (\le q)$ tal que $s \in Y$. Pero como $X = {\downarrow}X$, tenemos que $s \in X$, y luego $s \in X \cap Y$. $\square$

Preliminares: álgebra booleana generada por $\mathbb{P}$ (1/2)

- Sea: $\mathbb{B} \;:=\; \{X \in \mathfrak{P}(\mathbb{P}) \,:\, X^{\perp\perp} = X\}$

Proposición (Álgebra booleana $\mathbb{B}$)

El conjunto $\mathbb{B} \;:=\; \{X \in \mathfrak{P}(\mathbb{P}) \,:\, X^{\perp\perp} = X\}$ (equipado con $\subseteq$) es un álgebra booleana completa no degenerada, en la cual:

(1) $0_{\mathbb{B}} = \varnothing$ y $1_{\mathbb{B}} = \mathbb{P}$

(2) $\displaystyle\bigwedge_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i$ y $\displaystyle\bigvee_{i\in I} X_i = \Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big)^{\perp\perp}$ (para todo $(X_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$)

(3) $\neg X = X^{\perp}$ (para todo $X \in \mathbb{B}$)

Demo. (1) Tenemos que $\varnothing = \varnothing^{\perp\perp} \in \mathbb{B}$ (mínimo) y $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\perp\perp} \in \mathbb{B}$ (máximo).

(2) Dada una familia $(X_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$, tenemos que: $\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i^{\perp\perp} = (\bigcup_{i\in I} X_i^{\perp})^{\perp}$ $= (\bigcup_{i\in I} X_i^{\perp})^{\perp\perp\perp} = (\bigcap_{i\in I} X_i^{\perp\perp})^{\perp\perp} = (\bigcap_{i\in I} X_i)^{\perp\perp}$, lo que demuestra que $\bigcap_{i\in I} X_i \in \mathbb{B}$, y luego que $\bigcap_{i\in I} X_i = \bigwedge_{i\in I} X_i$. Para todo $Y \in \mathbb{B}$, se observa que:

$$(\forall i \in I)\, X_i \subseteq Y \quad \text{sii} \quad \textstyle\bigcup_{i\in I} X_i \subseteq Y \quad \text{sii} \quad (\bigcup_{i\in I} X_i)^{\perp\perp} \subseteq Y$$

(pues $Y = Y^{\perp\perp}$), lo que demuestra que $(\bigcup_{i\in I} X_i)^{\perp\perp} = \bigvee_{i\in I} X_i$. (...)

Preliminares: álgebra booleana generada por $\mathbb{P}$ (2/2)

Demo (continuación y fin). Acabos de mostrar que $(\mathbb{B}, \subseteq)$ es un retículo completo, en el cual:

$$\bigwedge_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i \quad \text{y} \quad \bigvee_{i\in I} X_i = \Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big)^{\perp\perp} \qquad (\text{para todo } (X_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I)$$

(Distributividad) Para todos $X, Y, Z \in \mathbb{B}$, tenemos que $X \wedge (Y \vee Z) = X^{\perp\perp} \cap (Y \cup Z)^{\perp\perp}$ $= (X \cap (Y \cup Z))^{\perp\perp}$ (pues X e $Y \cup Z$ son cerrados inferiormente), y por lo tanto: $X \wedge (Y \vee Z) = (X \cap (Y \cup Z))^{\perp\perp} = ((X \cap Y) \cup (X \cap Z))^{\perp\perp} = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

(3) Para todo $X \in \mathbb{B}$, tenemos que $X^\perp \in \mathbb{B}$, y además: $X \wedge X^\perp = X \cap X^\perp = \varnothing = 0_{\mathbb{B}}$, mientras que $X \vee X^\perp = (X \cup X^\perp)^{\perp\perp} = (X^\perp \cap X^{\perp\perp})^\perp = \varnothing^\perp = \mathbb{P} = 1_{\mathbb{B}}$. □

- **Obs.:** Desde el punto de vista de la topología sobre $\mathbb{P}$ (cuyos abiertos son los subconjuntos $U \subseteq \mathbb{P}$ cerrados inferiormente), se observa que $\mathbb{B}$ es el conjunto de los abiertos regulares de $\mathbb{P}$:

Lema: $\mathbb{B} = \left\{U \subseteq \mathbb{P} \,:\, U = \overline{U}^\circ\right\}$

Demo: Ejercicio

- **Más generalmente:** En cualquier espacio topológico E, el conjunto $\mathbb{H}$ formado por los abiertos de E es un álgebra de Heyting completa, en que la negación está dada por $\neg U = (U^c)^\circ$. En este marco, los abiertos regulares de E son precisamente los elementos $U \in \mathbb{H}$ tales que $U = \neg\neg U$ $(= \overline{U}^\circ)$ (Ejercicio)

Preliminares: "encaje" de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{B}$

- Se considera la función $e : \mathbb{P} \to \mathbb{B}^* \; (= \mathbb{B} - \{0\})$ definida por:

$$e(p) \;:=\; \{p\}^{\perp\perp} \;=\; \{q \in \mathbb{P} : (\forall r \leq q)\; r \top p\} \qquad (p \in \mathbb{P})$$

(Función monótona, pero no necesariamente inyectiva)

- **Ejercicio:** Probar que p átomo en $\mathbb{P}$ $\Leftrightarrow$ $e(p)$ átomo en $\mathbb{B}$
(sentido del forcing) (sentido de las álg. bool.)

- Se dice que el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq)$ es separativo cuando:

$$(\forall p, q \in \mathbb{P})(p \not\leq q \;\Rightarrow\; (\exists p' \leq p)(p' \perp q))$$

Proposición

Si $(\mathbb{P}, \leq)$ es separativo, entonces $e(p) = {\downarrow}\{p\}$ para todo $p \in \mathbb{P}$, y por lo tanto la función $e : \mathbb{P} \to \mathbb{B}^*$ es un encaje:

$$p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad e(p) \subseteq e(q) \qquad \text{(para todos } p, q \in \mathbb{P})$$

Demo. Ejercicio

- En la práctica, se usarán conjuntos de forcing separativos

Preliminares: $\mathbb{B}$ adentro de un modelo transitivo

- En lo siguiente, se efectuará la construcción del álgebra booleana $\mathbb{B}$ adentro de un modelo transitivo $M \models \mathsf{ZF}$ tal que $(\mathbb{P}, \leq) \in M$:

$$\mathbb{B} := \{X \in \mathfrak{P}^M(\mathbb{P}) : X^{\perp\perp} = X\} \qquad (\in M)$$

(Observar que la fórmula "$X^{\perp\perp} = X$" es absoluta)

- En el modelo transitivo $M \models \mathsf{ZF}$, el conjunto $\mathbb{B}$ (equipado con $\subseteq$) es un álgebra booleana completa:

(ZF $\vdash$) $\qquad$ ($\mathbb{B}$ es un álgebra booleana completa)^M

- Pero en el universo V, el conjunto $\mathbb{B}$ (equipado con $\subseteq$) sólo es un álgebra booleana M-completa:

(ZF $\vdash$) $\qquad$ $\mathbb{B}$ es un álgebra booleana $\wedge$
$(\forall S \in \mathfrak{P}^M(\mathbb{B}))(S$ tiene ínfimo y supremo$)$

(Observar que las fórmulas "$\mathbb{B}$ es un álgebra booleana", "$S \subseteq \mathbb{B}$ tiene ínfimo" y "$S \subseteq \mathbb{B}$ tiene supremo" son absolutas)

Preliminares: filtros y ultrafiltros genéricos (1/3)

- Dado un modelo transitivo $M \models$ ZF tal que $(\mathbb{P}, \leq)$, se define:

$$\mathbb{B} \;:=\; \{X \in \mathfrak{P}^{M}(\mathbb{P}) \;:\; X^{\perp\perp} = X\} \qquad (\in M)$$

- Cada filtro $F \subseteq \mathbb{P}$ induce un filtro (propio) $\tilde{F} \subseteq \mathbb{B}$, definido por:

$$\tilde{F} \;=\; \{X \in \mathbb{B} \;:\; X \cap F \neq \varnothing\}$$

(**Ejercicio:** Verificar que $\tilde{F}$ es un filtro propio de $\mathbb{B}$)

- Además:

Proposición (Ultrafiltro M-genérico)

Si $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro M-genérico, entonces $\tilde{G} \subseteq \mathbb{B}$ es un ultrafiltro M-genérico, es decir: un ultrafiltro de $\mathbb{B}$ tal que:

$$(\forall i \in I)\ X_i \in \tilde{G} \quad \Rightarrow \quad \bigwedge_{i \in I} X_i \;\in\; \tilde{G}$$

para toda familia $(X_i)_{i \in I} \in (\mathbb{B}^I \cap M)$

Preliminares: filtros y ultrafiltros genéricos (2/3)

Demo. Sea $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro M-genérico. Es claro que el conjunto $\tilde{G} := \{X \in \mathbb{B} : X \cap G \neq \varnothing\}$ es un filtro propio de $\mathbb{B}$. Además, para cada $X \in \mathbb{B}$, el conjunto $X \cup X^\perp$ es predenso, y por lo tanto existe $p \in G$ tal que $p \in X \cup X^\perp$. Entonces o bien $p \in X \cap G$, y luego $X \in \tilde{G}$, o bien $p \in X^\perp \cap G$, y luego $X^\perp \in \tilde{G}$. Esto acaba de mostrar que $\tilde{G}$ es un ultrafiltro de $\mathbb{B}$.

