Práctico 1: Cardinales y axioma de elección

En lo que sigue, se trabaja en ZFC (= ZF + AC), salvo indicación en contrario.

Los cardinales y su aritmética Se recuerda que un ordinal κ es un *cardinal* (notación: $Cn(\kappa)$) cuando no es equipotente a ningún ordinal menor que sí mismo, es decir:

$$Cn(\kappa) \quad :\equiv \quad On(\kappa) \ \wedge \ (\forall \alpha < \kappa)\, \alpha \not\approx \kappa\,.$$

Cabe destacar que todos los ordinales finitos son cardinales, mientras el mínimo cardinal infinito es el ordinal ω (= $\mathbb{N}$), que se suele escribir $\aleph_0$ como cardinal. Por el teorema de Zermelo (que sigue de AC), todo conjunto X admite un buen orden, y luego es equipotente a algún ordinal (en general no único). Se llama *cardinal* de X y se escribe $\mathrm{Card}(X)$ al mínimo ordinal equipotente a X (que es necesariamente un cardinal). Por construcción, tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y) & \Leftrightarrow & \text{existe } f : X \xrightarrow{\sim} Y \text{ biyectiva} \\
& & \text{(notación: } X \sim Y\text{)} \\
\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y) & \Leftrightarrow & \text{existe } f : X \hookrightarrow Y \text{ inyectiva}
\end{array}$$

Se definen la *suma* y el *producto* de una familia cualquiera de cardinales $(\kappa_i)_{i\in I}$ como el cardinal de la suma directa y del producto cartesiano de dicha familia:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \ := \ \mathrm{Card}\Big(\sum_{i\in I} \kappa_i\Big) \qquad \text{y} \qquad \prod_{i\in I} \kappa_i \ := \ \mathrm{Card}\Big(\prod_{i\in I} \kappa_i\Big)$$

En particular, la *suma*, el *producto* y la *potencia* de dos cardinales κ y μ son definidos por:

$$\begin{array}{rcll}
\kappa + \mu & := & \mathrm{Card}(\kappa + \mu) & \text{(cardinal de la suma directa binaria)} \\
\kappa\mu & := & \mathrm{Card}(\kappa \times \mu) & \text{(cardinal del producto cartesiano binario)} \\
\kappa^\mu & := & \mathrm{Card}(\kappa^\mu) & \text{(cardinal del conjunto de las funciones } f : \mu \to \kappa\text{)}
\end{array}$$

Ejercicio 1. (1) A partir de las definiciones anteriores, demostrar que las siguientes identidades se cumplen para todos cardinales κ, μ y ν:

$$\begin{array}{rclrclrclrcl}
\kappa + \mu & = & \mu + \kappa & \kappa\mu & = & \mu\kappa & \kappa^0 & = & 1 & 0^\mu & = & 0 \quad (\text{si } \mu \geq 1) \\
(\kappa + \mu) + \nu & = & \kappa + (\mu + \nu) & (\kappa\mu)\nu & = & \kappa(\mu\nu) & \kappa^1 & = & \kappa & 1^\mu & = & 1 \\
\kappa + 0 \ = \ 0 + \kappa & = & \kappa & \kappa 1 \ = \ 1\kappa & = & \kappa & \kappa^{\mu+\nu} & = & \kappa^\mu \kappa^\nu & & & \\
\kappa(\mu + \nu) & = & \kappa\mu + \kappa\nu & \kappa 0 \ = \ 0\kappa & = & 0 & (\kappa^\mu)^\nu & = & \kappa^{\mu\nu} & & &
\end{array}$$

(2) Demostrar que para todos cardinales κ, κ', μ y μ', tenemos que:

$$\begin{array}{rclrcl}
\kappa \leq \kappa' & \Rightarrow & \kappa + \mu \leq \kappa' + \mu & \kappa \leq \kappa' & \Rightarrow & \kappa^\mu \leq \kappa'^\mu \\
\kappa \leq \kappa' & \Rightarrow & \kappa\mu \leq \kappa'\mu & \kappa \geq 1 \wedge \mu \leq \mu' & \Rightarrow & \kappa^\mu \leq \kappa^{\mu'}
\end{array}$$

