Una introducción al forcing

5. Forcing axiomático

Alexandre Miquel

octubre de 2024

Motivación (1/2)

- El forcing está presentado tradicionalmente como un método de transformación de modelos (transitivos):

Input:
- un modelo transitivo $M \models$ ZF con un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}) \in M$
- un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$

Output:
- la extensión genérica $M[G]$ (generada por M y G)
- la relación de forcing $p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n)$, tal que: $M[G] \models \varphi(u_1^G, \ldots, u_n^G) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \in G)\ p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n)$

(Pero el método se generaliza à los modelos $\mathscr{M} \models$ ZF cualesquiera)

- **Problema:** ¿Cómo razonar en $M[G]$?
  - ¿Cómo utilizar el carácter minimal de $M[G]$?
  - ¿Cómo utilizar la relación de forcing $p \Vdash \varphi(u_1, \ldots, u_n)$?
  - ¿Cómo deducir las propiedades de $M[G]$ a partir de las de M?

Motivación (2/2)

- **Idea:** Presentar el forcing como transformación de teorías:

  Input:
  - una extensión $\mathscr{T}$ de ZF
    que describe el universo inicial $\mathscr{M}$
    así como un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ (en $\mathscr{M}$)

  Output:
  - otra extensión $\mathscr{T}^*$ de ZF
    que describe la extensión genérica $\mathscr{M}[G]$ obtenida
    a partir de un filtro $\check{V}$-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ cualquiera

- **Obs.:** El lenguaje de $\mathscr{T}^*$ (que incluye el lenguaje de $\mathscr{T}$) introduce:
  – un símbolo de predicado $\check{V}(\_)$ que representa el universo inicial
  – un símbolo de constante G (ahora parte del output) que representa un filtro $\check{V}$-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$ cualquiera (el "filtro genérico genérico")

Teorema fundamental (Conservatividad en $\check{V}$)

$\mathscr{T} \vdash \varphi$ sii $\mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}}$ para toda sentencia φ de $\mathscr{T}$

Corolario: Las teorías $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}^*$ son equiconsistentes

Lenguajes de 1^er^ orden (recordatorio)

Definición (Lenguaje de 1er orden)

- Un lenguaje (de 1er orden) está definido a partir de:
  - un conjunto de símbolos de función (notación: f, g, h, etc.)
  - un conjunto de símbolos de predicado (notación: p, q, r, etc.)

  en que cada símbolo s (función/predicado) tiene una aridad $\sharp s$ $\quad (\in \mathbb{N})$

- Dichos símbolos definen los términos (notación: t, u, v, etc.) y las fórmulas (notación: φ, ψ, χ, etc.) del lenguaje considerado:

Términos $\quad t, u \;::=\; x \;\mid\; f(t_1, \ldots, t_k) \qquad (\sharp f = k)$

Fórmulas $\quad \varphi, \psi \;::=\; t_1 = t_2 \;\mid\; p(t_1, \ldots, t_k) \qquad (\sharp p = k)$

$$\mid\; \neg\varphi \;\mid\; \varphi \vee \psi \;\mid\; \varphi \wedge \psi$$

$$\mid\; \varphi \Rightarrow \psi \;\mid\; \forall x\, \varphi \;\mid\; \exists x\, \varphi$$

Teorías de 1^{er} orden (recordatorio)

Definición (Teoría de 1^{er} orden)

- Una teoría $\mathscr{T}$ (de 1^{er} orden) está definida a partir de:
  - su lenguaje $\mathscr{L}$ (de 1^{er} orden)
  - sus axiomas (= sentencias de $\mathscr{L}$)
- Una sentencia φ de $\mathscr{L}$ es un teorema de $\mathscr{T}$ cuando es derivable (en NK o LK) a partir de los axiomas de $\mathscr{T}$.

  Notación: $\mathscr{T} \vdash \varphi$ ("$\mathscr{T}$ demuestra φ")

- Una teoría $\mathscr{T}$ sobre un lenguaje $\mathscr{L}$ es consistente cuando no existe ningún $\varphi \in \mathscr{L}$ tal que $\mathscr{T} \vdash \varphi$ y $\mathscr{T} \vdash \neg\varphi$
- De modo equivalente, $\mathscr{T}$ es consistente cuando existe al menos una sentencia $\varphi \in \mathscr{L}$ tal que $\mathscr{T} \nvdash \varphi$

Subteorías y extensiones (recordatorio)

Dadas teorías $\mathscr{T}$ (sobre $\mathscr{L}$) y $\mathscr{T}'$ (sobre $\mathscr{L}'$):

Definición (Subteorías, extensiones)

$\mathscr{T}$ es una subteoría de $\mathscr{T}'$ (o $\mathscr{T}'$ es una extensión de $\mathscr{T}$) cuando:

(1) $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$ (inclusión de lenguajes)

(2) $\mathscr{T} \vdash \varphi$ implica $\mathscr{T}' \vdash \varphi$ para toda sentencia $\varphi \in \mathscr{L}$

Notación: $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ (o $\mathscr{T}' \supseteq \mathscr{T}$)

Obs.: De modo equivalente, se puede reemplazar (2) por:

(2′) $\mathscr{T}' \vdash \varphi$ para todo axioma φ de $\mathscr{T}$

Definición (Extensiones conservativas)

$\mathscr{T}'$ es una extensión conservativa de $\mathscr{T}$ cuando:

(1) $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$ (inclusión de lenguajes)

(2) $\mathscr{T} \vdash \varphi$ sii $\mathscr{T}' \vdash \varphi$ para toda sentencia $\varphi \in \mathscr{L}$

Extensiones de Henkin (recordatorio)

Definición (Extensión de Henkin)

Sea $\mathscr{T}$ una teoría, y $\varphi(x)$ una fórmula tal que $\mathscr{T} \vdash \exists x\, \varphi(x)$ $^{(*)}$

La extensión de Henkin de $\mathscr{T}$ con respecto al teorema $\exists x\, \varphi(x)$ es la teoría de 1^er^ orden:

- cuyo lenguaje es el lenguaje de $\mathscr{T}$ enriquecido con un símbolo de constante c fresco
- cuyos axiomas son los de $\mathscr{T}$, más el axioma $\varphi(c)$

$(*)$ No se necesita que x sea único

- **Ejemplo:** La extensión de Henkin de ZF con respecto al teorema

  "Existe un cuerpo totalmente ordenado completo"

  es ZF extendido con un nuevo símbolo de constante $\mathbb{R}$ y con el axioma: "$\mathbb{R}$ *es un cuerpo totalmente ordenado completo*"

Proposición: Toda extensión de Henkin es conservativa

Demo. Ejercicio

Extensiones definicionales (1/4)

- Otro ejemplo importante de extensión conservativa:

Definición (Extensión definicional)

Sea $\mathscr{T}$ una teoría (sobre un lenguaje $\mathscr{L}$). Una extensión $\mathscr{T}' \supseteq \mathscr{T}$ (sobre un lenguaje $\mathscr{L}'$) es definicional cuando existe una traducción

$$(\varphi(\vec{x}) \mapsto \varphi^*(\vec{x})) \ : \ \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$$

que asocia a cada fórmula $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{L}'$ una fórmula $\varphi^*(\vec{x}) \in \mathscr{L}$ con las mismas variables libres $\vec{x}$, de tal modo que:

(1) $\mathscr{T}' \ \vdash \ \forall\vec{x}\,(\varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \varphi^*(\vec{x}))$ para cada fórmula $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{L}'$

(2) Si $\mathscr{T}' \vdash \varphi$ entonces $\mathscr{T} \vdash \varphi$ para cada sentencia $\varphi \in \mathscr{L}$
(i.e. $\mathscr{T}'$ es una extensión conservativa de $\mathscr{T}$)

- De modo equivalente, se puede reemplazar (2) por:

(2.1) Si $\mathscr{T}' \vdash \varphi$ entonces $\mathscr{T} \vdash \varphi^*$ para cada sentencia $\varphi \in \mathscr{L}'$

(2.2) $\mathscr{T} \ \vdash \ \forall\vec{x}\,(\varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \varphi^*(\vec{x}))$ para cada fórmula $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{L}$

Ejercicio: Probar la equivalencia entre ambas definiciones

Extensiones definicionales (2/4)

- Se verifica fácilmente (ejercicio) que la traducción $\varphi(\vec{x}) \mapsto \varphi^*(\vec{x})$ cumple la siguientes equivalencias en la teoría $\mathscr{T}'$:

$$\begin{array}{rcl} (\neg\varphi(\vec{x}))^* & \Leftrightarrow & \neg\varphi^*(\vec{x}) \\ (\varphi(\vec{x}) \vee \psi(\vec{x}))^* & \Leftrightarrow & \varphi^*(\vec{x}) \vee \psi^*(\vec{x}) \\ (\exists x_0\, \varphi(x_0, \vec{x}))^* & \Leftrightarrow & \exists x_0\, \varphi^*(x_0, \vec{x}) \end{array} \qquad \text{(etc.)}$$

  - Se dice que el mapa $\varphi(\vec{x}) \mapsto \varphi^*(\vec{x})$ es una traducción lógica

- De hecho, siempre se puede diseñar (ejercicio) la traducción lógica $(\varphi(\vec{x}) \mapsto \varphi^*(\vec{x})) \ : \ \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ de tal modo que

$$\begin{array}{rcll} \varphi^*(\vec{x}) & \equiv & \varphi(\vec{x}) & \text{si } \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{L} \\ (\neg\varphi(\vec{x}))^* & \equiv & \neg\varphi^*(\vec{x}) & \\ (\varphi(\vec{x}) \vee \psi(\vec{x}))^* & \equiv & \varphi^*(\vec{x}) \vee \psi^*(\vec{x}) & \\ (\exists x_0\, \varphi(x_0, \vec{x}))^* & \equiv & \exists x_0\, \varphi^*(x_0, \vec{x}) & \end{array} \qquad \text{(etc.)}$$

Extensiones definicionales (3/4)

- Los dos ejemplos elementales de extensión definicional son los siguientes:

Proposición (Definición de predicado)

Sea $\mathscr{T}$ una teoría y $\psi(\vec{x})$ una fórmula del lenguaje de $\mathscr{T}$.

La extensión de $\mathscr{T}$ con un símbolo de predicado p ($\sharp p = |\vec{x}|$) definido por el axioma $\forall \vec{x}\ (p(\vec{x}) \Leftrightarrow \psi(\vec{x}))$ es una extensión definicional de $\mathscr{T}$

Demo. Ejercicio

Proposición (Definición de función)

Sea $\mathscr{T}$ una teoría y $\psi(\vec{x}, y)$ una fórmula del lenguaje de $\mathscr{T}$ tal que

$$\mathscr{T} \vdash \forall \vec{x}\ \exists ! y\ \psi(\vec{x}, y).$$

La extensión de $\mathscr{T}$ con un símbolo de función f ($\sharp f = |\vec{x}|$) definido por el axioma $\forall \vec{x}\ \psi(\vec{x}, f(\vec{x}))$ es una extensión definicional de $\mathscr{T}$

Demo. Ejercicio

Extensiones definicionales (4/4)

- De hecho, cualquier extensión definicional se puede descomponer como una sucesión (finita o transfinita) de extensiones definicionales elementales (i.e. por una definición de predicado o de función):

Teorema (Caracterización de las extensiones definicionales) (con AC)

Sea $\mathscr{T}$ una teoría de 1$^{\text{er}}$ orden.

Una teoría $\mathscr{T}'$ es una extensión definicional de $\mathscr{T}$ si y sólo si existe un ordinal γ y una sucesión creciente de teorías $(\mathscr{T}_\alpha)_{\alpha\leq\gamma}$ tales que:

(1) $\mathscr{T}_0 = \mathscr{T}$ y $\mathscr{T}_\gamma = \mathscr{T}'$

(2) Para todo $\alpha < \gamma$, la teoría $\mathscr{T}_{\alpha+1}$ es una extensión definicional elemental de $\mathscr{T}_\alpha$ (i.e. por una definición de predicado o de función)

(3) Para todo ordinal límite $\lambda \leq \gamma$: $\mathscr{T}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathscr{T}_\alpha$.

Demo. Ejercicio

Extensiones estándar de ZF (1/2)

Definición (Extensiones estándar de ZF)

Una extensión $\mathscr{T} \supseteq$ ZF es estándar cuando los axiomas de comprensión y de reemplazo se cumplen en $\mathscr{T}$ para todas las fórmulas del lenguaje de $\mathscr{T}$ (y no sólo para las fórmulas del lenguaje de ZF). Las extensiones estándar de ZF también se llaman teorías de conjuntos estándar

- Es claro que toda extensión puramente axiomática de ZF (i.e. sin extender el lenguaje de ZF) es estándar. Ejemplos típicos:

$$\mathsf{ZFC}\ (= \mathsf{ZF} + \mathsf{AC}), \qquad \mathsf{ZFC} + V = L, \qquad \mathsf{ZFC} + \mathsf{H(G)C}$$

- El ejemplo típico de extensión *no estándar* es la Internal Set Theory (IST) de Nelson ('77), que introduce un símbolo de predicado $\mathrm{st}(x)$ prohibido en los axiomas de comprensión y de reemplazo

Extensiones estándar de ZF (2/2)

Proposición (Preservación del carácter estándar)

Toda extensión de Henkin o definicional de una extensión estándar de ZF es una extensión estándar de ZF

Demo. Sean $\mathscr{T}$ una extensión estándar de ZF, y $\mathscr{T}'$ una teoría que es una extensión de Henkin de $\mathscr{T}$ o una extensión definicional de $\mathscr{T}$. Sólo tratamos el caso de la comprensíon aquí; el caso del reemplazo se trata de modo análogo. Dada una fórmula $\varphi(x,\vec{z})$ cualquiera del lenguaje de $\mathscr{T}'$, se trata de mostrar que el axioma de comprensión $C_\varphi :\equiv \forall\vec{z}\,\forall a\,\exists b\,\forall x\,(x \in b \Leftrightarrow x \in a \land \varphi(x,\vec{z}))$ asociado a $\varphi(x,\vec{z})$ es derivable en $\mathscr{T}'$. Para ello, se distinguen dos casos:

- $\mathscr{T}'$ es una extensión de Henkin que introduce un símbolo de constante c.
  Sea $\varphi_0(x,y,\vec{z})$ la fórmula del lenguaje de $\mathscr{T}$ obtenida reemplazando la constante c por una variable y fresca, de tal modo que $\varphi(x,\vec{z}) \equiv \varphi_0(x,c,\vec{z})$. Como $\mathscr{T}$ es una extensión estándar de ZF, la fórmula $C_{\varphi_0} :\equiv \forall y\,\forall\vec{z}\,\forall a\,\exists b\,\forall x\,(x \in b \Leftrightarrow x \in a \land \varphi_0(x,y,\vec{z}))$ es derivable en $\mathscr{T}$, y luego en $\mathscr{T}'$ por extensión. Pero como $\mathscr{T}' \vdash C_{\varphi_0} \Rightarrow C_\varphi$ (instanciando la variable y por la constante c), se concluye que $\mathscr{T}' \vdash C_\varphi$.
- $\mathscr{T}'$ es una extensión definicional, cuyo lenguaje se reduce al lenguaje de $\mathscr{T}$ mediante una traducción lógica $(\psi \mapsto \psi^*) : \mathscr{L}_{\mathscr{T}'} \to \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$. Como $\mathscr{T}$ es una extensión estándar de ZF, la fórmula $C_{\varphi^*} :\equiv \forall\vec{z}\,\forall a\,\exists b\,\forall x\,(x \in b \Leftrightarrow x \in a \land \varphi^*(x,\vec{z}))$ es derivable en $\mathscr{T}$, y luego en $\mathscr{T}'$ por extensión. Pero como $\mathscr{T}' \vdash \forall x\,\forall\vec{z}\,(\varphi(x,\vec{z}) \Leftrightarrow \varphi^*(x,\vec{z}))$, se deduce que $\mathscr{T}' \vdash C_\varphi \Leftrightarrow C_{\varphi^*}$, y por lo tanto $\mathscr{T}' \vdash C_\varphi$. □

Plan

1. Introducción
2. Transformación de teorías: $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}^*$
3. Teoremas en $\mathscr{T}^*$
4. Ejemplo: forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ $(n \geq 1)$
5. Conservatividad y completitud

Plan

1. Introducción
2. Transformación de teorías: $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}^*$
3. Teoremas en $\mathscr{T}^*$
4. Ejemplo: forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ $(n \geq 1)$
5. Conservatividad y completitud

La teoría de base $\mathscr{T}$

La transformación de forcing se aplica a una teoría de base $\mathscr{T}$

Definición (Teoría de base para el forcing)

Una teoría de base es una extensión estándar $\mathscr{T} \supseteq$ ZF tal que:

(1) El lenguaje de $\mathscr{T}$:

- no contiene ningún símbolo de función de aridad ≥ 1
  (pero sí puede tener símbolos de constante y/o de predicado además de $\in$)
- distingue dos símbolos de constante $\mathbb{P}$, $\leq_{\mathbb{P}}$ tales que:

(2) $\mathscr{T} \vdash (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ es un conjunto ordenado no vacío

- En la práctica, la teoría de base $\mathscr{T}$ está construida a partir de ZF(C) (o a partir de una extensión bien conocida de ZF), skolemizando el teorema que expresa la existencia del conjunto de forcing deseado:

$$\begin{array}{rclll} \mathscr{T} & := & \text{ZF} & (+ & \text{DC/AC/H(G)C}/V = L/\cdots) \\ & & & + & \langle \textit{axioma que define } \mathbb{P} \rangle \\ & & & + & \langle \textit{axioma que define } \leq_{\mathbb{P}} \rangle \end{array}$$

Ejemplos de teorías de base

- Para forzar $\neg$HC:

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{T} & := & \mathsf{ZFC} \;+\; \mathbb{P} = \mathsf{Fin}(\aleph_2 \times \omega, 2) \\ & & \quad + \; (\leq_{\mathbb{P}}) = \{(p,q) \in \mathbb{P}^2 : p \supseteq q\} \end{array}$$

En la extensión genérica: $\mathscr{T}^* \vdash \neg\mathsf{HC}$

- Para forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_{42}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{T} & := & \mathsf{ZFC} + \mathsf{HGC} \;+\; \mathbb{P} = \mathsf{Fin}(\aleph_{42} \times \omega, 2) \\ & & \quad + \; (\leq_{\mathbb{P}}) = \{(p,q) \in \mathbb{P}^2 : p \supseteq q\} \end{array}$$

En la extensión genérica: $\mathscr{T}^* \vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_{42}$

- Para forzar un buen orden sobre $\mathfrak{P}(\omega)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{T} & := & \mathsf{ZF} + \mathsf{DC} \;+\; \mathbb{P} = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathsf{Iny}(\alpha, \mathfrak{P}(\omega)) \\ & & \quad + \; (\leq_{\mathbb{P}}) = \{(p,q) \in \mathbb{P}^2 : p \supseteq q\} \end{array}$$

En la extensión genérica: $\mathscr{T}^* \vdash \exists h : \aleph_1 \to \mathfrak{P}(\omega)$ biyectiva

La extensión genérica $\mathscr{T}^*$

La extensión genérica $\mathscr{T}^*$ es la teoría construida de modo algorítmico a partir de la teoría de base $\mathscr{T}$ del siguiente modo:

- El lenguaje de $\mathscr{T}^*$ es el lenguaje de $\mathscr{T}$ enriquecido con:
  - Un símbolo de predicado unario $\check{V}(\_)$, también escrito $\_ \in \check{V}$ (que representa el universo inicial como una clase adentro del universo expandido)
  - Un símbolo de constante G (que representa un filtro $\check{V}$-genérico $\subseteq \mathbb{P}$)
- Los axiomas de $\mathscr{T}^*$ se dividen entre 5 grupos:
  1. Los axiomas de ZF (extendidos al lenguaje de $\mathscr{T}^*$)
  2. Los axiomas de transitividad
  3. Los axiomas de $\mathscr{T}$ relativizados a $\check{V}$
  4. El axioma de genericidad
  5. El axioma del nombre

Teorema fundamental: $\mathscr{T} \vdash \varphi$ sii $\mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}}$ $(\varphi \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}})$

Corolario: Las teorías $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}^*$ son equiconsistentes

1. Los axiomas de ZF (extendidos al lenguaje de $\mathscr{T}^*$)

1. Axiomas de ZF (extendidos al lenguaje de $\mathscr{T}^*$)

$\mathscr{T}^* \vdash$ extensionalidad, pares, unión, potencia, infinitud, fundación

$\mathscr{T}^* \vdash$ comprensión$_\varphi$, reemplazo$_\psi$ para cada fórmula $\varphi, \psi \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*}$

- Por construcción, $\mathscr{T}^*$ es una extensión estándar de ZF
- Los símbolos extra $\check{V}(\_)$ y G se pueden usar en los axiomas de comprensión y de reemplazo. Por ejemplo:

$$A \cap \check{V} \;:=\; \{x \in A : x \in \check{V}\}$$

(La intersección de un conjunto A con la clase $\check{V}$ es un conjunto)

- **Notación:** $x \subseteq \check{V} \;:=\; \forall y\,(y \in x \Rightarrow y \in \check{V})$

Obs.: Como siempre, usaremos símbolos de función informales ("notaciones") en la teoría de base $\mathscr{T}$ así como en la extensión genérica $\mathscr{T}^*$. Dichos símbolos de función no pertenencen al lenguaje oficial de $\mathscr{T}$ o de $\mathscr{T}^*$, sino al lenguaje "vernáculo" usado para trabajar en $\mathscr{T}$ o en $\mathscr{T}^*$ (i.e. extensión definicional)

2. Los axiomas de transitividad

2. Axiomas de transitividad

$\mathscr{T}^* \vdash \forall x\,(x \in \check{V} \Rightarrow x \subseteq \check{V})$ (la clase $\check{V}$ es transitiva)

$\mathscr{T}^* \vdash c \in \check{V}$ para cada símbolo de constante $c \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$, inclusive los dos símbolos $\mathbb{P}$ y $\leq_{\mathbb{P}}$

$\mathscr{T}^* \vdash \forall \vec{x}\,(R(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} \in \check{V})$ para cada símbolo de predicado $R \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$ distinto de "$=$" y de "$\in$"

- Los axiomas de transitividad implican que:
  - La clase $\check{V}$ es transitiva
  - La clase $\check{V}$ contiene todas las constantes de la teoría de base $\mathscr{T}$, inclusive $\mathbb{P}$ y $\leq_{\mathbb{P}}$ (por otro lado, tenemos que $G \notin \check{V}$ en general)
  - La clase $\check{V}$ es no vacía, pues $\mathbb{P} \in \check{V}$

- También se añade el axioma $\forall \vec{x}\,(R(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} \in \check{V})$ (i.e. $R \subseteq \check{V}^n$) para cada símbolo de predicado $R \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$ (distinto de "$=$" y de "$\in$")

3. Los axiomas de $\mathscr{T}$ relativizados a $\check{V}$

- Por el grupo de axiomas **1**, el universo expandido (descrito por $\mathscr{T}^*$) está regido por los axiomas de ZF

  (Pero los otros axiomas de $\mathscr{T}$ no tienen que cumplirse en $\mathscr{T}^*$: $\mathscr{T} \nsubseteq \mathscr{T}^*$)

- El grupo de axiomas **3** expresa que la clase transitiva $\check{V}$ está regida por los axiomas de la teoría de base $\mathscr{T}$:

3. Axiomas de $\mathscr{T}$ relativizados a $\check{V}$

$\mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}}$ para cada axioma φ de la teoría de base $\mathscr{T}$

- A partir de los grupos **2** y **3**, se deduce el:

Principio de importación: Si $\mathscr{T} \vdash \varphi$, entonces $\mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}}$

- Se dice que la clase $\check{V}$ es un modelo transitivo de $\mathscr{T}$ adentro de $\mathscr{T}^*$ (en particular, $\check{V}$ cumple todos los teoremas de ZF $\subseteq \mathscr{T}$)

- **Obs.:** Probaremos más adelante que $\mathscr{T} \vdash \varphi$ sii $\mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}}$

4. El axioma de genericidad

4. Axioma de genericidad

$\mathscr{T}^* \vdash G$ es un filtro $\check{V}$-genérico de $\mathbb{P}$

- G es un filtro de $\mathbb{P}$:

  (1) $G \subseteq \mathbb{P} \ \wedge \ G \neq \varnothing$ (subconjunto no vacío de $\mathbb{P}$)

  (2) $(\forall p, q \in \mathbb{P})\,(p \in G \wedge p \leq q \Rightarrow q \in G)$ (clausura superior)

  (3) $(\forall p, q \in G)\,(\exists r \in G)\,(r \leq p \wedge r \leq q)$ (compatibilidad interna)

  Intuición: Los elementos de G son compatibles de a dos, en el sentido del orden definicional (Scott): $p \sqsubseteq q \ := \ p \geq q$

- G es $\check{V}$-genérico:

  (4) $(\forall D \subseteq P)\,(D \text{ denso } \wedge \ D \in \check{V} \ \Rightarrow \ D \cap G \neq \varnothing)$

  Recordatorio: D denso $\equiv \ (\forall p \in P)\,(\exists q \in D)\,(q \leq p)$

  Topología implícita: abierto $=$ subconjunto de $\mathbb{P}$ cerrado inferiormente

5. El axioma del nombre

Nos interesamos aquí en los conjuntos $A \subseteq \check{V}$

(conjuntos potencialmente nuevos con contenido antiguo)

- Por ejemplo:
  - $x \subseteq \check{V}$ para todo $x \in \check{V}$ (por transitividad)
  - $G \subseteq \check{V}$ (aunque $G \notin \check{V}$ en general)
- ¿Cómo describir los conjuntos $A \subseteq \check{V}$ mediante elementos de $\check{V}$?

Definición ($\mathbb{P}$-nombre para un conjunto $A \subseteq \check{V}$)

Un $\mathbb{P}$-nombre para un conjunto $A \subseteq \check{V}$ es un conjunto $N \in \check{V}$ tal que:

$$\forall x \, (x \in A \iff (\exists p \in G) \, (x, p) \in N)$$

Obs.: El $\mathbb{P}$-nombre N $(\in \check{V})$ caracteriza A $(\subseteq \check{V})$, pero no es único en general

5. Axioma del nombre

$$\mathscr{T}^* \vdash (\forall A \subseteq \check{V}) \, (\exists N \in \check{V}) \, \forall x \, (x \in A \iff (\exists p \in G) \, (x, p) \in N)$$

(Cada conjunto $A \subseteq \check{V}$ tiene un $\mathbb{P}$-nombre $N \in \check{V}$)

Los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (resumen)

1. Axiomas de ZF (extendidos al lenguaje de $\mathscr{T}^*$)
   - Extensionalidad, pares, unión, potencia, infinitud y fundación
   - Comprensión y reemplazo para todas las fórmulas de $\mathscr{T}^*$
2. Axiomas de transitividad
   - $(\forall x \in \check{V})\ x \subseteq \check{V}$
   - $c \in \check{V}$ para cada constante $c \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$
   - $\forall \vec{x}\,(R(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} \in \check{V})$ para cada predicado $R \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}} - \{=, \in\}$
3. Axiomas de $\mathscr{T}$ relativizados a $\check{V}$
   - $\varphi^{\check{V}}$ para cada axioma φ de la teoría $\mathscr{T}$
4. Axioma de genericidad
   - $G \subseteq \mathbb{P} \ \wedge \ G \neq \varnothing \ \wedge$
     $(\forall p, q \in \mathbb{P})(p \in G \wedge p \leq q \Rightarrow q \in G) \ \wedge$
     $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q) \ \wedge$
     $(\forall D \subseteq \mathbb{P})(D \text{ denso} \wedge D \in \check{V} \Rightarrow D \cap G \neq \varnothing)$
5. Axioma del nombre
   - $(\forall A \subseteq \check{V})\,(\exists N \in \check{V})\,\forall x\,(x \in A \ \Leftrightarrow\ (\exists p \in G)\,(x, p) \in N)$

Observaciones

- El lenguaje de $\mathscr{T}^*$ agrega 2 símbolos al lenguaje de $\mathscr{T}$, luego:
  - Si $\mathscr{T}$ tiene un vocabulario finito (resp. numerable), entonces $\mathscr{T}^*$ tiene un vocabulario finito (resp. numerable)
  - Si $\mathscr{T}$ tiene un lenguaje numerable (resp. de cardinal κ), entonces $\mathscr{T}^*$ tiene un lenguaje numerable (resp. de cardinal κ)
- Además:

Proposición

Si el conjunto de axiomas de $\mathscr{T}$ es recursivo (resp. semirrecursivo)$^{(*)}$, entonces el conjunto de axiomas de $\mathscr{T}^*$ es recursivo (resp. semirrecursivo)

$(*)$ Semi recursivo = recursivamente enumerable

- Veremos más adelante que:
  - $\mathscr{T}$ consistente $\Leftrightarrow$ $\mathscr{T}^*$ consistente, pero:
  - $\mathscr{T}$ completa $\not\Rightarrow$ $\mathscr{T}^*$ completa

    (Razón: los axiomas de $\mathscr{T}^*$ no especifican qué elementos de $\mathbb{P}$ pertenecen a G)

Plan

1. Introducción
2. Transformación de teorías: $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}^*$
3. Teoremas en $\mathscr{T}^*$
4. Ejemplo: forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ $(n \geq 1)$
5. Conservatividad y completitud

Filtros genéricos triviales

A partir de ahora, se derivan teoremas generales en $\mathscr{T}^*$

- Vimos que $c \in \check{V}$ para cada constante $c \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$ (inclusive $\mathbb{P}$ y $\leq_{\mathbb{P}}$). ¿Qué tal con el filtro $\check{V}$-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$?