(M-genericidad) Dada una familia $(X_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I \cap M$ tal que $X_i \in \tilde{G}$ para todo $i \in I$, se nota $X_* := \bigcap_{i\in I} X_i$ (tenemos que $X_* \in \mathbb{B}$ pues $\mathbb{B}$ es M-completa). Queremos probar que $X_* \in \tilde{G}$. Para ello, se observa que el conjunto $\left(\bigcup_{i\in I} X_i^\perp\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I} X_i^\perp\right)^\perp$ $(\in M)$ es predenso, y luego interseca G. Se distinguen dos casos:

- O bien $\bigcup_{i\in I} X_i^\perp$ interseca G. En este caso, $X_i^\perp$ interseca G y luego $X_i^\perp \in \tilde{G}$ para algún $i \in I$: absurdo, pues $X_i \in \tilde{G}$ para todo $i \in I$ (por hipótesis).
- Entonces $\left(\bigcup_{i\in I} X_i^\perp\right)^\perp = \bigcap_{i\in I} X_i^{\perp\perp} = X_*$ interseca G, es decir: $X_* \in \tilde{G}$. □

- Dado un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$, se demuestra que:

Lema: $p \in G \;\Leftrightarrow\; e(p) \in \tilde{G}$ para todo $p \in \mathbb{P}$ (es decir: $G = e^{-1}(\tilde{G})$)

Demo: Ejercicio

- Y por lo tanto: $G \in M \;\Leftrightarrow\; \tilde{G} \in M$

Preliminares: filtros y ultrafiltros genéricos (3/3)

- Como para cualquier ultrafiltro, la pertenencia asociada con el ultrafiltro $\tilde{G} \subseteq \mathbb{B}$ conmuta con todas las operaciones booleanas:

$$\begin{array}{rcl} \neg X & \in \tilde{G} & \Leftrightarrow & X \notin \tilde{G} \\ X \wedge Y & \in \tilde{G} & \Leftrightarrow & X \in \tilde{G} \ \wedge \ Y \in \tilde{G} \\ X \vee Y & \in \tilde{G} & \Leftrightarrow & X \in \tilde{G} \ \vee \ Y \in \tilde{G} \end{array}$$

(donde $\neg X := X^{\perp}$, $X \wedge Y := X \cap Y$ y $X \vee Y := (X \cup Y)^{\perp\perp}$)

- Debido al carácter M-genérico, las últimas dos propiedades de comutación se extienden a toda familia $(X_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}^I \cap M$:

$$\begin{array}{rcl} \bigwedge_{i \in I} X_i & \in \tilde{G} & \Leftrightarrow & (\forall i \in I)\ X_i \in \tilde{G} \\ \bigvee_{i \in I} X_i & \in \tilde{G} & \Leftrightarrow & (\exists i \in I)\ X_i \in \tilde{G} \end{array}$$

- Por lo tanto, la función indicatriz $\mathbf{1}_{\tilde{G}} : \mathbb{B} \to \mathbf{2}$ es un morfismo de álgebras booleanas M-completas

Teorema de la extensión genérica (recordatorio)

Teorema (Extensión genérica) (recordatorio)

Sean un modelo transitivo $M \models$ ZF y un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$. Para todo filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$, existe una clase $M[G]$ tal que:

(1) $M[G]$ es un modelo transitivo de ZF

(2) $M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$

(3) Para todo modelo transitivo $N \models$ ZF tal que $M \subseteq N$ y $G \in N$, tenemos que $M[G] \subseteq N$ (i.e. $M[G]$ está generado por M y G)

Además, tenemos que:

(4) $On^{M[G]} = On^M$

(5) Si $M \models$ AC, entonces $M[G] \models$ AC

Teorema de la extensión genérica: demostración (1/3)

Demo. Dados un modelo transitivo $M \models \mathrm{ZF}$, un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$ y un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$, se escribe:

- $\mathbb{B} := \{X \in \mathfrak{P}^M(\mathbb{P}) : X^{\perp\perp} = X\}$ $(\in M)$ al álgebra booleana inducida por $\mathbb{P}$;
- $e : \mathbb{P} \to \mathbb{B}^*$ a la función definida por $e(p) = \{p\}^{\perp\perp}$ para todo $p \in \mathbb{P}$;
- $\tilde{G} := \{X \in \mathbb{B} : X \cap G \neq \varnothing\} \subseteq \mathbb{B}$ al ultrafiltro M-genérico inducido por G;
- $M^{\mathbb{B}} := \left(V^{\mathbb{B}}\right)^M$ $(\subseteq M)$ a la clase de los $\mathbb{B}$-nombres inducidos por $\mathbb{B}$ en el modelo M;
- $x \mapsto \check{x}$ a la funcional que asocia a cada conjunto $x \in M$ el $\mathbb{B}$-nombre $\check{x} \in M^{\mathbb{B}}$ definido por recursión sobre $x \in M$ por: $\check{x} := \{(\check{y}, 1_{\mathbb{B}}) : y \in x\}$.

Mediante el ultrafiltro $\tilde{G} \subseteq \mathbb{B}$, se asocia a cada $\mathbb{B}$-nombre $u \in M^{\mathbb{B}}$ su *reificación* $u^G \in V$, la cual está definida por recursión sobre $u \in M^{\mathbb{B}}$ por:

$$u^G := \left\{v^G : v \in \mathrm{dom}(u) \wedge u(v) \in \tilde{G}\right\} \qquad (u \in M^{\mathbb{B}})$$

Esto permite construir la clase $M[G] := \left\{u^G : u \in M^{\mathbb{B}}\right\}$ $(\subseteq V)$.

Por $\in$-inducción sobre $x \in M$, se demuestra que $\check{x}^G = x$ para todo $x \in M$. Para ello, se observa que si $\check{y}^G = y$ para todo $y \in x$ (HI), entonces:

$$\check{x}^G = \{v^G : v \in \mathrm{dom}(\check{x}) \wedge \check{x}(v) \in \tilde{G}\} = \{\check{y}^G : y \in x\} =_{(\mathrm{HI})} \{y : y \in x\} = x.$$

Esto implica que $x = \check{x}^G \in M[G]$ para todo $x \in M$, y por lo tanto $M \subseteq M[G]$.

También se define el nombre genérico $g := \{(\check{p}, e(p)) : p \in \mathbb{P}\} \in M^{\mathbb{B}}$. Se observa que

$$g^G = \{\check{p}^G : p \in \mathbb{P} \wedge e(p) \in \tilde{G}\} = \{p : p \in \mathbb{P} \wedge p \in G\} = G,$$

y por lo tanto $G = g^G \in M[G]$, lo que acaba de probar (2). (...)

Teorema de la extensión genérica: demostración (2/3)

Demo (continuación). En el modelo booleano $M^{\mathbb{B}}$ ($\subseteq M$), cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de ZF induce una funcional $\big((u_1, \ldots, u_n) \mapsto [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}}\big) \ : \ \big(M^{\mathbb{B}}\big)^n \to \mathbb{B}$.

Lema:

$$u^G = v^G \quad \Leftrightarrow \quad [\![u = v]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \qquad \text{para todos } u, v \in M^{\mathbb{B}}$$

$$u^G \in v^G \quad \Leftrightarrow \quad [\![u \in v]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \qquad \text{para todos } u, v \in M^{\mathbb{B}}$$

Demo. del Lema. Se demuestra la primera equivalencia por inducción mutua sobre u y v. Supongamos que $u'^G = v'^V \Leftrightarrow [\![u' = v']\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G}$ para todos $u' \in \mathrm{dom}(u)$, $v' \in \mathrm{dom}(v)$ (HI). Dado $u' \in \mathrm{dom}(u)$, se observa que:

$$\begin{aligned}
[\![u' \in v]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \quad &\Leftrightarrow \quad \bigvee_{v' \in \mathrm{dom}(v)} \big(v(v') \land [\![u' = v']\!]^{\mathbb{B}}\big) \ \in \ \tilde{G} \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists v' \in \mathrm{dom}(v))\big(v(v') \in \tilde{G} \ \land \ [\![u' = v']\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G}\big) \\
&\Leftrightarrow_{\text{(HI)}} \quad (\exists v' \in \mathrm{dom}(v))\big(v'^G \in v^G \land u'^G = v'^G\big) \quad \Leftrightarrow \quad u'^G \in v^G \qquad (*)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
[\![u \subseteq v]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \quad &\Leftrightarrow \quad \bigwedge_{u' \in \mathrm{dom}(u)} \big(u(u') \Rightarrow [\![u' \in v]\!]^{\mathbb{B}}\big) \ \in \ \tilde{G} \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall u' \in \mathrm{dom}(u))\big(u(u') \in \tilde{G} \ \Rightarrow \ [\![u' \in v]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G}\big) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall u' \in \mathrm{dom}(u))\big(u'^G \in u^G \Rightarrow u'^G \in v^G\big) \ \Leftrightarrow \ u^G \subseteq v^G.
\end{aligned}$$

De modo análogo se demuestra que $[\![v \subseteq u]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \Leftrightarrow v^G \subseteq u^G$, y por lo tanto tenemos que $[\![u = v]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \Leftrightarrow u^G = v^G$. La segunda equivalencia se deduce de la primera con la misma técnica de prueba que para $(*)$. $\square$ (...)

Teorema de la extensión genérica: demostración (3/3)

Demo (continuación y fin).

Proposición: Para toda fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ con parámetros $u_1,\ldots,u_n \in M^{\mathbb{B}}$:

$$\varphi^{M[G]}(u_1^G,\ldots,u_n^G) \quad\Leftrightarrow\quad [\![\varphi(u_1,\ldots,u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G}$$

Demo. de la Prop. Por inducción externa sobre $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, usando el Lema anterior para las fórmulas atómicas. Por ejemplo, cuando $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \equiv \exists x_0\, \varphi_0(x_0,x_1,\ldots,x_n)$:

$$\begin{aligned}
[\![\varphi(u_1,\ldots,u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \quad &\Leftrightarrow \quad \bigvee_{u_0\in M^{\mathbb{B}}} [\![\varphi_0(u_0,u_1,\ldots,u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists u_0 \in M^{\mathbb{B}})\ [\![\varphi_0(u_0,u_1,\ldots,u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G} \\
&\Leftrightarrow_{\text{(HI)}} \quad (\exists u_0 \in M^{\mathbb{B}})\, \varphi_0^{M[G]}(u_0^G,u_1^G,\ldots,u_n^G) \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists x \in M[G])\, \varphi_0^{M[G]}(x,u_1^G,\ldots,u_n^G) \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi^{M[G]}(u_1^G,\ldots,u_n^G).
\end{aligned}$$

Los otros casos se tratan de modo análogo. □

Por construcción, es claro que $M[G]$ es una clase transitiva. Además, tenemos que $M^{\mathbb{B}} \models \varphi$ para cada teorema φ de ZF, luego $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{B}} = 1_{\mathbb{B}} \in \tilde{G}$, y por lo tanto $\varphi^{M[G]}$. Es decir: $M[G] \models$ ZF (1).

