Práctico 2: Modelos de Fraenkel-Mostowski

ZF sin axioma de fundación En lo que sigue, se trabaja en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel sin axioma de fundación: $\mathrm{ZF}^- := \mathrm{ZF} - \mathrm{AF}$, y se nota $\mathscr{U} := \{x : x = x\}$ a la clase universal. Se define la jerarquía acumulativa $(V_\alpha)_{\alpha\in On}$ por $V_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(V_\beta)$ (para todo $\alpha \in On$), y se escribe $V := \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$ a su unión transfinita (que no necesariamente coincide con $\mathscr{U}$).

Se recuerda que la *clausura transitiva* de un conjunto a, notada $Cl(a)$, es el menor conjunto transitivo que contiene a como subconjunto: $Cl(a) = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup^n a$.

Ejercicio 1 (Consistencia relativa del axioma de la fundación)**.** Se dice que un conjunto a es *bien fundado* cuando la relación $\in$ es bien fundada en $Cl(a)$, la clausura transitiva de a:

$$a \text{ bien fundado} \quad :\equiv \quad (\forall X \subseteq Cl(a))(X \neq \varnothing \;\Rightarrow\; (\exists x \in X)\, x \cap X = \varnothing)$$

(1) Demostrar que un conjunto es bien fundado si y sólo si todos sus elementos lo son.
(2) Deducir de lo anterior que si a y b son bien fundados, entonces $\{a, b\}$, $\bigcup a$ y todos los subconjuntos de a son bien fundados, así como el conjunto potencia $\mathfrak{P}(a)$.
(3) Demostrar (en ZF^-) que V es la clase de los conjuntos bien fundados.
(4) Demostrar (en ZF^-) que $(V, \in) \models \mathrm{ZF}$, es decir: $(V, \in) \models \phi$ para cada axioma ϕ de ZF.
(5) Concluir que las teorías ZF y ZF^- son equiconsistentes.

Ejercicio 2 (Consistencia de la negación del axioma de infinitud)**.** En este ejercicio, se nota $\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$ a ZF en que el axioma de infinitud ha sido reemplazado por su negación: «todos los conjuntos son finitos». (Los otros axiomas y esquemas se mantienen iguales.)

(1) Demostrar (en ZF^-) que $(V_\omega, \in) \models \mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$.
(2) Deducir (en ZF^-) que $Cons(\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}})$.

Observación: Se puede demostrar que $\mathrm{ZF}_{\mathrm{fin}}$ es equiconsistente con PA (Aritmética de Peano).

Ejercicio 3 (Cardinales inaccesibles)**.** En ZFC, se dice que un cardinal λ es *inaccesible* cuando:

(*i*) $\lambda > \aleph_0$;
(*ii*) Si κ es un cardinal $< \lambda$, entonces $2^\kappa < \lambda$;
(*iii*) Si $(\kappa_i)_{i\in I}$ es una familia de cardinales $< \lambda$ indizada por un conjunto I de cardinal $|I| < \lambda$, entonces $\sup_{i\in I} \kappa_i < \lambda$.

Un cardinal es *accesible* cuando no es inaccesible.

(1) Demostrar (en ZFC) que si λ es un cardinal inaccesible, entonces
$$|V_\lambda| = \lambda \qquad \text{y} \qquad \forall a\, (a \in V_\lambda \;\Leftrightarrow\; a \subseteq V_\lambda \wedge |a| < \lambda)$$
(2) Demostrar (en ZFC) que si λ es un cardinal inaccessible, entonces $(V_\lambda, \in) \models \mathrm{ZFC}$.

Se escribe CI al axioma: «existe un cardinal inaccesible».

(3) Deducir de lo anterior que $\mathrm{ZFC} < \mathrm{ZFC} + \mathrm{CI}$.

Sea Λ la clase de todos los ordinales menores que todo cardinal inaccesible, y $V_\Lambda := \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$. (Observar que si $\mathscr{U}$ satisface CI, entonces Λ es el primer cardinal inaccesible y V_Λ es un conjunto, mientras que si $\mathscr{U}$ no satisface CI, entonces $\Lambda = On$ y $V_\Lambda = V$.)

(4) Demostrar (en ZFC) que $(V_\Lambda, \in) \models \mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CI}$.

(5) Deducir de lo anterior que $\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CI} \approx \mathrm{ZFC}$ (equiconsistencia).

Ejercicio 4 (Modelos con átomos)**.** Se llama *átomo* a todo conjunto x que es su propio conjunto unitario: $x = \{x\}$. El objetivo de este ejercicio es demostrar la independencia de la fórmula «existe un átomo» con respecto a ZF^-. Para ello, se considera una relación binaria $\Phi(x, y)$ que realiza una biyección de $\mathscr{U}$ sobre $\mathscr{U}$ (en ZF), en el sentido en que

$$\forall x\, \exists! y\, \Phi(x, y) \ \wedge\ \forall y\, \exists! x\, \Phi(x, y),$$

y se nota $\in'$ a la relación binaria sobre $\mathscr{U}$ definida por: $\quad y \in' x$ sii $y \in \Phi(x) \qquad (x, y \in \mathscr{U})$.