Proposición (Caracterización de los filtros genéricos en $\check{V}$)

$$(\mathscr{T}^* \vdash) \quad G \in \check{V} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \in \mathbb{P})\,(p \text{ átomo } \wedge\ G = \uparrow\downarrow\{p_0\})$$

Recordatorio: p_0 átomo $\equiv$ $(\forall q_1, q_2 \leq p_0)(\exists r \in P)(r \leq q_1 \wedge r \leq q_2)$

Demo. Igual que en el caso de los modelos transitivos (ejercicio). □

- Los filtros genéricos de la forma $G = \uparrow\downarrow\{p_0\}$ (con $p_0 \in \mathbb{P}$ átomo) son dichos triviales. Por contrarrecíproco:

Corolario: $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ sin átomos $\Rightarrow$ $G \notin \check{V}$

  - Razón por que en la práctica, siempre se elige $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ sin átomos

La noción de nombre

- **Idea:** Representar los conjuntos $A \subseteq \check{V}$ ("frontera de $\check{V}$") por elementos de $\check{V}$:

$$\begin{aligned} & N \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre para } A \\ \Leftrightarrow \quad & N \in \check{V} \;\wedge\; \forall x \, (x \in A \Leftrightarrow (\exists p \in G)\,(x,p) \in N) \\ \Leftrightarrow \quad & N \in \check{V} \;\wedge\; I_G(N) = A \end{aligned}$$

escribiendo: $I_G(N) \;:=\; \{x \in \bigcup\bigcup N : (\exists p \in G)\,(x,p) \in N\}$

(El $\mathbb{P}$-nombre $N \in \check{V}$ caracteriza el conjunto $A \subseteq \check{V}$, pero no es único)

- Se observa que:
  - Todo conjunto $A \in \check{V}$ tiene un $\mathbb{P}$-nombre: $N_A := A \times \mathbb{P}$ $(\in \check{V})$
  - Si $A, B \subseteq \check{V}$ tienen $\mathbb{P}$-nombres $N_A, N_B \in \check{V}$, entonces los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B \;\subseteq\; \check{V}$ tienen $\mathbb{P}$-nombres en $\check{V}$ (ejercicio)
  - Inclusive G $(\subseteq \check{V})$ tiene un $\mathbb{P}$-nombre: $N_G := \{(p,p) : p \in \mathbb{P}\}$ $(\in \check{V})$

Axioma del nombre: $(\forall A \subseteq \check{V})(\exists N \in \check{V})\; A = I_G(N)$

El lema de acotación y sus consecuencias

Lema de acotación: $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall A \subseteq \check{V})(\exists A' \in \check{V})\, A \subseteq A'$

Demo. Dado $N_A \in \check{V}$ tal que $I_G(N_A) = A$, se toma $A' := \bigcup\bigcup N_A \in \check{V}$. □

Corolario:

(1) $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad On \subseteq \check{V}$, y por lo tanto:

(2) $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad \check{V}$ es una clase propia, $On = On^{\check{V}}$, $Cn \subseteq Cn^{\check{V}}$

(3) $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad G \in \check{V} \Rightarrow \check{V} = V$

Demo. (1) Por el absurdo, se supone que $On \not\subseteq \check{V}$, y se considera $\alpha := \min(On - \check{V})$. Por minimalidad, tenemos que $\alpha \subseteq \check{V}$, y luego existe $A \in \check{V}$ t.q. $\alpha \subseteq A$ (lema de acotación). Pero también es claro que $\alpha = On^{\check{V}}$, y luego $On^{\check{V}} = \alpha \subseteq A \in \check{V}$: contradicción.

(2) Se sigue de (1), observando que "$On(\alpha)$" es Δ_0 y "$Cn(\alpha)$" es Π_1.

(3) Supongamos que $G \in \check{V}$. Se demuestra que $x \in \check{V}$ para todo $x \in V$, por $\in$-inducción. Dado $x \in V$ tal que $y \in \check{V}$ para todo $y \in x$ (HI), es decir: tal que $x \subseteq \check{V}$, se considera un $\mathbb{P}$-nombre $n \in \check{V}$ para x, y se observa que:

$$x = I_G(n) = \{y \in \underbrace{\bigcup\bigcup n}_{\in \check{V}} : \underbrace{(\exists p \in G)\,(y,p) \in n}_{\text{fórmula } \Delta_0,\ \text{con } G \in \check{V}}\} \in \check{V}.$$

□

Nombres recursivos (1/2)

- Para cada $u \in \check{V}$, se escribe más generalmente

$$I_G^\infty(u) \;:=\; \{I_G^\infty(v) \;:\; (\exists p \in G)\,(v,p) \in u\}$$

(Definición por $\in$-recursión sobre u)

- Dado un conjunto x cualquiera ($\in V$), se dice que un conjunto $u \in \check{V}$ es un $\mathbb{P}$-nombre recursivo para x cuando $x = I_G^\infty(u)$

Teorema (Existencia de nombres recursivo)

$(\mathscr{T}^* \vdash) \quad \forall x\ (\exists u \in \check{V})\ x = I_G^\infty(u)$

Demo. Sea $(\check{V}_\alpha)_{\alpha \in On}$ la jerarquía acumulativa de $\check{V}$: $\check{V}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}^{\check{V}}(\check{V}_\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} (\mathfrak{P}(\check{V}_\alpha) \cap \check{V})$.

Dado un conjunto x ($\in V$) tal que $(\forall y \in x)(\exists v \in \check{V})\ y = I_G^\infty(v)$ (HI), se asocia a cada elemento $y \in x$ el mínimo ordinal $\alpha_y \in On$ tal que $(\exists v \in \check{V}_{\alpha_y})\ y = I_G^\infty(v)$, y se nota $A := \bigcup_{y \in x} A_y$, donde $A_y := \{v \in \check{V}_{\alpha_y} : y = I_G^\infty(v)\}$ para todo $y \in x$.
Como $A \subseteq \check{V}$ (por construcción), existe $u \in \check{V}$ tal que $A = I_G(u)$, y por lo tanto:

$$I_G^\infty(u) = \{I_G^\infty(v) : (\exists p \in G)\ (v,p) \in u\} = \{I_G^\infty(v) : v \in A\} = \{y : y \in x\} = x. \qquad \square$$

Nombres recursivos (2/2)

- Vimos que el axioma del nombre implica que todo conjunto $X \subseteq \check{V}$ está incluido en algún conjunto $X' \in \check{V}$:

$$(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall X \subseteq \check{V})(\exists X' \in \check{V})\ X \subseteq X' \qquad \text{(Lema de acotación)}$$

- Más generalmente, el teorema de existencia de nombres recursivos implica que para cada conjunto X (en el universo expandido), se puede hallar $Y \in \check{V}$ (en el universo inicial) al menos tan "grande" como X:

Lema de la sobreyección

$(\mathscr{T}^* \vdash) \quad \forall X\ (\exists Y \in \check{V})\ (\exists f : Y \to X)\ f$ sobreyectiva

Demo. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $X \neq \varnothing$ (si no: tomar $Y := X = \varnothing$). Sea $Y \in \check{V}$ un $\mathbb{P}$-nombre recursivo para X, i.e. tal que $I_G^\infty(Y) = X$. Fijado un punto $x_0 \in X$, se considera la función $f : Y \to X$ definida por

$$f(y) \ := \ \begin{cases} I_G^\infty(v) & \text{si } y = (v,p) \text{ para algún } p \in G \\ x_0 & \text{si no} \end{cases} \qquad (y \in Y)$$

observando que: $f(Y) \supseteq \{I_G^\infty(v) : (\exists p \in G)\ (v,p) \in Y\} = I_G^\infty(Y) = X$. $\square$

Axioma de elección en $\mathscr{T}$ y en $\mathscr{T}^*$

- Una consecuencia importante del lema anterior es la siguiente:

Teorema: $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $\quad (\mathrm{AC})^{\check{V}} \ \Rightarrow\ \mathrm{AC}$

Demo. Supongamos que $\check{V} \models \mathrm{AC}$. Queremos mostrar que todo conjunto X $(\in V)$ es bien ordenable. Para ello, se considera un conjunto $Y \in \check{V}$ equipado con una sobreyección $f : Y \twoheadrightarrow X$. Como $\check{V} \models \mathrm{AC}$, existe un ordinal α y un elemento $g \in \check{V}$ tal que $\check{V} \models g : \alpha \to Y$ biyectiva, es decir (en V:) una función $g : \alpha \to Y$ biyectiva (por absolutez). Luego se observa que la función $h : X \to \alpha$ definida por $h(x) = \min\{\beta < \alpha : f(g(\beta)) = x\}$ es inyectiva, lo que implica que el conjunto X es bien ordenable. □

- Y por lo tanto: $\quad$ Si $\mathscr{T} \vdash \mathrm{AC}$, entonces $\mathscr{T}^* \vdash \mathrm{AC}$

- Pero en general, ni el axioma de elección numerable (AC_ω) ni el axioma de elección dependiente (DC) son preservados por extensión genérica:

$$\mathscr{T} \vdash \mathrm{AC}_\omega \quad \not\Rightarrow \quad \mathscr{T}^* \vdash \mathrm{AC}_\omega \qquad \text{(en general)}$$

$$\mathscr{T} \vdash \mathrm{DC} \quad \not\Rightarrow \quad \mathscr{T}^* \vdash \mathrm{DC} \qquad \text{(en general)}$$

Minimalidad de V con respecto a $\check{V}$ y G

Teorema (Minimalidad de V con respecto a $\check{V}$ y G)

Sea M una clase transitiva de $\mathscr{T}^*$, tal que $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $M \models \mathsf{ZF}^{(*)}$.

Entonces: $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $\check{V} \subseteq M \ \wedge\ G \in M \ \Rightarrow\ M = V$

$(*)$ Es decir tal que $\mathscr{T}^* \vdash \varphi^M$ para cada axioma/teorema de ZF

Demo. Primero se observa que en ZF, se puede definir por $\in$-recursión una funcional $x \mapsto \Phi_G(x)$ (que depende de un solo parámetro G cualquiera), tal que:

$$(\mathsf{ZF} \vdash) \quad \forall x\, (\Phi_G(x) \ = \ \{\Phi_G(y) : (\exists p \in G)\, (y, p) \in x\})\,.$$

Dado un modelo transitivo $M \models$ ZF (en $\mathscr{T}^*$) tal que $\check{V} \subseteq M$ y $G \in M$, se nota $(x \mapsto \Phi_G^M(x)) : M \to M$ a la funcional $x \mapsto \Phi_G$ relativizada a M, observando que

$$\begin{aligned}(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall x \in M)\, \big[\Phi_G^M(x) \ &= \ \{\Phi_G^M(y) : ((\exists p \in G)\, (y, p) \in x)^M\} \\ &= \ \{\Phi_G^M(y) : (\exists p \in G)\, (y, p) \in x\}\big]\end{aligned}$$

Luego se demuestra (en $\mathscr{T}^*$) por $\in$-inducción sobre $u \in \check{V}$ ($\subseteq M$ por hipótesis) que

$$I_G^\infty(u)\ (:= \{I_G^\infty(v) : (\exists p \in G)\ (v, p) \in u\}) \ = \ \Phi_G^M(u)$$

para todo $x \in \check{V}$, y por lo tanto: $I_G(u) \in M$. Como tenemos que $\forall x\, (\exists u \in \check{V})\ x = I_G^\infty(u)$ (teorema de existencia de los nombres recursivos), se concluye que $\forall x\, (x \in M)$. □

El álgebra booleana $\check{V}$-completa $\mathbb{B}$

- Notaciones (recordatorio):

$$
\begin{array}{rcll}
p \top q & :\equiv & (\exists r \in \mathbb{P})(r \leq p \wedge r \leq q) & \\
p \perp q & :\equiv & \neg(\exists r \in \mathbb{P})(r \leq p \wedge r \leq q) & \\
X^{\perp} & := & \{p \in \mathbb{P} \,:\, (\forall q \in X)\ p \perp q\} & \\
\mathbb{B} & := & \{X \in \mathfrak{P}^{\check{V}}(\mathbb{P}) \,:\, X = X^{\perp\perp}\} & (\in \check{V}) \\
e \,:\, \mathbb{P} \to \mathbb{B} & := & p \mapsto \{p\}^{\perp\perp} & (\in \check{V})
\end{array}
$$

- En la teoría $\mathscr{T}^*$, se deriva que:
  (1) $(\mathbb{B}, \subseteq)$ es un álgebra booleana $\check{V}$-completa
  (2) La función $e : (\mathbb{P}, \leq) \to (\mathbb{B}, \subseteq)$ es monótona, y más aún un encaje cuando $(\mathbb{P}, \leq)$ es separativo: $(\forall p, q \in \mathbb{P})(p \not\leq q \Rightarrow (\exists p' \leq p)\ p' \perp q)$

- En lo siguiente, usaremos frecuentemente el

Lema: $(\mathscr{T}^* \vdash)\quad (\forall X \in \mathfrak{P}^{\check{V}}(\mathbb{P}))(X \cap G \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; X^{\perp\perp} \cap G \neq \varnothing)$

Demo. Ejercicio

El ultrafiltro $\check{V}$-genérico $\tilde{G} \subseteq \mathbb{B}$

- Se define: $\tilde{G} \;:=\; \{X \in \mathbb{B} \,:\, X \cap G \neq \varnothing\} \quad (\subseteq \mathbb{B})$

Proposición (Ultrafiltro $\check{V}$-genérico)

$(\mathscr{T}^* \vdash)$ $\tilde{G}$ es un ultrafiltro $\check{V}$-genérico de $\mathbb{B}$:

$$\begin{aligned}
\neg X \in \tilde{G} &\quad\Leftrightarrow\quad X \notin \tilde{G} \\
X \wedge Y \in \tilde{G} &\quad\Leftrightarrow\quad X \in \tilde{G} \;\wedge\; Y \in \tilde{G} \\
X \vee Y \in \tilde{G} &\quad\Leftrightarrow\quad X \in \tilde{G} \;\vee\; Y \in \tilde{G} \\
\left(\textstyle\bigwedge_{i\in I} X_i\right) \;\in\; \tilde{G} &\quad\Leftrightarrow\quad X_i \in \tilde{G} \ \text{ para todo } i \in I \\
\left(\textstyle\bigvee_{i\in I} X_i\right) \;\in\; \tilde{G} &\quad\Leftrightarrow\quad X_i \in \tilde{G} \ \text{ para algún } i \in I
\end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathbb{B}$ y para toda familia $(X_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I \cap \check{V}$

(escribiendo $\neg X := X^{\perp}$, $X \wedge Y := X \cap Y$, $X \vee Y := (X \cup Y)^{\perp\perp}$, etc.)