Dado un modelo transitivo $N \models$ ZF tal que $M \subseteq N$ y $G \in N$, se verifica que

$$u^G \;=\; \{v^G \;:\; v \in \mathrm{dom}(u) \wedge u(v) \in \tilde{G}\} \;\in\; N$$

para todo $u \in M^{\mathbb{B}}$ (por inducción sobre $u \in M^{\mathbb{B}}$), lo que implica que $M[G] \subseteq N$ (3).

(4) De la minimalidad de $M[G]$ se deduce fácilmente (ejercicio) que $On^{M[G]} = On^M$

(5) Si $M \models$ AC, entonces $[\![\text{AC}]\!]^{\mathbb{B}} = 1_{\mathbb{B}}$ ($\Rightarrow \text{AC}^{M[G]}$), y por lo tanto $M[G] \models$ AC. □

La relación de forcing (1/4)

- La demostración del teorema de la extensión genérica se basa en:

  (1) La construcción adentro de M del álgebra booleana $\mathbb{B}$ ($\in M$) inducida por $\mathbb{P}$ así como del modelo booleano $M^{\mathbb{B}}$ ($\subseteq M$)

  (2) La definición de una funcional $u \mapsto u^G$ que reifica cada nombre $u \in M^{\mathbb{B}}$ en un conjunto $u^G \in M[G]$ ($:=$ imagen de $(\cdot)^G$)

  (3) La observación que $\varphi^{M[G]}(\vec{u}^{\,G}) \quad \Leftrightarrow \quad [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} \in \tilde{G}$ para cada fórmula $\varphi(\vec{x})$ de ZF con parámetros $\vec{u} \in M^{\mathbb{B}}$

- Tradicionalmente, el vínculo entre el modelo booleano $M^{\mathbb{B}}$ ($\subseteq M$) y la extensión genérica $M[G] \supseteq M$ se expresa por medio de una relación de forcing $p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ ("p fuerza $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$") definida adentro de M por:

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n) \quad &:\equiv \quad e(p) \leq [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \\ &\Leftrightarrow \quad p \in [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \end{aligned}$$

(con $p \in \mathbb{P}$ y $u_1, \ldots, u_n \in M^{\mathbb{B}}$)

La relación de forcing (2/4)

- La relación de forcing "$p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n)$" permite deducir las propiedades de la extensión generica $M[G]$ a partir de las propiedades del modelo booleano $M^{\mathbb{B}}$ $(\subseteq M)$:

Teorema de forcing

Para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parámetros $u_1, \ldots, u_n \in M^{\mathbb{B}}$:

$$\varphi^{M[G]}(u_1^G, \ldots, u_n^G) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \in G)\ p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n)$$

(Reformulación obvia de la equivalencia (3) de la diapositiva anterior)

- Como $M^{\mathbb{B}} \models \mathsf{ZF}$ (en M), se deduce que $M[G] \models \mathsf{ZF}$
- Por otro lado, la relación de forcing está definida por completo adentro de M (sin ninguna referencia a G). De tal modo que:

$$p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n))^M$$

  - Permite construir conjuntos en M (y nombres en $M^{\mathbb{B}}$) usando el predicado de forcing en los axiomas de comprensión/reemplazo relativizados a M

La relación de forcing (3/4)

- **Recordatorio:** dados $p \in \mathbb{P}$ y $u_1, \ldots, u_n \in M^{\mathbb{B}}$:

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n) \quad &:\equiv \quad e(p) \leq [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \\ &\Leftrightarrow \quad p \in [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \end{aligned}$$

Proposición (Propiedades de la relación de forcing)

Para todas fórmulas φ y ψ con parámetros en $M^{\mathbb{B}}$:

- $p \Vdash \varphi \ \wedge \ q \leq p \ \Rightarrow \ q \Vdash \varphi$
- $\neg(\exists p \in \mathbb{P})(p \Vdash \varphi \ \wedge \ p \Vdash \neg\varphi)$
- $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \leq p)(q \Vdash \varphi \ \vee \ q \Vdash \neg\varphi)$
- $p \Vdash \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad (\forall q \leq p)\ q \nVdash \varphi$
- $p \Vdash \varphi \wedge \psi \quad \Leftrightarrow \quad p \Vdash \varphi \ \wedge \ p \Vdash \psi$
- $p \Vdash \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad (\forall q \leq p)(\exists r \leq q)(r \Vdash \varphi \ \vee \ r \Vdash \psi)$
- $p \Vdash \forall x\, \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u \in M^{\mathbb{B}})\ p \Vdash \varphi(u)$
- $p \Vdash \exists x\, \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall q \leq p)(\exists r \leq q)(\exists u \in M^{\mathbb{B}})\ r \Vdash \varphi(u)$

Demo: Ejercicio

La relación de forcing (4/4)

- **Observación.** Vimos en el capítulo anterior que la funcional

$$((u_1, \ldots, u_n) \mapsto [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}}) \;:\; (M^{\mathbb{B}})^n \to \mathbb{B}$$

está definida más generalmente para cualquier fórmula $\varphi \in \mathscr{L}_{\in,\check{V}}$, lo que permite extender la relación de forcing a ese lenguaje

- Cuando se trabaja en una extensión generica $M[G]$, es natural extender la operación de relativización $\varphi \mapsto \varphi^{M[G]}$ a todas las fórmulas del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$, añadiendo la cláusula:

$$(x \in \check{V})^{M[G]} \quad :\equiv \quad x \in M$$

- En este nuevo lenguaje, se mantiene el

Teorema de forcing: Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$

$$\varphi^{M[G]}(u_1^G, \ldots, u_n^G) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \in G)\ p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n)$$

así como las propiedades de la relación $p \Vdash \varphi$ (véase diapo. anterior)

- **Conclusión:** $M[G] \models \mathsf{ZF}_{\check{V}}$ (i.e. con comprensión y reemplazo en $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$)

Plan

El conjunto $\mathbf{Fin}(E, 2)$ (1/3)

- En esta sección, se consideran conjuntos de forcing de la forma

$$(\mathbb{P}, \leq) \;=\; (\mathbf{Fin}(E, 2),\ \supseteq)$$

donde $\mathbf{Fin}(E, 2)$ es el conjunto de las funciones finitas de E a 2

$$\mathbf{Fin}(E) \;:=\; \{f : E \rightharpoonup 2 \,:\, \mathrm{dom}(f) \text{ finito}\}$$

equipado aquí con el orden $f \leq g \;:\equiv\; f \supseteq g$ (inclusión inversa)

Proposición (Absolutez)

La fórmula "$Y = \mathbf{Fin}(E, 2)$" es absoluta, en el sentido en que

$$(\forall E \in M)\ \mathbf{Fin}^M(E, 2) = \mathbf{Fin}(E, 2)$$

para cualquier modelo transitivo $M \models$ ZF

Demo. Primero se observa que la fórmula "$f : E \rightharpoonup 2 \wedge \mathrm{dom}(E)$ finito" es Σ_1, y por lo tanto $\mathbf{Fin}^M(E, 2) \subseteq \mathbf{Fin}(E, 2)$. Recíprocamente, se demuestra por inducción sobre el cardinal (finito) de $\mathrm{dom}(f)$ que $f \in \mathbf{Fin}(E, 2)$ implica $f \in \mathbf{Fin}^M(E, 2)$. $\square$

El conjunto $\mathbf{Fin}(E,2)$ (2/3)

- **Obs.:** Para todos $f, g \in \mathbf{Fin}(E,2)$ (equipado con $\supseteq$), tenemos que:

$$\begin{array}{lcl} f \top g & \Leftrightarrow & f \cup g \text{ función} \\ & \Leftrightarrow & (\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g))\ f(x) = g(x) \\ f \perp g & \Leftrightarrow & (\exists x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g))\ f(x) \neq g(x) \end{array}$$

Proposición (Propiedades de $(\mathbf{Fin}(E,2), \supseteq)$)

Dado un conjunto E cualquiera:

(1) El conjunto ordenado $(\mathbf{Fin}(E,2), \supseteq)$ es separativo

(2) Si E es infinito, entonces $(\mathbf{Fin}(E), \supseteq)$ no tiene átomos

(3) Toda anticadena de $(\mathbf{Fin}(E,2), \supseteq)$ es finita o numerable

Demo. (1) Dados $f, g \in \mathbf{Fin}(E,2)$ tales que $f \not\supseteq g$, se trata de hallar $f' \supseteq f$ tal que $f' \perp g$. Si $f \perp g$, basta con tomar $f' := f$. Si $f \top g$, entonces $\mathrm{dom}(f) \not\supseteq \mathrm{dom}(g)$, y existe $x \in \mathrm{dom}(g)$ tal que $x \notin \mathrm{dom}(f)$. En este caso, basta con tomar $f' := f \cup \{(x, 1 - g(x))\}$.

(2) Sea $f \in \mathbf{Fin}(E,2)$. Como E es infinito, existe $x \in E - \mathrm{dom}(f)$. Sean $f_0 := f \cup \{(x,0)\}$ y $f_1 := f \cup \{(x,1)\}$. Por construcción, tenemos que $f_0, f_1 \supseteq f$ y $f_0 \perp f_1$. (...)

El conjunto $\mathbf{Fin}(E, 2)$ (3/3)

Demo (continuación y fin). (3) Primero, se demuestra par inducción sobre $n \in \omega$ que toda anticadena $A \subseteq \mathbf{Fin}(E, 2)$ tal que $|\mathrm{dom}(f)| = n$ para todo $f \in A$ es finita

- Paso de base. Obvio, pues si $|\mathrm{dom}(f)| = 0$ para todo $f \in A$, entonces $A \subseteq \{\varnothing\}$.
- Paso inductivo. Se supone que la propiedad se cumple para algún $n \in \omega$, y se considera una anticadena $A \subseteq \mathbf{Fin}(E, 2)$ tal que $|\mathrm{dom}(f)| = n + 1$ para todo $f \in A$.