(3) Demostrar que para todo cardinal κ y para toda familia $(\mu_i)_{i\in I}$ de cardinales, tenemos que

$$\kappa\Big(\sum_{i\in I} \mu_i\Big) \ = \ \sum_{i\in I} \kappa\mu_i \qquad \text{y} \qquad \kappa^{\sum_{i\in I}\mu_i} \ = \ \prod_{i\in I} \kappa^{\mu_i}\,.$$

Cardinales infinitos

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es demostrar *sin axioma de elección* (y por lo tanto: *sin usar la teoría de los cardinales*) que todo ordinal infinito λ es equipotente al producto cartesiano $\lambda\times\lambda$, es decir: $\lambda\sim(\lambda\times\lambda)$. Para ello, se supone por el absurdo que no es el caso, y se escribe λ al ordinal infinito más pequeño tal que $\lambda\nsim\lambda\times\lambda$. Se equipa el producto cartesiano $\lambda\times\lambda$ con la relación binaria $(\leq_2)$ definida[1] por

$$\begin{array}{rcll}(x_1,y_1)\leq_2(x_2,y_2) & \equiv & \text{máx}(x_1,y_1)<\text{máx}(x_2,y_2) & \vee\\ & & (\text{máx}(x_1,y_1)=\text{máx}(x_2,y_2)\wedge x_1<x_2) & \vee\\ & & (\text{máx}(x_1,y_1)=\text{máx}(x_2,y_2)\wedge x_1=x_2\wedge y_1\leq y_2) & \end{array}$$

para todos $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\lambda\times\lambda$.

(1) Demostrar que la relación $(\leq_2)$ es un buen orden sobre $\lambda\times\lambda$.
(2) Construir un encaje de conjuntos (bien) ordenados $f:(\lambda,\leq)\hookrightarrow(\lambda\times\lambda,\leq_2)$, es decir: una función $f:\lambda\to\lambda\times\lambda$ tal que $(\forall x,y\in\lambda)\,(x\leq y\Leftrightarrow f(x)\leq_2 f(y))$.

En lo siguiente, se escriben μ al único ordinal isomorfo al conjunto bien ordenado $(\lambda\times\lambda,\leq_2)$, y $h:(\lambda\times\lambda)\xrightarrow{\sim}\mu$ al isomorfismo correspondiente.

(3) Deducir de lo anterior que $\lambda<\mu$.

Como $\lambda\in\mu$, se definen $(\alpha,\beta):=h^{-1}(\lambda)\ (\in\lambda\times\lambda)$ y $\gamma:=\text{máx}(\alpha,\beta)+1$.

(4) Demostrar que el ordinal λ es isomorfo al segmento inicial $Seg(\alpha,\beta)$ en $(\lambda\times\lambda,\leq_2)$.
(5) Demostrar que $Seg(\alpha,\beta)\subseteq(\gamma\times\gamma)$. Deducir que el ordinal γ es infinito.
(6) Deducir de lo anterior que existe una inyección $\lambda\hookrightarrow\gamma$.
(7) Mostrar que (6) lleva a una contradicción, lo que acaba la demostración del resultado.

Ejercicio 3 (Aritmética de los cardinales infinitos)**.**

(1) Deducir del Ejercicio 2 que $\kappa^2=\kappa$ para todo cardinal infinito κ.
(2) Deducir que si κ,μ son cardinales infinitos y n un cardinal finito, entonces:

$$\begin{array}{rclcl}\kappa+\mu&=&\kappa\mu&=&\text{máx}(\kappa,\mu)\qquad\qquad \kappa+n=\kappa\\ \kappa n&=&\kappa^n&=&\kappa\quad(\text{si } n\geq1)\qquad\qquad n^\mu=2^\mu\quad(\text{si } n\geq2)\end{array}$$

(3) Demostrar que si κ y μ son cardinales infinitos, entonces:

$$\text{máx}(\kappa,2^\mu)\ \leq\ \kappa^\mu\ \leq\ \text{máx}(2^\kappa,2^\mu)$$

Demostrar que $\kappa\leq2^\mu$ implica que $\kappa^\mu=2^\mu$.