Demo. Ejercicio

- Además: $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall X \in \mathfrak{P}^{\check{V}}(\mathbb{P}))(X \cap G \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; X^{\perp\perp} \in \tilde{G})$

La noción de $\mathbb{B}$-nombre (1/2)

- El axioma del nombre permite representar cada conjunto $A \subseteq \check{V}$ por un $\mathbb{P}$-nombre $N \in \check{V}$, tal que $I_G(N) = A$, escribiendo

$$I_G(N) \ := \ \{x \in \bigcup\bigcup N \ : \ (\exists p \in G)\ (x,p) \in N\}$$

- **Obs.** El la práctica, siempre se puede tomar $N \in \check{V}$ tal que $N \subseteq \check{V} \times \mathbb{P}$

- El álgebra booleana $\mathbb{B}$ combinada con en ultrafiltro $\tilde{G} \subseteq \mathbb{B}$ permite dar una representación alternativa de los conjuntos $A \subseteq \check{V}$ por funciones particulares, llamadas $\mathbb{B}$-nombres. Formalmente:

Definición ($\mathbb{B}$-nombre)

Un $\mathbb{B}$-nombre es una función $f \in \check{V}$ que asocia a cada elemento $x \in \mathrm{dom}(f)$ un valor de verdad $f(x) \in \mathbb{B}$:

$$f \ \mathbb{B}\text{-nombre} \qquad \text{sii} \qquad f \in \check{V} \ \wedge \ f \text{ función } \wedge \ \mathrm{img}(f) \subseteq \mathbb{B}$$

- **Intuición:** $\mathbb{B}$-nombre $=$ función "indicatriz" $f : X \to \mathbb{B}$, con $X, f \in \check{V}$

La noción de $\mathbb{B}$-nombre (2/2)

- Se interpreta cada $\mathbb{B}$-nombre $f \in \check{V}$ por el conjunto

$$J_G(f) \ := \ \{x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) \in \tilde{G}\} \qquad (\subseteq \mathrm{dom}(f) \subseteq \check{V})$$

- El axioma del nombre implica que todo conjunto $A \subseteq \check{V}$ también tiene un $\mathbb{B}$-nombre:

Proposición (Existencia de los $\mathbb{B}$-nombres)

$(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall A \subseteq \check{V})(\exists f \in \check{V})(f$ $\mathbb{B}$-nombre $\wedge \ J_G(f) = A)$

Demo. Sea N un $\mathbb{P}$-nombre para A, es decir un conjunto $N \in \check{V}$ tal que $I_G(N) = A$.
Se considera la función $f \in \check{V}$ definida por:

$$\mathrm{dom}(f) \ := \ \pi_1(N) \ = \ \{x \in \bigcup\bigcup N \ : \ \exists y \ (x, y) \in N\}$$

y

$$f(x) \ := \ \{p \in \mathbb{P} : (x, p) \in N\}^{\perp\perp} \qquad (x \in \mathrm{dom}(f))$$

y se verifica que para todo $x \in \check{V}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x \in J_G(f) \ &\Leftrightarrow \ x \in \mathrm{dom}(f) \ \wedge \ f(x) \in \tilde{G} \\ &\Leftrightarrow \ x \in \mathrm{dom}(f) \ \wedge \ \{p \in \mathbb{P} \ : \ (x, p) \in N\} \cap G \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \ (\exists p \in G) \ (x, p) \in N \quad \Leftrightarrow \quad x \in A. \end{aligned}$$

$\square$

Acotación del cardinal de $\mathfrak{P}(X)$ cuando $X \in \check{V}$

- Para cada conjunto $X \in \check{V}$, se nota $J_{G,X} : (\mathbb{B}^X \cap \check{V}) \to \mathfrak{P}(X)$ a la función definida para todo $f \in (\mathbb{B}^X \cap \check{V})$ por:

$$J_{G,X}(f) := J_G(f) = \{x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) \in \tilde{G}\}$$

Proposición

$(\mathscr{T}^* \vdash)$ La función $J_{G,X} : (\mathbb{B}^X \cap \check{V}) \to \mathfrak{P}(X)$ es sobreyectiva

Demo. Para cada subconjunto $Y \in \mathfrak{P}(X)$, se elige un $\mathbb{B}$-nombre $f \in \check{V}$ tal que $J_G(f) = Y$, y se considera la función $f' \in \mathbb{B}^X \cap \check{V}$ definida por:

$$f'(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{dom}(f) \\ 0_{\mathbb{B}} & \text{si no} \end{cases} \qquad (x \in X)$$

Se concluye, observando que $J_{G,X}(f') = J_G(f) = Y$. □

Corolario (Acotación del cardinal de $\mathfrak{P}(X)$ cuando $X \in \check{V}$) (con AC)

Si $\mathscr{T} \vdash$ AC, entonces $\mathscr{T}^* \vdash (\forall X \in \check{V})\ |\mathfrak{P}(X)| \leq \left|\mathbb{B}^X \cap \check{V}\right|$

$\mathbb{B}$-nombres funcionales (1/2)

- Sean $X, Y \in \check{V}$. Para toda función parcial $f : X \rightharpoonup Y$, se observa que $f \in \mathfrak{P}(X \times Y)$, con $(X \times Y) \in \check{V}$
- Por lo tanto, cada función parcial $f : X \rightharpoonup Y$ puede ser representada por un $\mathbb{B}$-nombre $h \in \mathbb{B}^{X \times Y} \cap \check{V}$. Más aún:

Proposición (Existencia de un $\mathbb{B}$-nombre funcional)

$(\mathscr{T}^* \vdash)$ Para toda función parcial $f : X \rightharpoonup Y$ (con $X, Y \in \check{V}$), existe un $\mathbb{B}$-nombre $h \in (\mathbb{B}^{X \times Y} \cap \check{V})$ tal que:

(1) $f = J_G(h)$

(2) $(\forall x \in X)(\forall y, y' \in Y)(y \neq y' \;\Rightarrow\; h(x, y) \wedge h(x, y') = 0_{\mathbb{B}})$

(i.e. la familia $(h(x, y))_{y \in Y} \in (\mathbb{B}^Y \cap \check{V})$ es una anticadena para todo $x \in X$)

- Se dice que la función $h \in (\mathbb{B}^{X \times Y} \cap \check{V})$ tal que (1) y (2) es un $\mathbb{B}$-nombre funcional para la función $f : X \rightharpoonup Y$

$\mathbb{B}$-nombres funcionales (2/2)

Demo. Dada una función parcial $f : X \rightharpoonup Y$, se considera un $\mathbb{B}$-nombre $h_0 \in (\mathbb{B}^{X \times Y} \cap \check{V})$ tal que $J_G(h_0) = f$. Como la relación $f \subseteq X \times Y$ es funcional, tenemos que

$$(\forall x \in X)(\forall y \neq y' \in Y)\neg((x,y) \in f \wedge (x,y') \in f)$$

entonces: $$(\forall x \in X)(\forall y \neq y' \in Y)\neg(h_0(x,y) \in \tilde{G} \wedge h_0(x,y') \in \tilde{G})$$

y por lo tanto: $$b_0 \; := \; \Big(\bigwedge_{x \in X} \; \bigwedge_{y \neq y' \in Y} \neg(h_0(x,y) \wedge h_0(x,y'))\Big) \; \in \; \tilde{G}$$

por las propiedades de conmutación del ultrafiltro $\check{V}$-genérico $\tilde{G} \subseteq \mathbb{B}$. Se considera ahora la función $h : X \times Y \to \mathbb{B}$ definida por $h(x,y) \; := \; h_0(x,y) \wedge b_0$ para todo $(x,y) \in X \times Y$. Es claro que $h \in \mathbb{B}^{X \times Y} \cap \check{V}$, por construcción. Además:

(1) $J_G(h) = f$, pues para todo $(x,y) \in X \times Y$, tenemos que:

$$h(x,y) \in \tilde{G} \;\Leftrightarrow\; (h_0(x,y) \wedge b_0) \in \tilde{G} \;\Leftrightarrow\; h_0(x,y) \in \tilde{G} \;\Leftrightarrow\; (x,y) \in f$$

ya que $f = J_G(h_0)$.

(2) El $\mathbb{B}$-nombre h es funcional, pues para todos $x \in X$ e $y \neq y' \in Y$, tenemos que:

$$\begin{aligned} h(x,y) \wedge h(x,y') \;&=\; h_0(x,y) \wedge h_0(x,y') \wedge b_0 \\ &\leq\; (h_0(x,y) \wedge h_0(x,y')) \wedge \neg(h_0(x,y) \wedge h_0(x,y')) \;=\; 0_{\mathbb{B}}\,. \end{aligned}$$

□

Condiciones sobre las anticadenas (1/2)

Definición (Condición de cadena numerable)

Se dice que $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la condición de cadena numerable (c.c.c.) cuando toda anticadena de $\mathbb{P}$ tiene un cardinal a lo sumo numerable:

$$(\mathbb{P}, \leq) \text{ cumple la c.c.c.} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall A \subseteq \mathbb{P})(A \text{ anticadena } \Rightarrow |A| \leq \aleph_0)$$

- Más generalmente:

Definición (Condición de κ-cadena)

Dado un cardinal infinito κ, se dice que $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la condición de κ-cadena (κ-c.c.) cuando toda anticadena de $\mathbb{P}$ tiene un cardinal $< \kappa$:

$$(\mathbb{P}, \leq) \text{ cumple la } \kappa\text{-c.c.} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa \text{ cardinal infinito } \wedge (\forall A \subseteq \mathbb{P})(A \text{ anticadena } \Rightarrow |A| < \kappa)$$

- Caso particular ($\kappa = \aleph_1$): c.c.c. $= \aleph_1$-c.c.
- En lo siguiente, siempre se considera la condición de κ-cadena (que no es absoluta) en el sentido del universo inicial

Condiciones sobre las anticadenas (2/2)

- **Recordatorio:**

$$A \subseteq \mathbb{P} \text{ anticadena} \quad :\equiv \quad (\forall p_1, p_2 \in A)(p_1 \neq p_2 \Rightarrow p_1 \perp p_2)$$

$$A \subseteq \mathbb{B} \text{ anticadena} \quad :\equiv \quad (\forall X_1, X_2 \in A)(X_1 \neq X_2 \Rightarrow X_1 \wedge X_2 = 0_{\mathbb{B}})$$

- La condición de κ-cadena (κ-c.c.) sólo trata de las anticadenas de $\mathbb{P}$. Sin embargo:

Proposición

Si $\mathscr{T} \vdash \mathrm{AC}$, entonces:

$$\mathscr{T} \vdash \forall\kappa \left[(\mathbb{P}, \leq) \text{ cumple la } \kappa\text{-c.c.} \Rightarrow (\forall A \subseteq \mathbb{B})(A \text{ anticadena} \Rightarrow |A| < \kappa)\right]$$

Demo. Dado un cardinal infinito κ tal que $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la κ-c.c., se considera una anticadena $A \subseteq \mathbb{B}$, y se nota $A' := A \setminus \{0_{\mathbb{B}}\} \subseteq \mathbb{B}$. Por AC, existe $h : A' \to \mathbb{P}$ tal que $h(X) \in X$ para todo $X \in A'$. Como $A' \subseteq \mathbb{B}$ es una anticadena, la función $h : A' \to \mathbb{P}$ es inyectiva, y su imagen $h(A')$ es una anticadena de $\mathbb{P}$. Por lo tanto: $|A| \leq |A'| + 1 = |h(A')| + 1 < \kappa$. $\square$

Acotación del cardinal de $\mathbb{B}$

Lema

Si $\mathscr{T} \vdash \mathsf{AC}$, entonces:

$$\mathscr{T} \vdash (\forall X \in \mathbb{B})(\exists A \subseteq \mathbb{P})(A \text{ anticadena } \wedge X = A^{\perp\perp})$$

Demo. Sea A una anticadena de $\mathbb{P}$, incluida y maximal en X (por AC). Se verifica fácilmente que $A^{\perp} = X^{\perp}$ (usando la maximalidad de $A \subseteq X$), y luego $A^{\perp\perp} = X^{\perp\perp} = X$. □

- **Notación:** $\mu^{<\kappa} := \sup\{\mu^{\lambda} : \lambda < \kappa \wedge \lambda \in Cn\}$ $\qquad (\kappa, \mu \in Cn)$

Proposición

Si $\mathscr{T} \vdash \mathsf{AC}$, entonces:

$$\mathscr{T} \vdash \forall\kappa\left((\mathbb{P}, \leq) \text{ cumple la } \kappa\text{-c.c.} \Rightarrow |\mathbb{B}| \leq |\mathbb{P}|^{<\kappa}\right)$$

Demo. Sea $\mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{P})$ el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{P}$ de cardinal $< \kappa$. Como $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la κ-c.c., todas las anticadenas de $\mathbb{P}$ están en $\mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{P})$, entonces la función $h : \mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{P}) \to \mathbb{B}$ definida por $h(X) = X^{\perp\perp}$ para todo $X \in \mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{P})$ es sobreyectiva. Por lo tanto:

$$|\mathbb{B}| \leq |\mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{P})| \leq |\mathbb{P}|^{<\kappa}.$$ □

Preservación de los cardinales (1/4)

- **Recordatorio:** Todos los cardinales de V están en $On = On^{\check{V}} \subseteq \check{V}$. Además, como las fórmulas "μ es un cardinal" y "μ es un cardinal regular" son Π_1, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^* \ \vdash \ & (\forall \mu \in On)\big(\mu \text{ cardinal } \Rightarrow \ (\mu \text{ cardinal})^{\check{V}}\big) \ \wedge \\ & (\forall \mu \in On)\big(\mu \text{ card. regular } \Rightarrow \ (\mu \text{ card. regular})^{\check{V}}\big)\end{aligned}$$

- Para cada $\mu \in Cn^{\check{V}}$: $\begin{cases} \text{o bien } \mu \in Cn\text{: } \ \mu \text{ se mantiene en } V \\ \text{o bien } \mu \notin Cn\text{: } \ \mu \text{ se colapasa en } V \end{cases}$

Teorema (Preservación de los cardinales bajo la κ-c.c.)