  Si $A = \varnothing$, entonces A es obviamente finita.

  Si $A \neq \varnothing$, se fija una función $f_0 \in A$, con $\mathrm{dom}(f_0) = \{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$, y para cada $i \in [1..n{+}1]$, se escribe $A_i := \{f \in A : f(e_i) \neq f_0(e_i)\}$. Como A es una anticadena, tenemos que $A = \{f_0\} \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}$. Fijemos un índice $i \in [1..n + 1]$. Como $f(e_i) = 1 - f_0(e_i)$ para todo $f \in A_i$, todas las funciones $f \in A_i$ coinciden sobre e_i. Por lo tanto, el conjunto $A'_i := \{f{\restriction_{\mathrm{dom}(f)-\{e_i\}}} : f \in A_i\}$ sigue siendo una anticadena de $\mathbf{Fin}(E, 2)$, pero tal que $|\mathrm{dom}(f)| = n$ para todo $f \in A'_i$. Por HI, la anticadena A'_i es finita, así como la anticadena A_i, que es equipotente a A'_i. Por lo tanto la anticadena A, igual a $\{f_0\} \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}$, es finita.

Luego se observa que toda anticadena $A \subseteq \mathbf{Fin}(E, 2)$ se puede descomponer en la forma $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, donde $A_n = \{f \in A : |\mathrm{dom}(f)| = n\}$ para cada $n \in \omega$. Por lo anterior, A_n es una anticadena finita para todo $n \in \omega$, y por lo tanto A es a lo sumo numerable. □

Observaciones: Si $(\mathbb{P}, \leq) = \mathbf{Fin}(E, \supseteq)$ (con $E \in M$ infinito), entonces:

- (1) implica que la función $e : (\mathbb{P}, \leq) \to (\mathbb{B}, \subseteq)$ es un encaje
- (2) implica que todo filtro genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ está afuera de M: $G \notin M$
- Veremos más adelante el impacto de (3) sobre los cardinales de $M[G]$

Ejemplo 1: añadidura de un real de Cohen (1/3)

Objetivo: Añadir al universo un nuevo subconjunto $c \subseteq \omega$,
o de modo equivalente: una nueva función indicatriz $g : \omega \to 2$

(1) Para ello, se considera un modelo transitivo $M \models \mathsf{ZF}$ así como el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$ definido por $\mathbb{P} := \mathbf{Fin}(\omega, 2)$ y $f \leq g$ sii $f \supseteq g$ para todos $f, g \in \mathbb{P}$

(**Intuición:** los elementos de $\mathbf{Fin}(\omega, 2)$ son aproximaciones potenciales de la función indicatriz g que queremos construir)

(2) Dado un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}^{(\dagger)}$, se trabaja a partir de ahora en la extensión genérica $M[G]$ inducida por G, observando que $G \notin M$ y luego $M[G] \supsetneq M$ (pues $\mathbb{P} = \mathbf{Fin}(\omega, 2)$ no tiene átomos)

(3) Como $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro, sus elementos son compatibles de a dos, y la unión $g := \bigcup G$ es una función ($: \omega \rightharpoonup 2$). Además:

Proposición: La función $g : \omega \to 2$ es total

(†) Sabemos que tal filtro existe al menos cuando M es numerable

Ejemplo 1: añadidura de un real de Cohen (2/3)

Demo. Para cada $n \in \omega$, se nota $D_n := \{f \in \mathbf{Fin}(\omega, 2) : n \in \mathrm{dom}(f)\}$, y se observa que:

- $D_n \in M$, pues $\mathbf{Fin}(\omega, 2) \in M$ y la fórmula "$n \in \mathrm{dom}(f)$" es Δ_0.
- D_n es denso en $\mathbf{Fin}(\omega, 2)$, pues para todo $f \in \mathbf{Fin}(\omega, 2)$:
  - o bien $n \in \mathrm{dom}(f)$ y $f \in D_n$,
  - o bien $n \notin \mathrm{dom}(f)$ y la función $f' \in \mathbf{Fin}(\omega, 2)$ definida por $f' := f \cup \{(n, 0)\}$ es tal que $f' \leq f$ y $f' \in D_n$.

Por lo tanto $D_n \cap G \neq \varnothing$, y existe $f_n \in G$ tal que $f_n \in D_n$, es decir: tal que $n \in \mathrm{dom}(f_n)$.
Por lo tanto $n \in \mathrm{dom}(g)$ $(\supseteq \mathrm{dom}(f_n))$ para todo $n \in \omega$, es decir: $\mathrm{dom}(g) = \omega$. □

(4) Como $g := \bigcup G$ y como G está cerrado superiormente, tenemos que $G = \{f \in \mathbb{P} : f \subseteq g\}$, y por lo tanto $g \notin M$ (pues $G \notin M$)

(5) Sea $c := \{n \in \omega : g(n) = 1\}$ $(\subseteq \omega)$ (real de Cohen).
Como $g = \mathbf{1}_c$, tenemos que $c \notin M$ (pues $g \notin M$)

Conclusión: Conseguimos construir una extensión genérica $M[G]$ del modelo de base M que tiene más números reales que M:

$$\mathfrak{P}^M(\omega) \subsetneq \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega) \quad (\ni c)$$

Ejemplo 1: añadidura de un real de Cohen (3/3)

Construimos un real de Cohen: $c \in \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega)$, $c \notin \mathfrak{P}^{M}(\omega)$

¿Cuáles son las propiedades de c en $M[G]$?

- c no es constructible (pues $L \subseteq M \not\ni c$), y por lo tanto:
- c es infinito y coinfinito
- La función indicatriz $1_c : \omega \to 2$ no es computable
- Para todo $r \in \mathfrak{P}^M(\omega)$, tenemos que: $c \triangle r \notin \mathfrak{P}^M(\omega)$.
  En particular, tenemos una inyección:
  $$\begin{array}{rcl} \mathfrak{P}^M(\omega) & \hookrightarrow & \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega) - \mathfrak{P}^M(\omega) \\ r & \mapsto & c \triangle r \end{array}$$
- A través de la biyección usual $h : \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{M[G]}$,
  el número $h(c) \in \mathbb{R}^{M[G]}$ es transcendente (etc.)

Obs.: Las prop. anteriores se cumplen para todo $c \in \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega) - \mathfrak{P}^M(\omega)$

Ejemplo 2: añadidura de $\aleph_2$ reales de Cohen (1/3)

Objetivo: Añadir al universo $\aleph_2$ nuevos subconjuntos $c_\alpha \subseteq \omega$ $(\alpha < \aleph_2)$, o de modo equivalente: una nueva función indicatriz $g : \aleph_2 \times \omega \to 2$

(1) Para ello, se considera un modelo transitivo $M \models$ ZFC así como el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) := (\mathbf{Fin}(\aleph_2^M \times \omega, 2), \supseteq)$ $(\in M)$

(2) Dado un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$, se trabaja a partir de ahora en la extensión genérica $M[G]$ inducida por G, observando que $G \notin M$ y luego $M[G] \supsetneq M$ (pues $\mathbb{P} = \mathbf{Fin}(\aleph_2^M \times \omega, 2)$ no tiene átomos)

(3) Como $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro, sus elementos son compatibles de a dos, y la unión $g := \bigcup G$ es una función $(: \aleph_2^M \times \omega \rightharpoonup 2)$. Además:

Proposición: La función $g : \aleph_2^M \times \omega \to 2$ es total

Demo: Misma técnica que para el Ejemplo 1 (Ejercicio)

(4) Se considera la función $h : \aleph_2^M \to \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega)$ definida por:

$$h(\alpha) := \{n \in \omega : g(\alpha, n) = 1\} \qquad (\alpha < \aleph_2^M)$$

Ejemplo 2: añadidura de $\aleph_2$ reales de Cohen (2/3)

Resumen: A partir del filtro genérico $G \subseteq \mathbb{P}$, construimos una función indicatriz $g := \bigcup G : \aleph_2^M \times \omega \to 2$, a partir de la cual construimos una función $h : \aleph_2^M \to \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega)$ por:

$$h(\alpha) := \{n \in \omega : g(\alpha, n) = 1\} \qquad (\alpha < \aleph_2^M)$$

Proposición

La función $h : \aleph_2^M \to \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega)$ es inyectiva

Demo. Dados $\alpha \neq \beta < \aleph_2^M$, se nota $D_{\alpha,\beta} := \{f \in \mathbb{P} : (\exists n \in \omega)\, f(\alpha, n) \neq f(\beta, n)\} \in M$. El conjunto $D_{\alpha,\beta} \subseteq \mathbb{P}$ es denso, pues para todo $f \in \mathbb{P}$, existe $n \in \omega$ tal que $(\alpha, n) \notin \mathrm{dom}(f)$ y $(\beta, n) \notin \mathrm{dom}(f)$, lo que permite construir $f' := f \cup \{((\alpha, n), 0), ((\beta, n), 1)\} \in \mathbb{P}$, tal que $f' \leq f$ y $f' \in D_{\alpha,\beta}$. Como $G \subseteq \mathbb{P}$ es M-genérico, existe $f \in D_{\alpha,\beta} \cap G$. Sea $n \in \omega$ tal que $f(\alpha, n) \neq f(\beta, n)$. Entonces $g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)$ (pues $g \supseteq f$), y luego $h(\alpha) \neq h(\beta)$. $\square$

(5) Por lo tanto: $M[G] \models \text{ZFC} + \aleph_2^M \preceq \mathfrak{P}(\omega)$
(∃ inyección)

Problema: ¿Cómo se relacionan $\aleph_2^M$ y $\aleph_2^{M[G]}$?