(1) Demostrar en ZF que $(\mathscr{U}, \in') \models \mathrm{ZF}^-$.

(2) Demostrar en ZFC que $(\mathscr{U}, \in') \models \mathrm{AC}$.

Se considera ahora la biyección $\Phi : \mathscr{U} \xrightarrow{\sim} \mathscr{U}$ definida por

$$\Phi(x, y) \ :\equiv\ (x = 0 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge y = 0) \vee (x \notin \{0, 1\} \wedge y = x)$$

(3) Demostrar en ZF (con el Φ anterior) que $(\mathscr{U}, \in') \models$ «existe un átomo».
(*Sugerencia:* Considerar el conjunto $0 = \varnothing$ en el modelo $(\mathscr{U}, \in')$.)

(4) Concluir que la fórmula «existe un átomo» es independiente de ZF^-.

(5) Modificar la biyección Φ para que el modelo $(\mathscr{U}, \in')$ satisfaga (en ZF) la fórmula:
«la clase de los átomos es un conjunto numerable», es decir:

$$\exists A\ [\forall x\, (x \in A \ \Leftrightarrow\ x = \{x\}) \ \wedge\ (\exists f \in A^\omega)\ f \text{ biyectiva}]\,.$$

Ejercicio 5 (Consistencia relativa de AC en ZF)**.** En este ejercicio, se trabaja en ZF (sin AC).

(1) Construir (en ZF) una funcional $J(\alpha, u)$ que establece una biyección entre On y la clase $On^* := \bigcup_{n\in\omega} On^n$ de las tuplas de ordinales. (*Sugerencia:* Se puede construir antes una fórmula $R(u, v)$ que define un buen orden sobre On^*.)

(2) Construir (en ZF) una funcional $K(n, x)$ que establece una biyección entre ω y V_ω.

Dados un conjunto X y una fórmula interna $f \in Form_{n+1}$ (para algún $n \in \omega$) con parámetros $(a_1, \ldots, a_n) \in X^n$, se escribe

$$Val(f, (a_1, \ldots, a_n), X) \ :=\ \{a \in X \ :\ (X, \in) \models f(a, a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Se dice que un conjunto a es *ordinal-definible* (notación: $OD(x)$) cuando existe un ordinal α y una fórmula interna $f \in Form_{n+1}$ (para algún $n \in \omega$) con parámetros ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \alpha$ tales que $Val(f, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), V_\alpha) = \{a\}$. Formalmente:

$$OD(a) \ :\equiv\ (\exists\alpha \in On)(\exists n \in \omega)(\exists f \in Form_{n+1})(\exists\vec{\alpha} \in \alpha^n)\ Val(f, \vec{\alpha}, V_\alpha) = \{a\}.$$

(3) Sea $\phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ una fórmula externa con una única variable libre x y cuyos parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son ordinales. Demostrar que si existe un único conjunto a tal que $\phi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, entonces el conjunto a es ordinal-definible.

(4) (Recíproco:) Usando las funcionales J y K definidas en (1) y (2), construir una fórmula externa $\Phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ con $n+1$ variables libres $x, x_1, \ldots, x_n$ tal que para todo $a \in OD$, existen ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\forall x\, (\Phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \ \Leftrightarrow\ x = a).$$

Como es posible que un conjunto ordinal-definible tenga un elemento no ordinal-definible[(1)], se considera la clase HOD de los conjuntos *hereditariamente ordinal-definibles*, escribiendo:

$$HOD(x) \quad :\equiv \quad (\forall y \in Cl(\{x\}))\, OD(y).$$

(donde $Cl(\{x\})$ es la clausura transitiva de $\{x\}$).

(5) Verificar (en ZF) que $\forall x\, (x \in HOD \ \Leftrightarrow\ x \in OD \wedge x \subseteq HOD)$.
(6) Demostrar (en ZF) que $(HOD, \in) \models$ ZF.
(7) Demostrar (en ZF) que $(HOD, \in) \models$ AC, y concluir que ZFC $\approx$ ZF.

Ejercicio 6 (Consistencia relativa de $\neg$AC en ZF$^-$)**.** En este ejercicio, se trabaja en la teoría

$$\mathscr{T}_0 \ :=\ \text{ZF}^- + \text{«la clase de los átomos es un conjunto numerable»}.$$

(Vimos en el Ejercicio 4 (5) que la teoría $\mathscr{T}_0$ es consistente relativamente a ZF.) Se escribe A al conjunto (numerable) de todos los átomos, y se considera la sucesión transfinita $(W_\alpha)_{\alpha\in On}$ definida por $W_0 := A$ y $W_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(W_\beta)$ para todo ordinal $\alpha > 0$.