Si $\mathscr{T} \vdash \mathrm{AC}$ (y luego $\mathscr{T}^* \vdash \mathrm{AC}$), entonces:

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^* \ \vdash \ \forall \kappa \Big[& \big(\kappa \text{ card. regular infinito} \wedge (\mathbb{P}, \leq) \text{ cumple la } \kappa\text{-c.c.}\big)^{\check{V}} \Rightarrow \\ & (\forall \mu \geq \kappa)\big((\mu \text{ cardinal})^{\check{V}} \ \Leftrightarrow \ \mu \text{ cardinal}\big) \ \wedge \\ & (\forall \mu \geq \kappa)\big((\mu \text{ card. regular})^{\check{V}} \ \Leftrightarrow \ \mu \text{ card. regular}\big) \Big]\end{aligned}$$

Preservación de los cardinales (2/4)

Demo. Sea κ un cardinal regular infinito en M, tal que $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la κ-c.c. en M.

(1) *Preservación de los cardinales regulares $\geq \kappa$.*

Sea un ordinal $\mu \geq \kappa$ tal que μ es un cardinal regular en $\check{V}$. Queremos mostrar que μ es un ordinal regular (y luego un cardinal regular) en V. Para ello, se considera un ordinal $\lambda < \mu$, así como una función $f : \lambda \to \mu$ en V. Queremos probar que la imagen de f está acotada por algún ordinal $\beta_0 < \mu$. Para ello, se considera un $\mathbb{B}$-nombre funcional para f, es decir: una función $h \in \mathbb{B}^{\lambda \times \mu} \cap \check{V}$ tal que $f = J_G(h)$ y tal que la familia $(h(\alpha, \beta))_{\beta < \mu}$ $(\in \check{V})$ es una anticadena para todo $\alpha < \lambda$. A partir de ahora, se trabaja en $\check{V}$ con el nombre h:

> Para cada $\alpha < \lambda$, se escribe $B_\alpha := \{\beta < \mu : h(\alpha, \beta) \neq 0_\mathbb{B}\}$. Como la familia $(h(\alpha, \beta))_{\beta < \mu} \in \mathbb{B}^\mu$ es una anticadena, la función $(\beta \mapsto h(\alpha, \beta)) : B_\alpha \to \mathbb{B}$ es inyectiva, y su imagen $A_\alpha := \{h(\alpha, \beta) : \beta \in B_\alpha\} \subseteq \mathbb{B}$ es una anticadena. Como $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la κ-c.c., sabemos que $|A_\alpha| < \kappa$, y luego $|B_\alpha| = |A_\alpha| < \kappa$ $(\leq \mu)$.
>
> Como $\lambda < \mu$ y como μ es un cardinal, tenemos que $|\lambda| < \mu$. Además, tenemos que $|B_\alpha| < \mu$ para todo $\alpha < \lambda$, entonces $|\bigcup_{\alpha < \lambda} B_\alpha| < \mu$, pues μ es regular. Por lo tanto, existe $\beta_0 < \mu$ tal que $h(\alpha, \beta) = 0_\mathbb{B}$ para todos $\alpha < \lambda$ y $\beta \in \,]\beta_0, \mu[$.

Acabamos de construir un ordinal $\beta_0 < \mu$ tal que par todos $\alpha < \lambda$ y $\beta \in \,]\beta_0, \mu[$, tenemos que $h(\alpha, \beta) = 0_\mathbb{B} \notin \tilde{G}$, y por lo tanto $f(\alpha) \neq \beta$. Entonces la imagen de $f : \lambda \to \mu$ está acotada por el ordinal $\beta_0 < \mu$. Acabamos de mostrar que para todo $\lambda < \mu$, todas las funciones de λ en μ están acotadas. Por lo tanto μ es un ordinal regular, y luego un cardinal regular en V. (...)

Preservación de los cardinales (3/4)

Demo. del teorema (continuación y fin). (2) *Preservación de los cardinales* $\geq \kappa$.

Queremos mostrar que para todo $\mu \geq \kappa$, $\mu \in Cn^{\check{V}}$ implica $\mu \in Cn$. Para ello, se razona por el absurdo, y se considera el menor ordinal $\mu \geq \kappa$ tal que $\mu \in Cn^{\check{V}}$ y $\mu \notin Cn$. Por (1), es claro que μ es un cardinal singular en $\check{V}$, y en particular $\mu > \kappa$. Por lo tanto, existe una familia $(\mu_\alpha)_{\alpha<\lambda} \in \check{V}$ tal que

- $\lambda \in Cn^{\check{V}}$ y $\lambda < \mu$;
- $\mu_\alpha \in Cn^{\check{V}}$ y $\mu_\alpha < \mu$ para todo $\alpha < \lambda$;
- $\mu = \sup_{\alpha<\lambda} \mu_\alpha$.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\mu_\alpha \geq \kappa$ para todo $\alpha < \lambda$. (Si no: cambiar μ_α por $\mu'_\alpha := \max(\mu_\alpha, \kappa) < \mu$ para todo $\alpha < \lambda$, observando que $\sup_{\alpha<\lambda} \mu'_\alpha = \mu$.)

Como μ es el mínimo ordinal $\geq \kappa$ tal que $\mu \in Cn^{\check{V}}$ pero $\mu \notin Cn$, se deduce que $\mu_\alpha \in Cn$ para todo $\alpha < \kappa$ (pues $\kappa \leq \mu_\alpha < \mu$). Entonces μ es el supremo de una familia de cardinales de V, y luego μ es un cardinal en V: contradicción. □

Corolario (Caso particular donde $\kappa = \aleph_1$ en $\check{V}$)

Si $\mathscr{T} \vdash$ AC $\wedge$ $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la c.c.c., entonces:

$$\begin{aligned} \mathscr{T}^* \vdash\ & (\forall \mu \in On)\big((\mu \text{ cardinal})^{\check{V}} \Leftrightarrow \mu \text{ cardinal}\big) \wedge \\ & (\forall \mu \in On)\big((\mu \text{ card. regular})^{\check{V}} \Leftrightarrow \mu \text{ card. regular}\big) \end{aligned}$$

Preservación de los cardinales (4/4)

- Se observa que $(\mathbb{P}, \leq)$ cumple la κ-c.c. para cualquier cardinal regular $\kappa > |\mathbb{P}|$. Por lo tanto:

Corolario

Si $\mathscr{T} \vdash \mathrm{AC}$ (y luego $\mathscr{T}^* \vdash \mathrm{AC}$), entonces:

$$\begin{aligned} \mathscr{T}^* \ \vdash \ \exists\kappa \Big[& \big(\kappa \text{ card. regular}\big)^{\check{V}} \ \wedge \\ & (\forall\mu \geq \kappa)\big((\mu \text{ cardinal})^{\check{V}} \ \Leftrightarrow \ \mu \text{ cardinal}\big) \ \wedge \\ & (\forall\mu \geq \kappa)\big((\mu \text{ card. regular})^{\check{V}} \ \Leftrightarrow \ \mu \text{ card. regular}\big) \ \Big] \end{aligned}$$

  - Una extensión genérica colapsa los cardinales (y los cardinales regulares) sólo hasta cierto ordinal. Después de este ordinal, todos los cardinales (y los cardinales regulares) se mantienen

Corolario

Si $\mathscr{T} \vdash \mathrm{AC}$ entonces: $\mathscr{T}^* \ \vdash \ (\exists\lambda, \sigma \in On)(\forall\alpha \in On)\ \aleph_{\lambda+\alpha} = \aleph^{\check{V}}_{\lambda+\sigma+\alpha}$

Demo. Ejercicio

Resumen (1/2)

A partir de nuestra axiomatización de $\mathscr{T}^*$ (y gracias al axioma del nombre), conseguimos demostrar que:

- $\mathscr{T}^* \ \vdash \ G \in \check{V} \ \Leftrightarrow \ (\exists p_0 \in \mathbb{P})(p_0$ átomo $\wedge \ G = \uparrow\downarrow\{p_0\})$
- $\mathscr{T}^* \ \vdash \ (\forall X \subseteq \check{V})(\exists X' \in \check{V}) \ X \subseteq X'$
- $\mathscr{T}^* \ \vdash \ On \subseteq \check{V}$, y por lo tanto:
- $\mathscr{T}^* \ \vdash \ On = On^{\check{V}} \ \wedge \ Cn \subseteq Cn^{\check{V}}$
- $\mathscr{T}^* \ \vdash \ G \in \check{V} \ \Leftrightarrow \ V = \check{V}$
- $\mathscr{T}^* \ \vdash \ \forall X \ (\exists Y \in \check{V}) \ (\exists f : Y \to X) \ f$ sobreyectiva
- Si $\mathscr{T} \vdash$ AC, entonces $\mathscr{T}^* \vdash$ AC
- Pero $\mathscr{T} \vdash \mathrm{AC}_\omega$ (resp. $\mathscr{T} \vdash$ DC) $\not\Rightarrow$ $\mathscr{T}^* \vdash \mathrm{AC}_\omega$ (resp. $\mathscr{T} \vdash$ DC)

Resumen (2/2)

A partir de nuestra axiomatización de $\mathscr{T}^*$ (y gracias al axioma del nombre), conseguimos demostrar que:

- El universo V es minimal con respecto a $\check{V}$ y G:
  Si $\mathscr{T}^* \vdash (M \underset{\text{trans.}}{\models} \text{ZF}) \wedge \check{V} \subseteq M \wedge G \in M$, entonces $\mathscr{T}^* \vdash M = V$
- Si $\mathscr{T} \vdash \text{AC}$, entonces $\mathscr{T}^* \vdash (\forall X \in \check{V})\ |\mathfrak{P}(X)| \leq \left|\mathbb{B}^X \cap \check{V}\right|$
- Si $\mathscr{T} \vdash \text{AC}$ y $\mathscr{T} \vdash (\mathbb{P}, \leq)$ cumple la c.c.c., entonces:
  $$\begin{aligned}\mathscr{T}^* \vdash\ & (\forall \mu \in On)\big((\mu \text{ cardinal})^{\check{V}} \Leftrightarrow \mu \text{ cardinal}\big) \wedge \\ & (\forall \mu \in On)\big((\mu \text{ card. regular})^{\check{V}} \Leftrightarrow \mu \text{ card. regular}\big)\end{aligned}$$
- Más generalmente, si $\mathscr{T} \vdash \text{AC}$, entonces:
  $$\begin{aligned}\mathscr{T}^* \vdash \forall \kappa \Big[& \big(\kappa \text{ card. regular infinito} \wedge (\mathbb{P}, \leq) \text{ cumple la } \kappa\text{-c.c.}\big)^{\check{V}} \Rightarrow \\ & (\forall \mu \geq \kappa)\big((\mu \text{ cardinal})^{\check{V}} \Leftrightarrow \mu \text{ cardinal}\big) \wedge \\ & (\forall \mu \geq \kappa)\big((\mu \text{ card. regular})^{\check{V}} \Leftrightarrow \mu \text{ card. regular}\big) \Big]\end{aligned}$$

Plan

1. Introducción
2. Transformación de teorías: $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}^*$
3. Teoremas en $\mathscr{T}^*$
4. Ejemplo: forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ $(n \geq 1)$
5. Conservatividad y completitud

Fijado $n \geq 1$, forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ (1/3)

Fijado un entero $n \geq 1$, queremos forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$

- Para ello, se considera la teoría de base

$$\begin{array}{lllllll} \mathscr{T} & := & \mathsf{ZFC} & + & \mathsf{HGC} & + & \mathbb{P} = \mathbf{Fin}(\aleph_n \times \omega, 2) \\ & & & & & + & (\leq_{\mathbb{P}}) = \{(p,q) \in \mathbb{P}^2 : p \supseteq q\} \end{array}$$

(sobre el lenguaje formado a partir de los símbolos $\in$, $\mathbb{P}$ y $\leq_{\mathbb{P}}$)

- La teoría $\mathscr{T}$ es una extensión definicional de ZFC + HGC, y por lo tanto: $\mathscr{T} \approx \mathsf{ZFC} + \mathsf{HGC} \approx \mathsf{ZF}$ (equiconsistencia)

- En $\mathscr{T}$, se demuestra que:

(1) $(\mathscr{T} \vdash)$ $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ cumple la c.c.c. y es separativo

(2) $(\mathscr{T} \vdash)$ $|\mathbb{P}| = |\aleph_n \times \omega| = \aleph_n$

- Se define $\mathbb{B} := \{X \in \mathfrak{P}(\mathbb{P}) : X = X^{\perp\perp}\}$ y se prueba que:

(3) $(\mathscr{T} \vdash)$ $\aleph_n = |\mathbb{P}| \underset{\text{encaje}}{\leq} |\mathbb{B}| \underset{\text{c.c.c.}}{\leq} |\mathbb{P}|^{<\aleph_1} = \aleph_n^{\aleph_0} \underset{\text{HGC}}{=} \aleph_n$

Fijado $n \geq 1$, forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ (2/3)

- Sea $\mathscr{T}^*$ la extensión genérica asociada a la teoría $\mathscr{T}$
- Tenemos que $\mathscr{T}^* \supseteq \mathrm{ZFC}$ (ya que $\mathscr{T} \vdash \mathrm{AC}$)
- En la teoría $\mathscr{T}^*$, se define el álgebra booleana $\mathbb{B}$ usando la misma fórmula que en $\mathscr{T}$, pero relativizándola a $\check{V}$:

$$\mathbb{B} \ := \ \{X \in \mathfrak{P}^{\check{V}}(\mathbb{P}) \ : \ X = X^{\perp\perp}\}$$

Más generalmente, tenemos que $\mathscr{T} \vdash \varphi(\mathbb{B})$ implica $\mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}}(\mathbb{B})$ para cualquier fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de $\mathscr{T}$ (principio de importación)

- Como $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ cumple la c.c.c. (en $\check{V}$), se deriva que:

(4) $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $\aleph_n^{\check{V}} = \aleph_n$

(5) $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $\mathbb{P} = \mathbf{Fin}(\aleph_n^{\check{V}} \times \omega, 2) = \mathbf{Fin}(\aleph_n \times \omega, 2)$

(6) $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $\left|(\mathbb{B}^\omega)^{\check{V}}\right| = \left|\aleph_n^{\check{V}}\right| = \aleph_n$ (pues $\mathscr{T} \vdash |\mathbb{B}^\omega| = \aleph_n$)