La condición de cadena numerable (c.c.c.) (1/5)

En cualquier extensión genérica $M[G]$, tenemos que:

Lema: $Cn^{M[G]} \subseteq Cn^{M}$

Demo. Se sigue de que $On^{M} = On^{M[G]}$ y de que la fórmula "$Cn(\kappa)$" es de clase Π_1. $\square$

- Por otro lado, un cardinal κ en M puede perder su estatus de cardinal en $M[G]$, si éste introduce una biyección $f : \kappa \xrightarrow{\sim} \alpha$ para algún $\alpha < \kappa$

Corolario: $(\forall \alpha \in On^{M})\ \aleph_{\alpha}^{M} \leq \aleph_{\alpha}^{M[G]}$

Demo. Ejercicio

Definición (Condición de cadena numerable)

Se dice que $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la condición de cadena numerable (c.c.c.) cuando toda *anti*cadena de $\mathbb{P}$ es finita o numerable

- **¡Cuidado!** La fórmula "$(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la c.c.c." no es absoluta, y tiene sentidos distintos en M y en $M[G]$. En lo siguiente, siempre se considerará dicha fórmula en el modelo de base M

La condición de cadena numerable (c.c.c.) (2/5)

Teorema (Preservación de los cardinales por c.c.c)

Si $M \models$ (AC $\wedge$ $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la c.c.c.), entonces $Cn^{M[G]} = Cn^{M}$

La demostración del teorema de preservación de los cardinales por c.c.c. se basa en las nociones de cofinalidad y de cardinal regular:

- Dados ordinales α y β, se dice que α es cofinal a β y se escribe $\alpha \lhd \beta$ cuando existe una función estrictamente creciente $f : \alpha \to \beta$ tal que $(\forall \eta < \beta)(\exists \xi < \alpha)\, f(\xi) \geq \eta$

Proposición: $\lhd$ es un orden sobre On, tal que: $\alpha \lhd \beta \;\Rightarrow\; \alpha \leq \beta$

Demo. Ejercicio. Observar que el orden $\lhd$ no es total: $0 \not\lhd 1$ y $1 \not\lhd 0$

- Dado un ordinal α, se llama cofinalidad de α y se escribe $\mathrm{cof}(\alpha)$ al mínimo ordinal cofinal a α. Tenemos que $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \alpha$
  - **Ejemplos:** $\mathrm{cof}(0) = 0$, $\mathrm{cof}(n) = 1$ para todo $n \in \omega^*$, $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + 1) = 1$, etc.

La condición de cadena numerable (c.c.c.) (3/5)

Proposición: $\text{cof}(\text{cof}(\alpha)) = \text{cof}(\alpha)$ para todo $\alpha \in On$

Demo. Ejercicio

- Se dice que un ordinal α es regular cuando $\text{cof}(\alpha) = \alpha$

Proposición: Todo ordinal regular es un cardinal

Demo. Por contrarrecíproco, se demuestra (ejercicio) que si α no es un cardinal, entonces no es regular, usando el siguiente lema técnico:

Lema: Sean ordinales α y β. Si existe una función $f : \beta \to \alpha$ tal que $(\forall \eta < \alpha)(\exists \xi < \beta)\, f(\xi) \geq \eta$, entonces $\text{cof}(\alpha) \leq \beta$

Proposición: El cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ es regular para todo $\alpha \in On$

Demo. Ejercicio

- **Obs.:** La fórmula "α es un cardinal regular" es Π_1
- Un cardinal es singular (fórmula Σ_1) cuando no es regular
  - El primer cardinal singular infinito es $\aleph_\omega$ (pues $\text{cof}(\aleph_\omega) = \aleph_0$)

La condición de cadena numerable (c.c.c.) (4/5)

Proposición (Caracterización de los cardinales singulares infinitos)

Un cardinal infinito κ es singular si y sólo si existe una familia $(\mu_\xi)_{\xi<\lambda}$ de cardinales $<\kappa$ indexada por un cardinal $\lambda<\kappa$ y tal que $\kappa=\sup_{\xi<\lambda}\mu_\xi$

Demo. Ejercicio

- Ahora tenemos las herramientas para demostrar el

Teorema (Preservación de los cardinales por c.c.c) (recordatorio)

Si $M\models(\mathrm{AC}\ \wedge\ (\mathbb{P},\leq)$ cumple la c.c.c.$)$, entonces $Cn^{M[G]}=Cn^M$

Demo. Supongamos que $M\models\mathrm{AC}$ y $M\models(\mathbb{P},\leq)$ cumple la c.c.c.. Basta con mostrar que $\kappa\in Cn^M$ implica $\kappa\in Cn^{M[G]}$, por inducción sobre $\kappa\in M$. Se distinguen tres casos:

1. κ es finito en M. Obvio, pues los ordinales finitos coinciden en M y en $M[G]$.

2. κ es infinito y singular en M. En este caso, existe en M una familia $(\mu_\xi)_{\xi<\lambda}$ de cardinales menores a κ indexada por un cardinal $\lambda<\kappa$, tal que $\sup_{\xi<\lambda}\mu_\xi=\kappa$. Pero como $\mu_\xi<\kappa$ para todo $\xi<\lambda$, el ordinal μ_ξ también es un cardinal en $M[G]$ para todo $\xi<\lambda$ (por (HI)), y por lo tanto el supremo $\kappa=\sup_{\xi<\lambda}\mu_\xi$ también es un cardinal en $M[G]$.

La condición de cadena numerable (c.c.c.) (5/5)

Demo (continuación y fin).

3. κ **es infinito y regular en** M**.** Queremos mostrar que κ también es un ordinal regular en $M[G]$. Basta con mostrar que para todo cardinal $\lambda < \kappa$ (en M y en $M[G]$), toda función $f : \lambda \to \kappa$ ($\in M[G]$) está acotada. Para ello, se considera una función $f : \lambda \to \kappa$ ($\in M[G]$) y un nombre $\dot{f} \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $\dot{f}^G = f$. Como $M[G] \models f : \lambda \to \kappa$, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \dot{f} : \check{\lambda} \to \check{\kappa}$. A partir de ahora, se trabaja en M con el nombre $\dot{f}$:

Para cada $\alpha < \lambda$, se escribe

$$B_\alpha := \{\beta < \kappa : (\exists q \leq p)\ q \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{\beta}\}$$

y para cada $\beta \in B_\alpha$, se elige $q_{\alpha,\beta} \leq p$ tal que $q \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{\beta}$ (por AC). Ahora se observa que para todos $\beta_1 \neq \beta_2 < \kappa$, no existe ningún $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{\beta}_1$ y $r \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{\beta}_2$. Por lo tanto, la función $(\beta \mapsto q_{\alpha,\beta}) : B_\alpha \to \mathbb{P}$ es inyectiva y su imagen $Q_\alpha := \{q_{\alpha,\beta} : \beta \in B_\alpha\}$ es una anticadena de $\mathbb{P}$. Por la c.c.c., el conjunto Q_α y luego B_α (que es equipotente con B_α) es a lo sumo numerable para todo $\alpha < \lambda$. Entonces $|\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha| \leq \lambda \times \aleph_0 = \lambda < \kappa$, y por lo tanto el conjunto $\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$ está acotado por algún $\beta_0 < \kappa$, de tal modo que para todos $\alpha < \lambda$ y $\beta > \beta_0$ ($\beta < \kappa$), tenemos que $\beta \notin B_\alpha$. Acabos de mostrar que

$$(\forall q \leq p)\ q \nVdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{\beta}, \quad \text{es decir:} \quad p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) \neq \check{\beta}$$

para todos $\alpha < \lambda$ y $\beta > \beta_0$ ($\beta < \kappa$).

Volviendo a $M[G]$, se deduce (por el teorema de forcing) que $f(\alpha) \leq \beta_0$ para todo $\alpha < \lambda$. Esto demuestra que la función $f : \lambda \to \kappa$ está acotada por el ordinal $\beta_0 < \kappa$. □

Ejemplo 2: añadidura de $\aleph_2$ reales de Cohen (3/3)

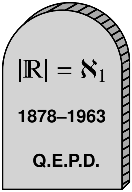
Volviendo a la extensión genérica $M[G]$ inducida por un modelo transitivo $M \models$ ZFC y un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbf{Fin}(\aleph_2^M \times \omega, 2)$:

(5) Vimos que: $M[G] \models$ ZFC $+\ \aleph_2^M \preceq \mathfrak{P}(\omega)$

(6) Pero como $(\mathbb{P}, \leq) := (\mathbf{Fin}(\aleph_2^M \times \omega, 2), \supseteq)$ cumple la c.c.c. (en M), tenemos que $\aleph_2^M = \aleph_2^{M[G]}$, y por lo tanto:

Teorema: $M[G] \models$ ZFC $+ \neg$HC

¡Felicidades! Acabamos de refutar la hipótesis del continuo



¿Consistencia relativa de ZFC + ¬HC?