La jerarquía de los cardinales infinitos Para todo cardinal κ, existe un menor cardinal mayor a κ, que se llama el *cardinal sucesor* de κ y se escribe κ^+. La clase (propia) de los cardinales infinitos forma una sucesión transfinita $(\aleph_\alpha)_{\alpha\in On}$ definida por:

$$\aleph_0:=\omega,\qquad\aleph_{\alpha+1}:=\aleph_\alpha^+\qquad\text{y}\qquad\aleph_\lambda:=\sup_{\alpha<\lambda}\aleph_\alpha\qquad(\lambda\text{ ordinal límite})$$

[1] Esta definición es debida a Kurt Gödel.

Ejercicio 4 (Teorema de König)**.** Sean $(A_i)_{i\in I}$ y $(B_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos (I cualquiera), tales que $\mathrm{Card}(A_i) < \mathrm{Card}(B_i)$ para todo $i \in I$. Se escriben:

- $S := \sum_{i\in I} A_i$ a la suma directa de la familia $(A_i)_{i\in I}$, equipada con la familia de las inyecciones canónicas $\sigma_i : A_i \to S$ $(i \in I)$.
- $P := \prod_{i\in I} B_i$ al producto cartesiano (generalizado) de la familia $(B_i)_{i\in I}$, equipado con la familia de las proyecciones $\pi_i : P \to B_i$ $(i \in I)$.

Sea $f : S \to P$ una función cualquiera. Para todo $i \in I$, se considera la función $f_i : A_i \to B_i$ definida por $f_i := \pi_i \circ f \circ \sigma_i$.

(1) Demostrar que existe un elemento $p \in P$ tal que $\pi_i(p) \notin \mathrm{img}(f_i)$ para todo $i \in I$. (*Sugerencia:* usar la hipótesis $\mathrm{Card}(A_i) < \mathrm{Card}(B_i)$.)

(2) Demostrar que $p \notin \mathrm{img}(f)$, y deducir que la función f no es sobreyectiva.

(3) Deducir de lo anterior el teorema de König:

Si $(\kappa_i)_{i\in I}$ y $(\mu_i)_{i\in I}$ son dos familias de cardinales indizadas por un conjunto I cualquiera, tales que $\kappa_i < \mu_i$ para todo $i \in I$, entonces:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \;<\; \prod_{i\in I} \mu_i\,.$$

¿Qué se observa en el caso particular donde $\kappa_i = 1$ y $\mu_i = 2$ para todo $i \in I$?

Ejercicio 5 (Aplicación del teorema de König)**.** En este ejercicio, se trabaja en ZFC.

(1) Demostrar que: $\displaystyle\sum_{n\in\omega} \aleph_n \;=\; \aleph_\omega$.

(2) Con el teorema de König (Ejercicio 4), deducir que: $\aleph_\omega < \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Se recuerda que $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathfrak{P}(\omega)) = 2^{\aleph_0}$ («potencia del continuo»).