(7) $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $2^{\aleph_0} = |\mathfrak{P}(\omega)| \leq \left|(\mathbb{B}^\omega)^{\check{V}}\right| = \aleph_n$

Fijado $n \geq 1$, forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ (3/3)

- En $\mathscr{T}^*$ se define $g := \bigcup G$, y se observa que $g : \aleph_n \times \omega \rightharpoonup 2$ (función parcial a priori), pues $G \subseteq \mathbf{Fin}(\aleph_n \times \omega, 2)$ es un filtro

- Usando la $\check{V}$-genericidad de G, se demuestra que:

  (8) $(\mathscr{T}^* \vdash)$ La función $g : \aleph_n \times \omega \rightharpoonup 2$ es total

- Ahora se considera la función $h : \aleph_n \to \mathfrak{P}(\omega)$ definida por

$$h(\alpha) := \{n \in \omega : g(\alpha, n) = 1\} \qquad (\alpha < \aleph_n)$$

- Usando de nuevo la $\check{V}$-genericidad de G, se demuestra que:

  (9) $(\mathscr{T}^* \vdash)$ La función $h : \aleph_n \to \mathfrak{P}(\omega)$ es inyectiva
  (10) $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $2^{\aleph_0} = |\mathfrak{P}(\omega)| \geq \aleph_n$, y por lo tanto:
  (11) $(\mathscr{T}^* \vdash)$ $2^{\aleph_0} = \aleph_n$

- Como $\mathscr{T}^* \approx \mathscr{T} \approx$ ZF (admitido), se concluye que:

Teorema: $\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_n \approx \mathrm{ZF}$ (para cada $n \geq 1$)

Plan

1. Introducción
2. Transformación de teorías: $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}^*$
3. Teoremas en $\mathscr{T}^*$
4. Ejemplo: forzar $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ $(n \geq 1)$
5. Conservatividad y completitud

Introducción

- Dada una teoría de base $\mathscr{T}$ (cualquiera) y su extensión genérica $\mathscr{T}^*$, queremos demostrar el:

Teorema (Conservatividad relativamente a $\check{V}$)

La teoría $\mathscr{T}^*$ es una extensión conservativa de $\mathscr{T}$ relativamente a $\check{V}$:

$$\mathscr{T} \vdash \varphi \qquad \text{sii} \qquad \mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}} \qquad \text{(para toda sentencia } \varphi \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}}\text{)}$$

- **Obs.:** Sólo se trata de demostrar la implicación recíproca, ya que la implicación directa es obvia (principio de importación)

Corolario: Las teorías $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}^*$ son equiconsistentes

Demo. Considerar la fórmula $\varphi :\equiv 0 = 1$. □

- Para ello, vamos a construir un modelo booleano de la teoría $\mathscr{T}^*$ adentro de la teoría $\mathscr{T}$

- **Obs.:** Para variar, se usa aquí una construcción alternativa basada en la noción de $\mathbb{P}$-nombre, y no en la noción de $\mathbb{B}$-nombre presentada en el capítulo 3

La clase de los $\mathbb{P}$-nombres (recursivos)

A partir de ahora se trabaja en la teoría $\mathscr{T}$

- Como siempre, se define: $\mathbb{B} := \{X \in \mathfrak{P}(\mathbb{P}) : X = X^{\perp\perp}\}$

Proposición

$(\mathscr{T} \vdash)$ $(\mathbb{B}, \subseteq)$ es un álgebra booleana completa no degenerada

- Se construye la clase $V^{\mathbb{P}}$ de los $\mathbb{P}$-nombres (recursivos) por:

$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in On} V^{\mathbb{P}}_{\alpha}, \qquad \text{con} \qquad V^{\mathbb{P}}_{\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(V^{\mathbb{P}}_{\beta} \times \mathbb{P}) \qquad (\alpha \in On)$$

- **Intuición:** Un $\mathbb{P}$-nombre (recursivo) es un conjunto u de la forma

$$u = \{(v_1, p_1), (v_2, p_3), (v_3, p_3), \ldots\} \qquad (\subseteq V^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P})$$

donde los v_i son $\mathbb{P}$-nombres (recursivos) y los p_i son condiciones

- **Obs.:** En un $\mathbb{P}$-nombre $u \in V^{\mathbb{P}}$, un mismo elemento $v \in \pi_1(u)$ puede ser asociado a múltiples condiciones (i.e. los $\mathbb{P}$-nombres no son funciones en general)

Igualdad, inclusión y pertenencia en $V^{\mathbb{P}}$ (1/2)

- Dados $\mathbb{P}$-nombres $u, v \in V^{\mathbb{P}}$, se escribe:

$$u[v] \ := \ \{p \in \mathbb{P} : (v, p) \in u\}^{\perp\perp} \qquad (\in \mathbb{B})$$

En particular, tenemos que $u[v] = \varnothing = 0_{\mathbb{B}}$ cuando $v \notin \pi_1(u)$

- A cada $u, v \in V^{\mathbb{P}}$ se asocian valores de verdad

$$[\![u = v]\!]^{\mathbb{P}},\ [\![u \subseteq v]\!]^{\mathbb{P}},\ [\![u \in v]\!]^{\mathbb{P}} \ \in \ \mathbb{B}$$

definidos por recursión mutua sobre los rangos de u y v en $V^{\mathbb{P}}$:

$$\begin{aligned}
[\![u = v]\!]^{\mathbb{P}} &:= [\![u \subseteq v]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![v \subseteq u]\!]^{\mathbb{P}} \\
[\![u \subseteq v]\!]^{\mathbb{P}} &:= \bigwedge_{u' \in \pi_1(u)} \left(u[u'] \to [\![u' \in v]\!]^{\mathbb{P}}\right) \\
[\![u \in v]\!]^{\mathbb{P}} &:= \bigvee_{v' \in \pi_1(v)} \left(v[v'] \wedge [\![u = v']\!]^{\mathbb{P}}\right)
\end{aligned}$$

Igualdad, inclusión y pertenencia en $V^{\mathbb{P}}$ (2/2)

Proposición ($[\![\cdot = \cdot]\!]^{\mathbb{P}}$ es una equivalencia en $V^{\mathbb{P}}$)

($\mathscr{T} \vdash$) Para todos $u, v, w \in V^{\mathbb{P}}$:

(1) $[\![u = u]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}}$

(2) $[\![u = v]\!]^{\mathbb{P}} = [\![v = u]\!]^{\mathbb{P}}$

(3) $[\![u = v]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![v = w]\!]^{\mathbb{P}} \leq [\![u = w]\!]^{\mathbb{P}}$

Demo. Ejercicio

Proposición ($[\![\cdot \in \cdot]\!]^{\mathbb{P}}$ es compatible con $[\![\cdot = \cdot]\!]^{\mathbb{P}}$ en $V^{\mathbb{P}}$)

($\mathscr{T} \vdash$) Para todos $u, v, w \in V^{\mathbb{P}}$:

(1) $u[v] \leq [\![v \in u]\!]^{\mathbb{P}}$

(2) $[\![u = v]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![v \in w]\!]^{\mathbb{P}} \leq [\![u \in w]\!]^{\mathbb{P}}$

(3) $[\![u \in v]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![v = w]\!]^{\mathbb{P}} \leq [\![u \in w]\!]^{\mathbb{P}}$

Demo. Ejercicio

Intermezzo: comparación entre $V^{\mathbb{P}}$ y $V^{\mathbb{B}}$ (1/2)

- Construcción de los modelos booleanos $V^{\mathbb{P}}$ y $V^{\mathbb{B}}$:

$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in On} V^{\mathbb{P}}_{\alpha}, \quad \text{con} \quad V^{\mathbb{P}}_{\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(V^{\mathbb{P}}_{\beta} \times \mathbb{P}) \qquad (\alpha \in On)$$

$$V^{\mathbb{B}} := \bigcup_{\alpha \in On} V^{\mathbb{B}}_{\alpha}, \quad \text{con} \quad V^{\mathbb{B}}_{\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{B}^{\subseteq V^{\mathbb{B}}_{\beta}} \qquad (\alpha \in On)$$

- **Intuición:**
$$V^{\mathbb{P}} = \mathfrak{P}(V^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}) \qquad \text{(clase de conjuntos de pares)}$$
$$V^{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^{\subseteq V^{\mathbb{B}}} \qquad \text{(clase de funciones parciales)}$$

- Sin embargo, se puede pasar de una construcción a la otra usando las funcionales $\flat : V^{\mathbb{B}} \to V^{\mathbb{P}}$ y $\sharp : V^{\mathbb{P}} \to V^{\mathbb{B}}$ definidas por:

$$\flat f := \big\{(\flat g, p) : g \in \mathrm{dom}(f) \wedge p \in f(g)\big\} \qquad (f \in V^{\mathbb{B}})$$

$$\mathrm{dom}(\sharp u) := \{\sharp v : v \in \pi_1(u)\} \qquad (u \in V^{\mathbb{P}})$$
$$\sharp u(g) := \big\{p \in \mathbb{P} : \exists v\,((v,p) \in u \wedge \sharp v = g)\big\}^{\perp\perp} \qquad (g \in \mathrm{dom}(\sharp u))$$

Intermezzo: comparación entre $V^{\mathbb{P}}$ y $V^{\mathbb{B}}$ (2/2)

Lema: $(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall f \in V^{\mathbb{B}})\ \sharp\flat f = f$

Demo. Ejercicio

- En particular: $\begin{cases} \flat \ : \ V^{\mathbb{B}} \to V^{\mathbb{P}} & \text{es inyectiva} \\ \sharp \ : \ V^{\mathbb{P}} \to V^{\mathbb{B}} & \text{es sobreyectiva} \end{cases}$

Proposición

(1) $(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall f, g \in V^{\mathbb{B}}) \Big(\begin{array}{rcl} [\![\flat f = \flat g]\!]^{\mathbb{P}} & = & [\![f = g]\!]^{\mathbb{B}} \ \wedge \\ [\![\flat f \in \flat g]\!]^{\mathbb{P}} & = & [\![f \in g]\!]^{\mathbb{B}} \end{array} \Big)$

(2) $(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall u, v \in V^{\mathbb{P}}) \Big(\begin{array}{rcl} [\![\sharp u = \sharp v]\!]^{\mathbb{B}} & = & [\![u = v]\!]^{\mathbb{P}} \ \wedge \\ [\![\sharp u \in \sharp v]\!]^{\mathbb{B}} & = & [\![u \in v]\!]^{\mathbb{P}} \end{array} \Big)$

Demo. Ejercicio

- **Conclusión:** $V^{\mathbb{P}}$ y $V^{\mathbb{B}}$ son elementalmente equivalentes (al menos para el lenguaje de ZF)

Encaje de V en $V^{\mathbb{P}}$

- Cada conjunto x ($\in V$) está representado en $V^{\mathbb{P}}$ por el $\mathbb{P}$-nombre $\check{x}$ definido (por $\in$-recursión) por:

$$\check{x} \;:=\; \{(\check{y}, p) \,:\, y \in x \wedge p \in \mathbb{P}\} \;=\; \{\check{y} \,:\, y \in x\} \times \mathbb{P}$$

Proposición (Encaje con respecto a $=$, $\in$)

(1) $(\mathscr{T} \vdash)$ $\quad \forall x\ (\forall u \in V^{\mathbb{P}})\ [\![u \in x]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; \bigvee_{y \in x} [\![u = \check{y}]\!]^{\mathbb{P}}$

(2) $(\mathscr{T} \vdash)$ $\quad \forall x\ \forall y\ \big($

$$\begin{aligned} &(x = y \quad\Leftrightarrow\quad [\![\check{x} = \check{y}]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}}) \wedge \\ &(x \neq y \quad\Leftrightarrow\quad [\![\check{x} = \check{y}]\!]^{\mathbb{P}} = 0_{\mathbb{B}}) \wedge \\ &(x \in y \quad\Leftrightarrow\quad [\![\check{x} \in \check{y}]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}}) \wedge \\ &(x \notin y \quad\Leftrightarrow\quad [\![\check{x} \in \check{y}]\!]^{\mathbb{P}} = 0_{\mathbb{B}}) \;\big) \end{aligned}$$

Demo. Ejercicio

- La correspondencia $\begin{cases} V \;\to\; V^{\mathbb{P}} \\ x \;\mapsto\; \check{x} \end{cases}$ es un “encaje” de V en $V^{\mathbb{P}}$

Interpretación de los demás símbolos de $\mathscr{T}^*$ (1/2)

- Cada símbolo de predicado R del lenguaje de $\mathscr{T}$ (distinto de $=$, $\in$) está interpretado por la funcional $[\![R(\cdot)]\!]^{\mathbb{P}} : \left(V^{\mathbb{P}}\right)^k \to \mathbb{B}$ definida por:

$$[\![R(u_1,\dots,u_k)]\!]^{\mathbb{P}} := \bigvee_{(x_1,\dots,x_k)\in R}\left([\![u_1 = \check{x}_1]\!]^{\mathbb{P}} \wedge \cdots \wedge [\![u_k = \check{x}_k]\!]^{\mathbb{P}}\right)$$

(Identificando el símbolo R con la clase $\{(x_1,\dots,x_k) \in V^k : R(x_1,\dots,x_k)\}$)

Proposición

Para cada símbolo de predicado R del lenguaje de $\mathscr{T}$, tenemos que:

(1) $(\mathscr{T} \vdash)$ $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in V^{\mathbb{P}})\left([\![\vec{u} = \vec{v}]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![R(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \leq [\![R(\vec{v})]\!]^{\mathbb{P}}\right)$

(2) $(\mathscr{T} \vdash)$ $\forall \vec{x}\ \big(\ (\ R(\vec{x}) \Leftrightarrow [\![R(\check{\vec{x}})]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}}) \wedge (\neg R(\vec{x}) \Leftrightarrow [\![R(\check{\vec{x}})]\!]^{\mathbb{P}} = 0_{\mathbb{B}})\ \big)$

(Escribiendo $[\![\vec{u} = \vec{v}]\!]^{\mathbb{P}} := [\![u_1 = v_1]\!]^{\mathbb{P}} \wedge \cdots \wedge [\![u_k = v_k]\!]^{\mathbb{P}}$)

Demo. Ejercicio

Interpretación de los demás símbolos de $\mathscr{T}^*$ (2/2)

- El predicado $\check{V}(x)$ del lenguaje de $\mathscr{T}^*$ está interpretado por:

$$[\![\check{V}(u)]\!]^{\mathbb{P}} \;:=\; \bigvee_{x \in V} [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}} \qquad (u \in V^{\mathbb{P}})$$