(1) Supongamos que ZF (y luego ZFC) es consistente

(2) Entonces ZF tiene un modelo numerable
(por completitud + Löwenheim-Skolem descendiente)

(3) Sea M un modelo transitivo numerable de ZF
(supone implícitamente que la metateoría es ZF)

(4) Se define $(\mathbb{P}, \leq) := (\mathbf{Fin}(\aleph_2^M \times \omega,\, 2),\, \supseteq) \in M$

(5) Sea un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ (por el Lema de Rasiowa-Sikorski)
y $M[G]$ la extensión genérica correspondiente a M y G
(por el teorema de la extensión genérica)

(6) Vimos que $M[G] \models \mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{HC}$

(7) Y por lo tanto $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{HC}$ es consistente

Problema: (2) no necesariamente implica (3)

Ejemplo 3: fijado $n \geq 1$, forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ (1/3)

Fijado un entero $n \geq 1$, queremos forzar el axioma $2^{\aleph_0} = \aleph_n$

(1) Para ello, se considera un modelo transitivo $M \models$ ZFC + HGC con el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) := (\mathbf{Fin}(\aleph_n^M \times \omega,\, 2),\, \supseteq)$ $(\in M)$

(2) Dado un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$, se trabaja a partir de ahora en la extensión genérica $M[G]$ inducida por G, observando que $G \notin M$ y luego $M[G] \supsetneq M$ (pues $\mathbb{P} = \mathbf{Fin}(\aleph_n^M \times \omega,\, 2)$ no tiene átomos)

(3) Como $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro, sus elementos son compatibles de a dos, y la unión $g := \bigcup G$ es una función ($: \aleph_n^M \times \omega \rightharpoonup 2$). Además:

Proposición: La función $g : \aleph_n^M \times \omega \to 2$ es total

Demo: Misma técnica que para los Ejemplos 1 y 2 (Ejercicio)

(4) Se considera la función $h : \aleph_n^M \to \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega)$ definida por:

$$h(\alpha) := \{k \in \omega : g(\alpha, k) = 1\} \qquad (\alpha < \aleph_n^M)$$

Ejemplo 3: fijado $n \geq 1$, forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ (2/3)

Proposición

La función $h : \aleph_n^M \to \mathfrak{P}^{M[G]}(\omega)$ es inyectiva

Demo: Misma técnica que para el Ejemplo 2 (Ejercicio)

(5) Además: $M[G] \models \aleph_n = \aleph_n^M$ (pues $\mathbb{P}$ cumple la c.c.c. en M)

(6) Por lo tanto: $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_n$

(Observar que $M \models 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ mientras que $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_n$)

Queda demostrar que $M[G] \models 2^{\aleph_0} \leq \aleph_n$

Para ello, vamos a:

(a) Determinar los cardinales de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{B}$ en M

(b) Mostrar que para todo $X \in M$, el cardinal de $\mathfrak{P}(X)$ en $M[G]$ está acotado por el cardinal de $\mathbb{B}^X$ en M

Cardinales de $\mathbb{P}$ y de $\mathbb{B}$ (1/2)

Lema (Cardinal de $\mathbf{Fin}(E,2)$) (en ZFC)

Para todo conjunto infinito E: $|\mathbf{Fin}(E,2)| = |E|$

Demo. Ejercicio

A partir de ahora, se considera un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq)$ (en ZFC), y se nota $\mathbb{B} := \{X \in \mathfrak{P}(\mathbb{P}) : X^{\perp\perp} = X\}$

Lema (en ZFC)

Todo elemento $X \in \mathbb{B}$ está completamente determinado por cualquier anticadena maximal $A \subseteq X$, pues: $X = A^{\perp\perp}$

Demo. Sea A una anticadena maximal de X. Como X ($\in \mathbb{B}$) está cerrado inferiormente en $\mathbb{P}$, A también es una anticadena de $\mathbb{P}$. Basta con probar que $A^\perp = X^\perp$. La inclusión $X^\perp \subseteq A^\perp$ es obvia, pues $A \subseteq X$. Para demostrar la inclusión recíproca, se razona por el absurdo, suponiendo que existe $p \in A^\perp$ tal que $p \notin X^\perp$. Como $p \notin X^\perp$, existe $q \in X$ tal que $q \top p$, y luego, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$. Pero como los conjuntos $A^\perp$ ($\ni p$) y X ($\ni q$) son cerrados inferiormente, se deduce que $r \in A^\perp \cap X$. Por lo tanto, el conjunto $A' := A \cup \{r\}$ es una anticadena de $\mathbb{P}$ (pues $r \in A^\perp$) tal que $A' \subseteq X$ (pues $r \in X$), lo que contradice la maximalidad de A en X. □

Cardinales de $\mathbb{P}$ y de $\mathbb{B}$ (2/2)

- Sea $\mathbb{A}$ ($\subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{P})$) el conjunto de todas las anticadenas de $\mathbb{P}$. El lema anterior implica (en ZFC) que la función
$$(A \mapsto A^{\perp\perp}) \ : \ \mathbb{A} \to \mathbb{B}$$
es sobreyectiva, y por lo tanto: $|\mathbb{B}| \le |\mathbb{A}|$. Luego:

Proposición (en ZFC)

Si $(\mathbb{P}, \le)$ cumple la c.c.c., entonces $|\mathbb{B}^*| \ \le \ |\mathbb{P}|^{\aleph_0}$ (notando $\mathbb{B}^* := \mathbb{B} - \{\varnothing\}$)

Demo. Como $(\mathbb{P}, \le)$ cumple la c.c.c. tenemos que $|\mathbb{A}^*| \le |\mathbb{P}|^{\aleph_0}$ (notando $\mathbb{A}^* := \mathbb{A} - \{\varnothing\}$). Y por lo anterior, se concluye que $|\mathbb{B}^*| \le |\mathbb{A}^*| \le |\mathbb{P}|^{\aleph_0}$. □

Corolario (en ZFC)

Si $\mathbb{P} = \mathbf{Fin}(E, 2)$ con E infinito, entonces $|\mathbb{B}| \ \le \ |E|^{\aleph_0}$

Demo. Si E es infinito, entonces: $|\mathbb{B}| = |\mathbb{B}^*| \le |\mathbb{P}|^{\aleph_0} = |\mathbf{Fin}(E, 2)|^{\aleph_0} = |E|^{\aleph_0}$. □

Acotación del cardinal de $\mathfrak{P}(X)$ en $M[G]$

Proposición

En toda extensión genérica $M[G]$, tenemos que:

$$M[G] \models (\forall X \in M)\ \exists h\ (h : (\mathbb{B}^X)^M \to \mathfrak{P}(X) \text{ sobreyectiva})$$

(escribiendo $(\mathbb{B}^X)^M := \mathbb{B}^X \cap M$ al conjunto de las funciones $f : X \to \mathbb{B}$ en M)

Demo. Sea la función $h : (\mathbb{B}^X \cap M) \to \mathfrak{P}(X)$ definida por $h(f) := \{x \in X : f(x) \in \tilde{G}\}$ para todo $f \in \mathbb{B}^X \cap M$. Para mostrar que la función h es sobreyectiva, se considera un subconjunto $Y \subseteq X$ in $M[G]$. Fijado un nombre $\dot{Y} \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $\dot{Y}^G = Y$, se considera la función $f \in \mathbb{B}^X \cap M$ definida por $f(x) = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \check{x} \in \dot{Y}\}$ $(\in \mathbb{B})$ para todo $x \in X$.
(Observar que $f := \{(x, S) \in X \times \mathbb{B} : (\forall p \in \mathbb{P})(p \in S \Leftrightarrow p \Vdash \check{x} \in \dot{Y})\} \in M$.)
Luego, se concluye por el teorema de forcing que
$h(f) = \{x \in X : f(x) \in \tilde{G}\} = \{x \in X : (\exists p \in G)\ p \Vdash \check{x} \in \dot{Y}\} = \{x \in X : x \in Y\} = Y$. $\square$

Corolario: Si además $M \models \mathrm{AC}$ (y luego $M[G] \models \mathrm{AC}$), entonces:

$$M[G] \models (\forall X \in M)\ |\mathfrak{P}(X)| \leq |\mathbb{B}^X \cap M|$$

Ejemplo 3: fijado $n \geq 1$, forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ (3/3)

Volviendo a la extensión genérica $M[G]$ inducida por un modelo transitivo $M \models \mathsf{ZFC} + \mathsf{HGC}$ y un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbf{Fin}(\aleph_n^M \times \omega, 2)$:

(6) Vimos que: $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_n$

Proposición: $M[G] \models 2^{\aleph_0} \leq \aleph_n$

Demo. En el modelo de base M se observa que $\mathbb{P} = \mathbf{Fin}(\aleph_n \times \omega, 2)$, entonces
$(M \models)$ $|\mathbb{B}| \leq |\aleph_n \times \omega|^{\aleph_0} = \aleph_n^{\aleph_0} \underset{\mathsf{HGC}}{=} (2^{\aleph_{n-1}})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_{n-1} \times \aleph_0} = 2^{\aleph_{n-1}} \underset{\mathsf{HGC}}{=} \aleph_n$
(usando que $M \models \mathsf{HGC}$), y luego: $M \models |\mathbb{B}^\omega| \leq \aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n$. Entonces $M \models \mathbb{B}^\omega \preceq \aleph_n$, y como $\aleph_n^M = \aleph_n^{M[G]}$ (pues $\mathbb{P}$ cumple la c.c.c. en M), se deduce que $M[G] \models \mathbb{B}^\omega \cap M \preceq \aleph_n$ (pues la relación $\preceq$ es Σ_1), y por lo tanto: $M[G] \models 2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{B}^\omega \cap M| \leq \aleph_n$. □

(8) Por lo tanto: $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \aleph_n$

Ejercicio: ¿Que pasa si uno remplaza $\aleph_n$ por $\aleph_{\omega+1}$? ¿por $\aleph_\omega$?

Plan

Límites del enfoque de Cohen

Idea fundamental del forcing (según Cohen):

- Todo modelo transitivo M (el modelo de base) puede ser extendido en un modelo transitivo $M[G] \supseteq M$ (la extensión genérica) mediante un nuevo conjunto G (el filtro M-genérico) aproximado por los elementos de un conjunto ordenado no vacío $(\mathbb{P}, \leq) \in M$ (el conjunto de forcing)
- Para asegurar la existencia de un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ (en general afuera de M), Cohen supone que el modelo de base M es numerable

Problema: ¡No se sabe si tal modelo existe!

- La hipótesis de la consistencia de ZF implica la existencia de un modelo numerable (por completitud + Löwenheim-Skolem), pero no necesariamente de un modelo numerable bien fundado (de modo externo)
- Además, el enfoque de Cohen presupone que la metateoría también es la teoría de conjuntos (colapso de Mostowski, construcción de $M[G]$, etc.)

► ¿Cómo construir $\mathscr{M}[G]$ a partir de un modelo $\mathscr{M}$ cualquiera?