(1) Demostrar (en $\mathscr{T}_0$) que W_α es un conjunto transitivo para todo $\alpha \in On$. Deducir que $W_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(W_\alpha)$ para todo ordinal α, y $W_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} W_\alpha$ para todo ordinal límite λ.
(2) Sea $W := \bigcup_{\alpha\in On} W_\alpha$. Demostrar (en $\mathscr{T}_0$) que

$$(W, \in) \ \models\ \mathscr{T}_0 \ +\ \forall x\, (x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \varnothing \vee y = \{y\}))$$

A partir de ahora se trabaja en la teoría $\mathscr{T}_1 := \mathscr{T}_0 + \forall x\, (x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \varnothing \vee y = \{y\}))$. (Vimos en (2) que $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_0 \leq$ ZF.) Como anteriormente, se considera la jerarquía $(W_\alpha)_{\alpha\in On}$ definida por $W_0 := A$ y $W_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(W_\beta)$ para todo ordinal $\alpha > 0$, y se nota $W := \bigcup_{\alpha\in On} W_\alpha$.

(3) Demostrar (en $\mathscr{T}_1$) que $W = \mathscr{U}$.

Sea S_A el grupo de las permutaciones del conjunto A.

(4) Definir una funcional "$y = \sigma \cdot x$" que extiende la función $(\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$ (: $S_A \times A \to A$) en una acción del grupo S_A sobre el universo, de tal modo que

$$\sigma \cdot x = \{\sigma \cdot y \ :\ y \in x\} \qquad \text{(para todo conjunto } x\text{)}$$

(5) Verificar que $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ para todos $\sigma \in S_A$ y $\alpha \in On$[(2)].
(6) Demostrar que para toda fórmula externa $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, tenemos que

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)(\phi(\sigma \cdot x_1, \ldots, \sigma \cdot x_n) \ \Leftrightarrow\ \phi(x_1, \ldots, x_n))$$

(*Sugerencia:* Razonar por inducción externa sobre $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.)

[(1)] La fórmula «OD es una clase transitiva» es indecidible en ZF.
[(2)] Y más generalmente $\sigma \cdot x = x$ para todo $x \in V$ $(= \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha)$.

Se dice que un conjunto a es *definible en términos de ordinales y átomos* (notación: $OAD(x)$) cuando existe un ordinal α y una fórmula $f \in Form_{n+p+1}$ (para algunos $n, p \in \omega$) con parámetros $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, a_1, \ldots, a_p) \in \alpha^n \times A^p$, tales que $Val(f, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, a_1, \ldots, a_p), W_\alpha) = \{a\}$. Formalmente:

$$\begin{aligned} OAD(a) \quad :\equiv \quad & (\exists \alpha \in On)(\exists n, p \in \omega)(\exists f \in Form_{n+p+1}) \\ & (\exists \vec{\alpha} \in \alpha^n)(\exists \vec{a} \in A^p)\, Val(f, (\vec{\alpha}, \vec{a}), W_\alpha) = \{a\}. \end{aligned}$$

(7) Sea $\phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, u)$ una fórmula externa con una única variable libre x y cuyos parámetros son n ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y una sucesión finita u de átomos[(3)]. Demostrar que si existe un único conjunto a tal que $\phi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, u)$, entonces $a \in OAD$.

(8) (Recíproco:) Construir una fórmula externa $\Phi(x, x_1, \ldots, x_n, y)$ con $n + 2$ variables libres $x, x_1, \ldots, x_n, y$ tal que para todo $a \in OAD$, existen ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y una sucesión finita u de átomos tales que

$$\forall x\, (\Phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, u) \;\Leftrightarrow\; x = a).$$

Se considera la clase $HOAD$ de los conjuntos *hereditariamente definibles en términos de ordinales y átomos*, escribiendo:

$$HOAD(x) \quad :\equiv \quad (\forall y \in Cl(\{x\}))\, OAD(y).$$

(9) Verificar (en $\mathscr{T}_1$) que $\forall x\, (x \in HOAD \;\Leftrightarrow\; x \in OAD \wedge x \subseteq HOAD)$.

(10) Demostrar (en $\mathscr{T}_1$) que $(HOAD, \in) \models \mathrm{ZF}^-$.

(11) Demostrar (en $\mathscr{T}_1$) que $(HOAD, \in) \models (\forall X \subseteq A)(X \text{ finito} \vee X \text{ cofinito})$.

(12) Deducir que $(HOAD, \in) \models A \text{ infinito} \wedge A \text{ Dedekind-finito} \wedge \neg(A \text{ bien ordenable})$, y concluir que $\mathrm{ZF}^- + \neg\mathrm{AC}_\omega \;\approx\; \mathrm{ZF}$.

[(3)]Es decir una función $u : p \to A$ para algún $p \in \omega$. (El entero p es interno.)