Proposición

(1) $(\mathscr{T} \vdash)\quad (\forall u, v \in V^{\mathbb{P}})\ \big([\![u = v]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![\check{V}(u)]\!]^{\mathbb{P}} \leq [\![\check{V}(v)]\!]^{\mathbb{P}}\big)$

(2) $(\mathscr{T} \vdash)\quad \forall x\ [\![\check{V}(\check{x})]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}}$

Demo. Ejercicio

- Cada constante c del lenguaje de $\mathscr{T}$ está interpretada por:

$$\dot{c} \;:=\; \check{c} \;\in\; V^{\mathbb{P}}$$

- La constante G del lenguaje de $\mathscr{T}^*$ está interpretada por:

$$\dot{G} \;:=\; \{(\check{p}, p) \,:\, p \in \mathbb{P}\} \;\in\; V^{\mathbb{P}}$$

Interpretación de las fórmulas de $\mathscr{T}^*$

- Se interpreta cada fórmula atómica de $\mathscr{T}^*$, sustituyendo en la funcional asociada al predicado subyacente (inclusive $=$, $\in$) cada constante $c \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*}$ por el correspondiente $\mathbb{P}$-nombre $\dot{c} \in V^{\mathbb{P}}$
- Por ejemplo:
  - si $\varphi(x) \equiv R(x,c)$ entonces: $[\![\varphi(u)]\!]^{\mathbb{P}} := [\![R(u,\dot{c})]\!]^{\mathbb{P}}$
  - si $\varphi(x) \equiv R(c,x)$ entonces: $[\![\varphi(u)]\!]^{\mathbb{P}} := [\![R(\dot{c},u)]\!]^{\mathbb{P}}$
  - si $\varphi \equiv R(c,c')$ entonces: $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{P}} := [\![R(\dot{c},\dot{c}')]\!]^{\mathbb{P}}$ (etc.)
- Luego se extiende la definición a todas las fórmulas $\varphi(\vec{x})$ del lenguaje de $\mathscr{T}^*$ (por inducción externa sobre $\varphi(\vec{x})$), escribiendo:

$$[\![\neg\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} := \neg[\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \qquad [\![\varphi(\vec{u}) \Rightarrow \psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} := [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \to [\![\psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}}$$

$$[\![\varphi(\vec{u}) \wedge \psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} := [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![\psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \qquad [\![\varphi(\vec{u}) \vee \psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} := [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \vee [\![\psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}}$$

$$[\![\forall y\, \varphi(y,\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} := \bigwedge_{v \in V^{\mathbb{P}}} [\![\varphi(v,\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \qquad [\![\exists y\, \varphi(y,\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} := \bigvee_{v \in V^{\mathbb{P}}} [\![\varphi(v,\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}}$$

Corrección lógica

- **Notación:** $V^{\mathbb{P}} \models \varphi(u_1, \dots, u_n) \quad :\equiv \quad [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}}$

Lema (Regla de Leibniz)

Para cada fórmula $\varphi(x, \vec{z})$ del lenguaje de $\mathscr{T}^*$, tenemos que:

$$(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall u, v, \vec{w} \in V^{\mathbb{P}}) \left([\![u = v]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![\varphi(u, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}} \leq [\![\varphi(v, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}}\right)$$

Demo. Ejercicio

- Dado un contexto $\Gamma(\vec{x}) \equiv \varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_n(\vec{x})$, se escribe:

$$[\![\Gamma(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \; := \; [\![\varphi_1(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \wedge \cdots \wedge [\![\varphi_n(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}}$$

Teorema (Corrección lógica)

Si un secuente $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ es derivable en el sistema NK, entonces:

$$(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall \vec{u} \in V^{\mathbb{P}})\left([\![\Gamma(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \leq [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}}\right)$$

Demo. Ejercicio

Los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (recordatorio)

1. Axiomas de ZF (extendidos al lenguaje de $\mathscr{T}^*$)
   - Extensionalidad, pares, unión, potencia, infinitud y fundación
   - Comprensión y reemplazo para todas las fórmulas de $\mathscr{T}^*$
2. Axiomas de transitividad
   - $(\forall x \in \check{V})\ x \subseteq \check{V}$
   - $c \in \check{V}$ para cada constante $c \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$
   - $\forall \vec{x}\,(R(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} \in \check{V})$ para cada predicado $R \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}} - \{=, \in\}$
3. Axiomas de $\mathscr{T}$ relativizados a $\check{V}$
   - $\varphi^{\check{V}}$ para cada axioma φ de la teoría $\mathscr{T}$
4. Axioma de genericidad
   - $G \subseteq \mathbb{P}\ \wedge\ G \neq \varnothing\ \wedge$
     $(\forall p, q \in \mathbb{P})(p \in G \wedge p \leq q \Rightarrow q \in G)\ \wedge$
     $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q)\ \wedge$
     $(\forall D \subseteq \mathbb{P})(D \text{ denso} \wedge D \in \check{V} \Rightarrow D \cap G \neq \varnothing)$
5. Axioma del nombre
   - $(\forall A \subseteq \check{V})\,(\exists N \in \check{V})\,\forall x\,(x \in A\ \Leftrightarrow\ (\exists p \in G)\,(x, p) \in N)$

Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (1/8)

Lema (Cuantificaciones relativizadas)

Para cada fórmula $\varphi(x, \vec{z})$ del lenguaje de $\mathscr{T}^*$, tenemos que:

(1) $(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall u, \vec{w} \in V^{\mathbb{P}})\left([\![(\exists x \in u)\, \varphi(x, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}} = \bigvee_{v \in \pi_1(u)} \left(u[v] \wedge [\![\varphi(u, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}}\right)\right)$

(2) $(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall u, \vec{w} \in V^{\mathbb{P}})\left([\![(\forall x \in u)\, \varphi(x, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}} = \bigwedge_{v \in \pi_1(u)} \left(u[v] \to [\![\varphi(v, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}}\right)\right)$

Demo. Ejercicio

Proposición 1 (Corrección de los axiomas de ZF)

$(\mathscr{T} \vdash) \quad V^{\mathbb{P}} \models$ extensionalidad $\wedge$ pares $\wedge$ comprensión$_\varphi$ $\wedge$ unión $\wedge$ potencia $\wedge$ infinitud $\wedge$ reemplazo$_\psi$ $\wedge$ fundación

donde φ, ψ recorren todas las fórmulas del lenguaje de $\mathscr{T}^*$

Demo. Ejercicio

Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (2/8)

Proposición 2 (Corrección de los axiomas de transitividad)

(1) $(\mathscr{T} \vdash) \quad V^{\mathbb{P}} \models (\forall x \in \check{V})\ x \subseteq \check{V}$

(2) $(\mathscr{T} \vdash) \quad V^{\mathbb{P}} \models c \in \check{V}$ para cada constante c de $\mathscr{T}$

(3) $(\mathscr{T} \vdash) \quad V^{\mathbb{P}} \models \forall \vec{x}\,(R(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} \in \check{V})$ para cada predicado R de $\mathscr{T}$ (distinto de $=$, $\in$)

Demo. Ejercicio

Lema 3.1

Para cada fórmula $\varphi(x, \vec{z})$ del lenguaje de $\mathscr{T}$, tenemos que

(1) $(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall \vec{w} \in V^{\mathbb{P}}) \left([\![(\forall x \in \check{V})\, \varphi(x, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}} = \bigwedge_{x \in V} [\![\varphi(\check{x}, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}} \right)$

(2) $(\mathscr{T} \vdash) \quad (\forall \vec{w} \in V^{\mathbb{P}}) \left([\![(\exists x \in \check{V})\, \varphi(x, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}} = \bigvee_{x \in V} [\![\varphi(\check{x}, \vec{w})]\!]^{\mathbb{P}} \right)$

Demo. Ejercicio

Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (3/8)

Lema 3.2

Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje de $\mathscr{T}$, tenemos que

$$(\mathscr{T} \vdash) \quad \forall x_1 \cdots \forall x_n \ (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \ \Leftrightarrow \ V^{\mathbb{P}} \models \varphi^{\check{V}}(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n))$$

Demo. Por inducción externa sobre la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, usando el Lema 3.1 para tratar el caso de los cuantificadores. □

Proposición 3 (Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}$ relativizados a $\check{V}$)

$$(\mathscr{T} \vdash) \quad V^{\mathbb{P}} \ \models \ \varphi^{\check{V}} \qquad \text{para cada axioma } \varphi \text{ de } \mathscr{T}$$

Demo. Para cada axioma φ de $\mathscr{T}$, tenemos que $\mathscr{T} \vdash \varphi$ (obvio) y $\mathscr{T} \vdash \varphi \Leftrightarrow V^{\mathbb{P}} \models \varphi^{\check{V}}$ (por el Lema 3.2), y por lo tanto: $\mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{P}} \models \varphi^{\check{V}}$. □

Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}^*$

- **Recordatorio:** La constante G ($\in \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*}$) está interpretada por
$$\dot{G} \;:=\; \{(\check{p}, p) \;:\; p \in \mathbb{P}\} \qquad\qquad (\in V^{\mathbb{P}})$$

Proposición 4 (Corrección del axioma de genericidad)

$$\begin{aligned}(\mathscr{T} \vdash) \quad V^{\mathbb{P}} \models\; & G \subseteq \mathbb{P} \quad \wedge \quad G \neq \varnothing \quad \wedge \\ & (\forall p, q \in \mathbb{P})\,(p \in G \wedge p \leq q \Rightarrow q \in G) \quad \wedge \\ & (\forall p, q \in G)\,(\exists r \in G)\,(r \leq p \wedge r \leq q) \quad \wedge \\ & (\forall D \subseteq P)\,(D \text{ denso } \wedge\; D \in \check{V} \;\Rightarrow\; D \cap G \neq \varnothing)\end{aligned}$$

Demo. Para todo $p \in \mathbb{P}$, se observa que:
$$[\![p \in G]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; \bigvee_{q \in \mathbb{P}} (\dot{G}[\check{q}] \wedge [\![\check{p} = \check{q}]\!]^{\mathbb{P}}) \;=\; \dot{G}[\check{p}] \;=\; \{p\}^{\perp\perp} \;=\; e(p).$$

Luego, se demuestra que:

- $[\![G \subseteq \mathbb{P}]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} (\dot{G}[\check{p}] \to [\![\check{p} \in \mathbb{P}]\!]^{\mathbb{P}}) \;=\; \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} (e(p) \to 1_{\mathbb{B}}) \;=\; 1_{\mathbb{B}}.$
- $[\![G \neq \varnothing]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; [\![(\exists p \in \mathbb{P})\; p \in G]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \dot{G}[\check{p}] \;=\; \bigvee_{p \in \mathbb{P}} e(p) \;=\; 1_{\mathbb{B}}.$ (...)

Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (5/8)

Demo (continuación).

- Dados $p, q \in \mathbb{P}$, se distinguen dos casos:
  - Si $(p, q) \notin (\leq_{\mathbb{P}})$, entonces
  $$[\![\check{p} \in G \wedge \check{p} \leq \check{q} \Rightarrow \check{q} \in G]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; e(p) \wedge 0_{\mathbb{B}} \to e(q) \;=\; 1_{\mathbb{B}}.$$
  - Si $(p, q) \in (\leq_{\mathbb{P}})$, entonces $e(p) \subseteq e(q)$, y luego
  $$[\![\check{p} \in G \wedge \check{p} \leq \check{q} \Rightarrow \check{q} \in G]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; e(p) \wedge 1_{\mathbb{B}} \to e(q) \;=\; 1_{\mathbb{B}}.$$

  Por lo tanto: $\;[\![(\forall p, q \in \mathbb{P})(p \in G \wedge p \leq q \Rightarrow q \in G)]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; \bigwedge_{p,q \in \mathbb{P}} 1_{\mathbb{B}} \;=\; 1_{\mathbb{B}}.$

- Dados $p, q \in \mathbb{P}$, se observa que:
$$\begin{aligned} e(p) \wedge e(q) &= \{p\}^{\perp\perp} \cap \{q\}^{\perp\perp} \;=\; (\downarrow\{p\})^{\perp\perp} \cap (\downarrow\{q\})^{\perp\perp} \\ &= (\downarrow\{p\} \cap \downarrow\{q\})^{\perp\perp} \;=\; \Big(\bigcup_{r \leq p,q} \{r\}\Big)^{\perp\perp} \;=\; \Big(\bigcap_{r \leq p,q} \{r\}^{\perp}\Big)^{\perp} \\ &= \Big(\bigcap_{r \leq p,q} \{r\}^{\perp\perp\perp}\Big)^{\perp} \;=\; \Big(\bigcup_{r \leq p,q} \{r\}^{\perp\perp}\Big)^{\perp\perp} \;=\; \bigvee_{r \leq p,q} e(r) \end{aligned}$$

  y por lo tanto: $\;[\![(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q)]\!]^{\mathbb{P}}$
$$\begin{aligned} &= \bigwedge_{p,q \in \mathbb{P}} \Big(\dot{G}[\check{p}] \wedge \dot{G}[\check{q}] \to \bigvee_{r \in \mathbb{P}} (\dot{G}[\check{r}] \wedge [\![\check{r} \leq \check{p}]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![\check{r} \leq \check{q}]\!]^{\mathbb{P}})\Big) \\ &= \bigwedge_{p,q \in \mathbb{P}} \Big(e(p) \wedge e(q) \to \bigvee_{r \leq p,q} e(r)\Big) \;=\; \bigwedge_{p,q \in \mathbb{P}} 1_{\mathbb{B}} \;=\; 1_{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$
$\square$

Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (6/8)

Demo (continuación y fin).