Convenciones de escritura

Dado un modelo de Tarski $\mathscr{M} \models \mathrm{ZF}$:

- A cada punto $A \in \mathscr{M}$ se asocia el conjunto externo

$$\boldsymbol{A} \; := \; \{a \in \mathscr{M} : \mathscr{M} \models a \in A\} \qquad (\subseteq \mathscr{M})$$

- Dados puntos $A, \leq_A \in \mathscr{M}$ tales que $\mathscr{M} \models$ "$\leq_A$ orden sobre A", se escribe $\leq_{\boldsymbol{A}}$ a la relación de orden (externa) sobre $\boldsymbol{A}$ definida por:

$$a \leq_{\boldsymbol{A}} a' \quad \text{sii} \quad \mathscr{M} \models a \leq_A a' \qquad (a, a' \in \boldsymbol{A})$$

- Dados puntos $A, B, f \in \mathscr{M}$ tales que $\mathscr{M} \models$ "f función de A en B", se escribe $\boldsymbol{f}$ a la función (externa) de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$ definida por:

$$\boldsymbol{f}(a) \; := \; (f(a))^{\mathscr{M}} \qquad (a \in \boldsymbol{A})$$

- Se dice que un subconjunto externo $\mathcal{X} \subseteq \mathscr{M}$ viene de $\mathscr{M}$ cuando $\mathcal{X} = \boldsymbol{X}$ para algún punto $X \in \mathscr{M}$

La noción de filtro $\mathscr{M}$-genérico

Sea un modelo de Tarski $\mathscr{M} \models \mathsf{ZF}$ con puntos $\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \in \mathscr{M}$ t.q.:

$$\mathscr{M} \models (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}) \text{ es un conjunto ordenado no vacío}$$

- En la metateoría, los puntos $\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \in \mathscr{M}$ que definen el conjunto de forcing inducen un conjunto ordenado externo $(\mathbf{P}, \leq_{\mathbf{P}})$
- Se dice que un subconjunto externo $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{P}$ es un filtro $\mathscr{M}$-genérico cuando:

  (1) $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{P}$ es un filtro: $\mathcal{G} \neq \varnothing \ \wedge \ \mathcal{G} = \uparrow\mathcal{G} \ \wedge$
  $(\forall p, q \in \mathcal{G})(\exists r \in \mathcal{G})(r \leq_{\mathbf{P}} p \wedge r \leq_{\mathbf{P}} q)$

  (2) $\mathcal{G}$ interseca todo subconjunto denso $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbf{P}$ que viene de $\mathscr{M}$

Lema (Rasiowa-Sikorski, variante)

Si $\mathscr{M}$ es numerable, entonces existe un filtro $\mathscr{M}$-genérico $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{P}$

Además, fijada una condición $p_0 \in \mathbf{P}$, se puede imponer que $p_0 \in \mathcal{G}$

Demo. Misma demostración que para la formulación usual (ejercicio)

Extensión genérica de un modelo cualquiera (1/6)

Dado un modelo de Tarski $\mathscr{M} \models \mathrm{ZF}$ con puntos $\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \in \mathscr{M}$ t.q.:

$$\mathscr{M} \models (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}) \text{ es un conjunto ordenado no vacío}$$

Teorema (Extensión genérica, generalización)

Para todo filtro $\mathscr{M}$-genérico $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{P}$, existe una extensión $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \supseteq \mathscr{M}$ con un punto $G \in \mathscr{M}[\mathcal{G}]$ tales que:

(1) $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \mathrm{ZF}_{\check{V}}$ (interpretando $\check{V}$ por $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{G}]$)

(2) $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V}$

(3) $\mathcal{G} = \boldsymbol{G}$ (i.e. $\mathcal{G}$ viene del punto $G \in \mathscr{M}[\mathcal{G}]$)

(4) Si $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{G}]$ es un submodelo transitivo definible en $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ tal que $\mathscr{M} \cup \{G\} \subseteq \mathscr{N}$ y $\mathscr{N} \models \mathrm{ZF}$, entonces $\mathscr{N} = \mathscr{M}[\mathcal{G}]$

(5) $On^{\mathscr{M}[\mathcal{G}]} = On^{\mathscr{M}}$

(6) Si $\mathscr{M} \models \mathrm{AC}$, entonces $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \mathrm{AC}$

Extensión genérica de un modelo cualquiera (2/6)

Demo. Se escriben:

- $\mathbb{B}$ al punto de $\mathscr{M}$ definido por $\mathscr{M} \models \forall X\,(X \in \mathbb{B} \Leftrightarrow X \subseteq \mathbb{P} \wedge X^{\perp\perp} = X)$
- e al punto de $\mathscr{M}$ definido por $\mathscr{M} \models e : \mathbb{P} \to \mathbb{B} \wedge (\forall p \in \mathbb{P})\, e(p) = \{p\}^{\perp\perp}$
- $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} := (V^{\mathbb{B}})^{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}$ al modelo booleano interno inducido por $\mathbb{B}$
- $\check{a}$ ($\in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$) al $\mathbb{B}$-nombre estándar (en $\mathscr{M}$) asociado a cada punto $a \in \mathscr{M}$
- $\big((u_1, \ldots, u_n) \mapsto [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbf{B}}\big) \;:\; (\mathscr{M}^{\mathbb{B}})^n \to \mathbf{B}$ a la función de interpretación externa asociada a cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$
- $\tilde{\mathcal{G}}$ al subconjunto de $\mathbf{B}$ definido por $\tilde{\mathcal{G}} := \{X \in \mathbf{B} : \boldsymbol{X} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing\}$

Lema: El subconjunto $\tilde{\mathcal{G}} \subseteq \mathbf{B}$ es un ultrafiltro $\mathscr{M}$-genérico, es decir: un ultrafiltro de $\mathbf{B}$ tal que para todo $H \in M$, si $\boldsymbol{H} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, entonces $(\bigwedge H)^{\mathscr{M}} \in \tilde{\mathcal{G}}$

Demo del Lema. Ejercicio.

Se define el conjunto $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$ por $\mathscr{M}[\mathcal{G}] := \mathscr{M}^{\mathbb{B}}/\!\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia sobre $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$ definida por

$$u \sim v \qquad \text{sii} \qquad [\![u = v]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \qquad\qquad (u, v \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

y se dota $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$ de la estructura de modelo del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ en que los símbolos "$\cdot \in \cdot$" y "$\cdot \in \check{V}$" están interpretados por las relaciones $(\tilde{\in}) \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{G}]^2$ y $\check{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{G}]$ definidas por:

$$[u] \mathrel{\tilde{\in}} [v] \qquad \text{sii} \qquad [\![u \in v]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \qquad\qquad (u, v \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

$$[u] \in \check{\mathscr{M}} \qquad \text{sii} \qquad [\![u \in \check{V}]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \qquad\qquad (u \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

(...)

Extensión genérica de un modelo cualquiera (3/6)

Demo (continuación). Sea $h : \mathscr{M} \to \mathscr{M}[\mathcal{G}]$ la función definida por $h(a) := [\check{a}] \qquad (a \in \mathscr{M})$.
Dicha función es un encaje de $(\mathscr{M},\ \in^{\mathscr{M}})$ en $(\mathscr{M}[\mathcal{G}],\ \in^{\mathscr{M}[\mathcal{G}]})$, pues para todos $a_1, a_2 \in \mathscr{M}$:

$$\begin{array}{lllllll} a_1 = a_2 & \text{sii} & [\![\check{a}_1 = \check{a}_2]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} & \text{sii} & [\check{a}_1] = [\check{a}_2] & \text{sii} & h(a_1) = h(a_2) \\ a_1 \in^{\mathscr{M}} a_2 & \text{sii} & [\![\check{a}_1 \in \check{a}_2]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} & \text{sii} & [\check{a}_1] \in^{\mathscr{M}[\mathcal{G}]} [\check{a}_2] & \text{sii} & h(a_1) \in^{\mathscr{M}[\mathcal{G}]} h(a_2) \end{array}$$

Además tenemos que $h(\mathscr{M}) = \check{\mathscr{M}}$, pues para todo $u \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$:

$$\begin{array}{llll} [u] \in \check{\mathscr{M}} & \text{sii} & [\![u \in \check{V}]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} & \text{sii} \quad \bigvee_{a \in \mathscr{M}} [\![u = \check{a}]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \\ & \text{sii} & [\![u = \check{a}]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \ \text{para algún } a \in \mathscr{M} & \quad (\text{por } \mathscr{M}\text{-genericidad}) \\ & \text{sii} & [u] = h(a) \ \text{para algún } a \in \mathscr{M} & \text{sii} \quad [u] \in h(\mathscr{M}). \end{array}$$

En lo siguiente, se identifica $\mathscr{M}$ con $\check{\mathscr{M}} = h(\mathscr{M})$ $(\simeq \mathscr{M})$.

Proposición: Para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ con parámetros $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$:

$$\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi([u_1], \ldots, [u_n]) \qquad \text{sii} \qquad [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}}$$

Demo. Por inducción sobre la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, distinguiendo los siguientes casos:

- Si $\varphi(x_1, x_2) \equiv x_1 = x_2$, entonces para todos $u_1, u_2 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$:

$$\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models [u_1] = [u_2] \quad \text{sii} \quad [u_1] = [u_2] \quad \text{sii} \quad u_1 \sim u_2 \quad \text{sii} \quad [\![u_1 = u_2]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}}$$

- Si $\varphi(x_1, x_2) \equiv x_1 \in x_2$, entonces para todos $u_1, u_2 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$:

$$\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models [u_1] \in [u_2] \quad \text{sii} \quad [u_1] \mathrel{\tilde{\in}} [u_2] \quad \text{sii} \quad [\![u_1 \in u_2]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}}$$

(...)

Extensión genérica de un modelo cualquiera (4/6)

Demo de la Proposición (continuación).