(3) Deducir de lo anterior que $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Axioma de elección dependiente El *axioma de elección dependiente* (DC)[(2)] es una forma débil del axioma de elección (AC) dada por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}(\forall A \neq \varnothing)(\forall R \subseteq A \times A)\,[(\forall x \in A)(\exists y \in A)\, x\,R\,y \;\Rightarrow\\ (\exists (x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega)(\forall n \in \omega)\, x_n\,R\,x_{n+1}]\end{aligned} \tag{DC}$$

Así, a partir de un conjunto $A \neq \varnothing$ y de una relación $R \subseteq A \times A$ tal que $(\forall x \in A)(\exists y \in A)\, x\,R\,y$, este axioma elige una sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega$ tal que $x_0\,R\,x_1\,R\,x_2\,R\,x_3 \cdots x_n\,R\,x_{n+1} \cdots$

Ejercicio 6. Demostrar en ZF que: AC $\Rightarrow$ DC.

A veces, se considera la siguiente formulación del axioma de elección dependiente, que permite fijar el primer elemento $x_0 = x$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega$:

$$\begin{aligned}\forall A\, (\forall R \subseteq A \times A)\,[(\forall x \in A)(\exists y \in A)\, x\,R\,y \;\Rightarrow\\ (\forall x \in A)(\exists (x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega)(x_0 = x \wedge (\forall n \in \omega)\, x_n\,R\,x_{n+1})]\end{aligned} \tag{DC_0}$$

[(2)] *Axiom of dependent choices* en inglés.

Ejercicio 7. Demostrar en ZF que: $\mathrm{DC}_0 \Leftrightarrow \mathrm{DC}$.

(*Sugerencia:* para demostrar la implicación $\mathrm{DC} \Rightarrow \mathrm{DC}_0$ con un elemento inicial $x \in A$ fijado, se puede considerar el conjunto A' formado por todas las sucesiones finitas $(x_i)_{i \le n} \in A^{[0..n]}$ tales que $x_0 = x$ y $x_{i-1} \, R \, x_i$ para todo $i \in [1..n]$, equipado con la relación $R' \subseteq A' \times A'$ definida por: $(x_i)_{i \le n} \, R' \, (y_i)_{i \le m} \;\equiv\; m = n + 1 \wedge (\forall i \le n) \, x_i = y_i$.)

Ejercicio 8 (Relaciones bien fundadas y axioma de elección dependiente)**.** Sea R una relación binaria sobre un conjunto X.

(1) Demostrar en ZF que si R es bien fundada sobre X, entonces no existe ninguna sucesión $(x_n)_{n \in \omega}$ tal que $R(x_{n+1}, x_n)$ para todo $n \in \omega$.
(2) Demostrar el recíproco en ZF + DC.

Ejercicio 9. Demostrar en ZF + DC el Teorema de Baire:

En un espacio métrico completo X, la intersección de cualquier familia numerable de subconjuntos abiertos densos de X es un subconjunto denso de X.

Axioma de elección numerable El *axioma de elección numerable* (AC_ω) es una forma débil del axioma de elección (AC) dada por la siguiente fórmula:

$$\forall (A_n)_{n \in \omega} \left[(\forall n \in \omega) \, A_n \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \left(\prod_{n \in \omega} A_n \right) \neq \varnothing \right].$$

Ejercicio 10. Demostrar en ZF que $\mathrm{DC}_0 \Rightarrow \mathrm{AC}_\omega$, donde DC_0 es el axioma de elección dependiente con elemento inicial fijado. Deducir (en ZF) que: $\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{DC} \Rightarrow \mathrm{AC}_\omega$.

Se recuerda que un conjunto A es:

- *finito* cuando $A \sim n$ para algún $n \in \omega$;
- *infinito* cuando $A \nsim n$ para todo $n \in \omega$;
- *Dedekind-infinito* cuando existe una función $f : A \to A$ inyectiva y no sobreyectiva.

Ejercicio 11. Sea A un conjunto.

(1) Demostrar en ZF (sin AC_ω) que si A es Dedekind-infinito, entonces A es infinito.
(2) Demostrar en ZF + AC_ω que si A es infinito, entonces A es Dedekind-infinito.
Sugerencia: Demostrar que si A es infinito, entonces existe una función inyectiva $f_n : n \hookrightarrow A$ para cada $n \in \omega$.