- Dado un conjunto D cualquiera, se observa que:
  - $[\![\check{D} \subseteq \mathbb{P}]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; [\![\check{D} \subseteq \check{\mathbb{P}}]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; \begin{cases} 1_{\mathbb{B}} & \text{si } D \subseteq \mathbb{P} \\ 0_{\mathbb{B}} & \text{si no} \end{cases}$
  - Si $D \subseteq \mathbb{P}$, entonces $[\![\check{D} \text{ denso}]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; [\![(\check{D} \text{ denso})^{\check{V}}]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; \begin{cases} 1_{\mathbb{B}} & \text{si } D \text{ denso} \\ 0_{\mathbb{B}} & \text{si no} \end{cases}$

    (por el Lema 3.2)
  - Si además $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso, entonces:

$$\begin{aligned} [\![\check{D} \cap G \neq \varnothing]\!]^{\mathbb{P}} \;&=\; [\![(\exists p \in G)\; p \in \check{D}]\!]^{\mathbb{P}} \\ &=\; \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \big(\dot{G}[\check{p}] \wedge [\![\check{p} \in \check{D}]\!]^{\mathbb{P}}\big) \;=\; \bigvee_{p \in D} \{p\}^{\perp\perp} \;=\; D^{\perp\perp} \;=\; 1_{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

(pues $D \subseteq \mathbb{P}$ denso)

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & [\![(\forall D \subseteq \mathbb{P})(D \text{ denso} \wedge D \in \check{V} \Rightarrow D \cap G \neq \varnothing)]\!]^{\mathbb{P}} \\ =\; & [\![(\forall D \in \check{V})(D \subseteq \mathbb{P} \wedge D \text{ denso} \Rightarrow D \cap G \neq \varnothing)]\!]^{\mathbb{P}} \\ =\; & \bigwedge_{D \in V} \big([\![\check{D} \subseteq \mathbb{P}]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![\check{D} \text{ denso}]\!]^{\mathbb{P}} \to [\![\check{D} \cap G \neq \varnothing]\!]^{\mathbb{P}}\big) \\ =\; & \bigwedge_{\substack{D \subseteq \mathbb{P} \\ D \text{ denso}}} [\![\check{D} \cap G \neq \varnothing]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; 1_{\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

$\square$

Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (7/8)

Proposición 5 (Corrección del axioma del nombre)

$$(\mathscr{T} \vdash) \quad V^{\mathbb{P}} \models (\forall A \subseteq \check{V})(\exists N \in \check{V}) \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow (\exists p \in G)\,(x,p) \in N)$$

Demo. Sea $A \in V^{\mathbb{P}}$. Para todo $u \in \pi_1(A)$, se nota $X_u := \{x \in V : [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}} \neq 0_{\mathbb{B}}\}$. Dados $x \neq y \in X_u$, se observa que $[\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![u = \check{y}]\!]^{\mathbb{P}} \leq [\![\check{x} = \check{y}]\!]^{\mathbb{P}} = 0_{\mathbb{B}}$. Entonces la función $(x \mapsto [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}}) : X_u \to \mathbb{B}^*$ es inyectiva, y como $\mathbb{B}^*$ es un conjunto, se deduce que la clase X_u también es un conjunto. Se nota $X := \bigcup_{u \in \pi_1(A)} X_u$ y se considera el $\mathbb{P}$-nombre $A' := \{(\check{x}, p) : x \in X \wedge p \in [\![\check{x} \in A]\!]^{\mathbb{P}}\} \in V^{\mathbb{P}}$. Se observa que:

- $$[\![A' \subseteq A]\!]^{\mathbb{P}} = \bigwedge_{x \in X} (A'[\check{x}] \to [\![\check{x} \in A]\!]^{\mathbb{P}}) = \bigwedge_{x \in X} ([\![\check{x} \in A]\!]^{\mathbb{P}} \to [\![\check{x} \in A]\!]^{\mathbb{P}}) = 1_{\mathbb{B}}$$
- $$\begin{aligned}[\![A \subseteq A']\!]^{\mathbb{P}} &= \bigwedge_{u \in \pi_1(A)} (A[u] \to [\![u \in A']\!]^{\mathbb{P}}) = \bigwedge_{u \in \pi_1(A)} \Big(A[u] \to \bigvee_{x \in X} (A'[\check{x}] \wedge [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}})\Big) \\ &= \bigwedge_{u \in \pi_1(A)} \Big(A[u] \to \bigvee_{x \in X} ([\![\check{x} \in A]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}})\Big) \\ &= \bigwedge_{u \in \pi_1(A)} \Big(A[u] \to \bigvee_{x \in X} ([\![u \in A]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}})\Big) = \bigwedge_{u \in \pi_1(A)} \Big(A[u] \to \bigvee_{x \in X} [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}}\Big) \\ &= \bigwedge_{u \in \pi_1(A)} \Big(A[u] \to \bigvee_{x \in V} [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}}\Big) = \bigwedge_{u \in \pi_1(A)} (A[u] \to [\![u \in \check{V}]\!]^{\mathbb{P}}) = [\![A \subseteq \check{V}]\!]^{\mathbb{P}}\end{aligned}$$

y por lo tanto: $[\![A = A']\!]^{\mathbb{P}} = [\![A \subseteq A']\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![A' \subseteq A]\!]^{\mathbb{P}} = [\![A \subseteq \check{V}]\!]^{\mathbb{P}}$. (...)

Corrección de los axiomas de $\mathscr{T}^*$ (8/8)

Demo (continuación y fin). Ahora se nota $N_0 := \{(x,p) : x \in X \wedge p \in [\![\check{x} \in A]\!]^{\mathbb{P}}\}$. Para todo $u \in V^{\mathbb{P}}$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&[\![(\exists p \in G)\,(u,p) \in \check{N}_0]\!]^{\mathbb{P}} \\
&\quad = \bigvee_{p\in\mathbb{P}} \big(\dot{G}[\check{p}] \wedge [\![(u,\check{p}) \in \check{N}_0]\!]^{\mathbb{P}}\big) \;=\; \bigvee_{p\in\mathbb{P}} \Big(\{p\}^{\perp\perp} \wedge \bigvee_{z\in N_0} [\![(u,\check{p}) = \check{z}]\!]^{\mathbb{P}}\Big) \\
&\quad = \bigvee_{p\in\mathbb{P}} \Big(\{p\}^{\perp\perp} \wedge \bigvee_{(x,q)\in N_0} \big([\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![\check{q} = \check{p}]\!]^{\mathbb{P}}\big)\Big) \;=\; \bigvee_{p\in\mathbb{P}} \Big(\{p\}^{\perp\perp} \wedge \bigvee_{\substack{x\in X \text{ t.q.}\\ p\in[\![\check{x}\in A]\!]^{\mathbb{P}}}} [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}}\Big) \\
&\quad = \bigvee_{x\in X} \; \bigvee_{p\in[\![\check{x}\in A]\!]^{\mathbb{P}}} \big(\{p\}^{\perp\perp} \wedge [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}}\big) \;=\; \bigvee_{x\in X} \big([\![\check{x} \in A]\!]^{\mathbb{P}} \wedge [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{P}}\big) \\
&\quad = \bigvee_{v\in\pi_1(A')} \big(A'[v] \wedge [\![u = v]\!]^{\mathbb{P}}\big) \;=\; [\![u \in A']\!]^{\mathbb{P}}.
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
&[\![A \subseteq \check{V} \Rightarrow (\exists N \in \check{V})\,\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow (\exists p \in G)\ (x,p) \in N)]\!]^{\mathbb{P}} \\
&\quad \geq\ [\![A \subseteq \check{V} \Rightarrow \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow (\exists p \in G)\ (x,p) \in \check{N}_0)]\!]^{\mathbb{P}} \\
&\quad =\ [\![A = A' \Rightarrow \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow (\exists p \in G)\ (x,p) \in \check{N}_0)]\!]^{\mathbb{P}} \\
&\quad =\ [\![A = A' \Rightarrow \forall x\,(x \in A' \Leftrightarrow (\exists p \in G)\ (x,p) \in \check{N}_0)]\!]^{\mathbb{P}} \\
&\quad =\ [\![A = A']\!]^{\mathbb{P}} \to \bigwedge_{u\in V^{\mathbb{P}}} \big([\![u \in A']\!]^{\mathbb{P}} \leftrightarrow [\![(\exists p \in G)\ (u,p) \in \check{N}_0]\!]^{\mathbb{P}}\big) \;=\; 1_{\mathbb{B}}.
\end{aligned}
$$

Y por lo tanto:

$$
[\![(\forall A \subseteq \check{V})\,(\exists N \in \check{V})\,\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow (\exists p \in G)\ (x,p) \in N)]\!]^{\mathbb{P}} \;=\; \bigwedge_{A\in V^{\mathbb{P}}} 1_{\mathbb{B}} \;=\; 1_{\mathbb{B}}. \qquad \square
$$

Corrección y conservatividad

- En las Prop. 1–5, demostramos que $\mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{P}} \models \varphi$ para cada axioma φ de $\mathscr{T}^*$, y por lo tanto:

Teorema (Corrección)

Si $\mathscr{T}^* \vdash \varphi$, entonces $\mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{P}} \models \varphi$ (para toda sentencia $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*}$)

- **Obs.:** Este resultado ya implica que $\mathscr{T}^*$ es consistente relativamente a $\mathscr{T}$.

Teorema (Conservatividad relativamente a $\check{V}$) (recordatorio)

La teoría $\mathscr{T}^*$ es una extensión conservativa de $\mathscr{T}$ relativamente a $\check{V}$:

$\mathscr{T} \vdash \varphi$ sii $\mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}}$ (para toda sentencia $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$)

Demo. La implicación directa es el principio de importación. Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{T}^* \vdash \varphi^{\check{V}}$. Entonces $\mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{P}} \models \varphi^{\check{V}}$ (por el teorema de corrección). Pero también tenemos que $\mathscr{T} \vdash \varphi \Leftrightarrow V^{\mathbb{P}} \models \varphi^{\check{V}}$ (por el Lema 3.2), y por lo tanto $\mathscr{T} \vdash \varphi$. $\square$

Corolario: Las teorías $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}^*$ son equiconsistentes

Corrección y completitud

- Vimos que el teorema de conservatividad (relativamente a $\check{V}$) es una consecuencia del teorema de corrección, que expresa que:

Si $\quad \mathscr{T}^* \vdash \varphi, \quad$ entonces $\quad \mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{P}} \models \varphi \qquad$ (para toda sentencia $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*}$)

- Se puede refinar el resultado anterior del siguiente modo:

Teorema (Completitud)

Para toda sentencia $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*}$: $\qquad \mathscr{T}^* \vdash \varphi \quad$ sii $\quad \mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{P}} \models \varphi$

- El sistema de axiomas de la teoría $\mathscr{T}^*$ es bastante expresivo para capturar todas la sentencias del lenguaje de $\mathscr{T}^*$ que se cumplen en el modelo booleano $V^{\mathbb{P}}$ adentro de la teoría $\mathscr{T}$

- **Obs.:** Se puede ver la teoría $\mathscr{T}^*$ como la preimagen de la teoría $\mathscr{T}$ por la traducción $(V^{\mathbb{P}} \models \cdot) \;:\; \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*} \to \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$:

$$\mathscr{T}^* \;=\; (V^{\mathbb{P}} \models \cdot)^{-1}(\mathscr{T})$$

Demostración del teorema de completitud (1/3)

- La construcción del modelo booleano de $\mathscr{T}^*$ adentro de la teoría $\mathscr{T}$ se puede importar en la teoría $\mathscr{T}^*$ del modo siguiente:
  - Se notan $\begin{cases} \mathbb{B} := \{X \in \mathfrak{P}^{\check{V}}(\mathbb{P}) : X = X^{\perp\perp}\} & (\in \check{V}) \\ \check{V}^{\mathbb{P}} := (V^{\mathbb{P}})^{\check{V}} & (\subseteq \check{V}) \end{cases}$
  - Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje de $\mathscr{T}^*$, se nota
  $$[\![\varphi(\cdot)]\!]^{\mathbb{P}} \ : \ (\check{V}^{\mathbb{P}})^n \to \mathbb{B}$$
  a la funcional de interpretación de la fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en el modelo booleano $\check{V}^{\mathbb{P}} \subseteq \check{V}$
- En la teoría $\mathscr{T}^*$, se considera la funcional $(u \mapsto u^G) \ : \ \check{V}^{\mathbb{P}} \to V$ definida por $\in$-recursión sobre $u \in \check{V}^{\mathbb{P}}$ por:
$$u^G \ := \ \{v^G : (\exists p \in G)\ (v, p) \in u\} \ = \ I_G^{\infty}(u)$$
- Ya demostramos el

Teorema: $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad \forall x\ (\exists u \in \check{V}^{\mathbb{P}})\ x = u^G$

Demostración del teorema de completitud (2/3)

- Además, tenemos que:

Lema

(1) $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall u, v \in V^{\mathbb{P}}) \left(u^G = v^G \ \Leftrightarrow\ [\![u = v]\!]^{\mathbb{P}} \cap G \neq \varnothing\right)$

(2) $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall u, v \in V^{\mathbb{P}}) \left(u^G \in v^G \ \Leftrightarrow\ [\![u \in v]\!]^{\mathbb{P}} \cap G \neq \varnothing\right)$

(3) $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall \vec{u} \in V^{\mathbb{P}}) \left(R(\vec{u}^G) \ \Leftrightarrow\ [\![R(\vec{u})]\!]^{\mathbb{P}} \cap G \neq \varnothing\right)$

(4) $(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall u \in V^{\mathbb{P}}) \left(u^G \in \check{V} \ \Leftrightarrow\ [\![u \in \check{V}]\!]^{\mathbb{P}} \cap G \neq \varnothing\right)$

Demo. Ejercicio

- Y por lo tanto:

Proposición

Para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje de $\mathscr{T}^*$, tenemos que:

$$(\mathscr{T}^* \vdash) \quad (\forall u_1, \ldots, u_n \in V^{\mathbb{P}}) \left(\varphi(u_1^G, \ldots, u_n^G) \ \Leftrightarrow\ [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{P}} \cap G \neq \varnothing\right)$$

Demo. Ejercicio

Demostración del teorema de completitud (3/3)

Teorema (Completitud) (recordatorio)

Para toda sentencia $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*}$: $\quad \mathscr{T}^* \vdash \varphi$ **sii** $\mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{P}} \models \varphi$

Demo. Ya demostramos la implicación directa (corrección). Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{T} \vdash V^{\mathbb{P}} \models \varphi$, es decir $\mathscr{T} \vdash [\![\varphi]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}}$. Entonces $\mathscr{T}^* \vdash ([\![\varphi]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}})^{\check{V}}$ (por importación), es decir $\mathscr{T}^* \vdash [\![\varphi]\!]^{\mathbb{P}} = 1_{\mathbb{B}}$, y luego $\mathscr{T}^* \vdash [\![\varphi]\!]^{\mathbb{P}} \cap G \neq \varnothing$. Por la Prop. anterior, también tenemos que $\mathscr{T}^* \vdash \varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]^{\mathbb{P}} \cap G \neq \varnothing$, y por lo tanto: $\mathscr{T}^* \vdash \varphi$. □

- **Conclusión:** La teoría $\mathscr{T}^*$ es la **preimagen** de la teoría de base $\mathscr{T}$ por la traducción $(V^{\mathbb{P}} \models \cdot) : \mathscr{L}_{\mathscr{T}^*} \to \mathscr{L}_{\mathscr{T}}$:

$$\mathscr{T}^* \;=\; (V^{\mathbb{P}} \models \cdot)^{-1}(\mathscr{T})$$