- Si $\varphi(x_1) \equiv x_1 \in \check{V}$, entonces para todo $u_1 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$:

$$\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models [u_1] \in \check{V} \quad \text{sii} \quad [u_1] \in \check{\mathscr{M}} \quad \text{sii} \quad [\![u_1 \in \check{V}]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}}$$

- Si $\varphi(\vec{x}) \equiv \neg\varphi_1(\vec{x})$, entonces para todos $\vec{u} \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi([\vec{u}]) \quad & \text{sii} \quad \mathscr{M}[\mathcal{G}] \not\models \varphi_1([\vec{u}]) \quad \text{sii} \quad [\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \notin \tilde{\mathcal{G}} && \text{(por HI)} \\ & \text{sii} \quad \neg_{\mathbf{B}}[\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \quad \text{sii} \quad [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} && (\ldots) \end{aligned}$$

- Si $\varphi(\vec{x}) \equiv \varphi_1(\vec{x}) \vee \varphi_2(\vec{x})$, entonces para todos $\vec{u} \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi([\vec{u}]) \quad & \text{sii} \quad \mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi_1([\vec{u}]) \ \text{ o } \ \mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi_2([\vec{u}]) \\ & \text{sii} \quad [\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \ \text{ o } \ [\![\varphi_2(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} && \text{(por HI)} \\ & \text{sii} \quad [\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \vee_{\mathbf{B}} [\![\varphi_2(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \\ & \text{sii} \quad [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

- Si $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists x_0\, \varphi_0(x_0, \vec{x})$, entonces para todos $\vec{u} \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi([\vec{u}]) \quad & \text{sii} \quad \mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi_0([u_0], [\vec{u}]) \ \text{ para algún } u_0 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}} \\ & \text{sii} \quad [\![\varphi_0(u_0, \vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \ \text{ para algún } u_0 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}} && \text{(por HI)} \\ & \text{sii} \quad \bigvee_{u_0 \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}} [\![\varphi_0(u_0, \vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} && \text{(por } \mathscr{M}\text{-genericidad)} \\ & \text{sii} \quad [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} && \square \end{aligned}$$

Obs.: Aquí se trata el caso de $\exists/\forall$, usando el carácter $\mathscr{M}$-genérico del ultrafiltro $\tilde{\mathcal{G}} \subseteq \mathbb{B}$.
No se necesita suponer que $\mathscr{M} \models \mathrm{AC}$ o que el modelo booleano $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$ $(\subseteq \mathscr{M})$ está lleno.

Extensión genérica de un modelo cualquiera (5/6)

Demo del Teorema (continuación). Usando la Prop. anterior:

(1) Para cada teorema φ de $\mathsf{ZF}_{\check{V}}$, tenemos que $[\![\varphi]\!]^{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}}$, luego $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi$.

(2) Tenemos que $[\![(\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V}]\!]^{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}}$, entonces $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V}$.

(3) Sea $G := [g]$, con $g := \{(\check{p}, e(p)) : p \in \mathbb{P}\}^{\mathscr{M}} \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$ (nombre genérico). Para todo $u \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathscr{M}[\mathcal{G}] \models [u] \in G \quad &\text{sii} \quad [\![u \in g]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \quad \text{sii} \quad \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \big(\boldsymbol{e}(p) \wedge [\![u = \check{p}]\!]^{\mathbf{B}}\big) \in \tilde{\mathcal{G}} \\ &\text{sii} \quad \big(\boldsymbol{e}(p) \wedge [\![u = \check{p}]\!]^{\mathbf{B}}\big) \in \tilde{\mathcal{G}} \ \text{ para algún } p \in \tilde{\mathcal{G}} \qquad (\text{por } \mathscr{M}\text{-genericidad}) \\ &\text{sii} \quad \boldsymbol{e}(p) \in \tilde{\mathcal{G}} \ \text{ y } \ [\![u = \check{p}]\!]^{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}} \ \text{ para algún } p \in \tilde{\mathcal{G}} \\ &\text{sii} \quad p \in \tilde{\mathcal{G}} \ \text{ y } \ [u] = h(p) \ \text{ para algún } p \in \tilde{\mathcal{G}} \quad \text{sii} \quad [u] \in h(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

y por lo tanto $\boldsymbol{G} = h(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ (a través de la identificación $\mathscr{M} = \check{\mathscr{M}}$).

Obs.: Combinando la igualdad anterior (i.e. $\boldsymbol{G} = \mathcal{G}$) con las propiedades del filtro $\mathscr{M}$-genérico (externo) $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{P}$, se deduce que: $\mathscr{M}[G] \models G \subseteq \mathbb{P}$ filtro $\check{V}$-genérico.

(4) Véase siguiente diapositiva.

(5) Tenemos que $[\![On \subseteq \check{V}]\!]^{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}}$, y luego $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models On \subseteq \check{V}$, es decir $On^{\mathscr{M}[\mathcal{G}]} \subseteq \mathscr{M}$ (a través de la identificación $\mathscr{M} = \check{\mathscr{M}}$), y por lo tanto $On^{\mathscr{M}[\mathcal{G}]} = On^{\mathscr{M}}$.

(6) Si $\mathscr{M} \models$ AC entonces $[\![\mathrm{AC}]\!]^{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}} \in \tilde{\mathcal{G}}$, y luego $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models$ AC. (...)

Extensión genérica de un modelo cualquiera (6/6)

Demo del Teorema (continuación y fin). Sólo queda probar el carácter minimal de $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$ (4). Para ello, se considera la teoría $\mathscr{T}$ sobre el lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V},\mathbb{P},\leq_{\mathbb{P}},G}$ (donde $\mathbb{P}$, $\leq_{\mathbb{P}}$ y G son nuevos símbolos de constantes) cuyos axiomas son los axiomas de $\mathsf{ZF}_{\check{V}}$, más las tres fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \quad &:\equiv \quad \check{V} \text{ transitiva } \wedge \ On \subseteq \check{V} \\
\varphi_2 \quad &:\equiv \quad (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}) \in \check{V} \text{ conjunto ordenado no vacío} \\
\varphi_3 \quad &:\equiv \quad G \subseteq \mathbb{P} \text{ filtro } \check{V}\text{-genérico}
\end{aligned}$$

En la teoría $\mathscr{T}$ se construye a partir de $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ el álgebra booleana $\mathbb{B} \in \check{V}$ así como el modelo booleano interno $\check{V}^{\mathbb{B}} \subseteq \check{V}$ del modo usual, y se considera la funcional $(u \mapsto u^G) : \check{V}^{\mathbb{B}} \to V$ definida por recursión sobre $u \in \check{V}^{\mathbb{B}}$ por: $u^G := \{v^G : v \in \mathrm{dom}(u) \wedge u(v) \cap G \neq \varnothing\}$.

Es claro por (1)–(3) que $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$ es un modelo de la teoría $\mathscr{T}$ (interpretando los símbolos $\mathbb{P}$, $\leq_{\mathbb{P}}$ y G por los puntos $G, \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \in \mathscr{M}[\mathcal{G}]$). El el próximo capítulo (*Forcing axiomático*), probaremos además que: $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \forall x\, (\exists u \in \check{V}^{\mathbb{B}})\, x = u^G$ $(*)$ (admitido aquí).

(4) Se considera ahora un submodelo $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{G}]$ definido a partir de una clase $C_{\vec{p}} \equiv C(x, \vec{p})$ (de $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$) con parámetros $\vec{p} \in \mathscr{M}[\mathcal{G}]$, en el sentido en que $a \in \mathscr{N}$ sii $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models a \in C_{\vec{p}}$ para todo $a \in \mathscr{M}[\mathcal{G}]$, y se supone que $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models C_{\vec{p}}$ transitiva, $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \check{V} \subseteq C_{\vec{p}} \wedge G \in C_{\vec{p}}$ y $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi$ para cada teorema de ZF.

A partir de las hipótesis anteriores, se demuestra que $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models (\forall u \in \check{V}^{\mathbb{B}})\, (u^G \in C_{\vec{p}})$ (razonando por inducción sobre $u \in \check{V}^{\mathbb{B}}$ en la teoría de $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$), y por $(*)$, se deduce que $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \forall x\, (x \in C_{\vec{p}})$, es decir: $\mathscr{N} = \mathscr{M}[\mathcal{G}]$. $\square$

Conclusión

El teorema de la extensión genérica se extiende a un modelo de base $\mathscr{M} \models \mathrm{ZF}$ cualquiera (no necesariamente transitivo o bien fundado)

- Como en el caso transitivo, el filtro $\mathscr{M}$-genérico $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{P}$ existe al menos cuando $\mathscr{M}$ es numerable (Rasiowa-Sikorski)
- Construcción de la extensión genérica $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \supseteq \mathscr{M}$ por cociente (en la metateoría) y no por reificación (por $\in$-recursión)
  - Necesita una metateoría más débil (comprensión + cociente)
- Como en el caso transitivo, la extensión genérica $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \supseteq \mathscr{M}$ es única, pero sólo a menos de isomorfismo
  (Consecuencia de que $\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \forall x\,(\exists u \in \check{V}^{\mathbb{B}})\,(x = u^G)$ — Ejercicio)

Al final, siempre se razona de mismo modo en $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$, cuyas propiedades se derivan de las de $\mathscr{M}$ mediante la relación de forcing $p \Vdash \varphi$

- Observar que adentro de $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$, el modelo de base $\mathscr{M}$ (escrito $\check{V}$) sigue siendo un modelo transitivo de ZF (de modo interno)

Resumen

	Caso $\mathscr{M}$ transitivo	**Caso general**
Estátus de $\mathscr{M}$	$\mathscr{M}$ conjunto o clase propia en ZF(C) (= metateoría)	$\mathscr{M}$ conjunto en el sentido de la metateoría
¿$\mathscr{M}$ bien fundado?	Sí (pues transitivo)	No necesariamente
¿Existencia de $\mathcal{G}$?	Al menos cuando $\mathscr{M}$ es numerable (Rasiowa-Sikorski)	
¿$\mathscr{M}[\mathcal{G}]$ bien fundado?	Sí (pues transitivo)	No necesariamente
¿Unicidad de $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$?	Sí	Sí, a menos de iso
Construcción de $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$	Imagen de la funcional $(u \mapsto u^G) : \mathscr{M}^{\mathbb{B}} \to V$	Cociente de $\mathscr{M}^{\mathbb{B}}$ por ultrafiltro $\mathscr{M}$-genérico

En ambos casos, las propiedades de $\mathscr{M}[\mathcal{G}]$ se deducen de las de $\mathscr{M}$ por:

$$\mathscr{M}[\mathcal{G}] \models \varphi(u_1^G, \ldots, u_n^G) \qquad \text{sii} \qquad (\exists p \in \mathcal{G})\ p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n)$$

(con $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}} \subseteq \mathscr{M}$)