Práctico 3: Álgebras booleanas

Retículos Se recuerda que un *retículo* es un conjunto ordenado $L = (L, \leq)$ en que todo par de elementos $x, y \in L$ tiene ínfimo (notación: $x \wedge y$) y supremo (notación: $x \vee y$). Un retículo L es *acotado* cuando tiene mínimo (notación: 0 o $\bot$) y máximo (notación: 1 o $\top$).

Ejercicio 1 (Retículos completos)**.** Demostrar que en cualquier retículo $L = (L, \leq)$, las siguientes aserciones son equivalentes:

(i) Todo subconjunto $X \subseteq L$ tiene ínfimo.
(ii) Todo subconjunto $X \subseteq L$ tiene supremo.

Cuando es el caso, se dice que L es un retículo *completo*.

Ejercicio 2 (Retículos distributivos)**.** Sea $L = (L, \leq)$ un retículo.

(1) Demostrar que para todos $x, y \in L$, tenemos que
$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \wedge y = x \quad \Leftrightarrow \quad x \vee y = y$$
y deducir que $\qquad x \wedge (y \vee x) = x \vee (y \wedge x) = x\,.$

(2) Verificar que para todos $x, y, z \in L$, tenemos que:
$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \text{y} \qquad x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

(3) Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes:
(3.1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ para todos $x, y, z \in L$;
(3.2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ para todos $x, y, z \in L$.

Cuando (3.1) y (3.2) se cumplen, se dice que L es un retículo *distributivo*.

Ejercicio 3 (Distributividad infinitaria)**.** El objetivo de este ejercicio es mostrar que la propiedad de distributividad binaria $x \wedge (y_1 \vee y_2) = (x \wedge y_1) \vee (x \wedge y_2)$ no implica la propiedad de distributividad infinitaria: $x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i)$ (I cualquiera). Para ello, se considera el conjunto $\mathbb{N} := \omega$ equipado con el orden de divisibilidad: $x \leq y$ sii $y = xz$ para algún $z \in \mathbb{N}$.

(1) Demostrar que $(\mathbb{N}, \leq)$ es un retículo distributivo completo, con mínimo 1 y máximo 0. Para ello, se podrá observar que el subconjunto $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} - \{0\}$ equipado con el orden de divisibilidad $\leq$ es isomorfo al conjunto $\omega^{(\omega)}$ de las sucesiones de ordinales finitos con soporte finito, equipado con el orden producto $(\leq_\omega)^\omega$.

(2) Considerar el elemento $x := 2 \in \mathbb{N}$ así como el subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ formado por los números primos impares, y verificar que $x \wedge \bigvee Y \neq \bigvee (x \wedge Y)$.

Ejercicio 4 (Complementos)**.** Sea $L = (L, \leq)$ un retículo acotado. Dado un elemento $x \in L$, se llama *complemento* de x a todo elemento $x' \in L$ tal que $x \wedge x' = 0$ y $x \vee x' = 1$. Cuando todos los elementos de L tienen un complemento, se dice que el retículo L es *complementado*.

(1) Demostrar que si el retículo L es distributivo, entonces el complemento de un elemento de L, cuando existe, es único.

(2) Dar un ejemplo de retículo acotado y complementado en que todos los elementos distintos de 0 y 1 tienen al menos dos complementos distintos.

Álgebras booleanas Se recuerda que un *álgebra booleana* es un retículo acotado, distributivo y complementado. Un álgebra booleana es *completa* cuando el retículo subyacente es completo.

Ejercicio 5 (Álgebras booleanas)**.** Sea B un álgebra booleana.

(1) Verificar que $\neg\neg x = x$ para todo $x \in B$.
(2) Demostrar que $x \leq y$ sii $\neg y \leq \neg x$ para todos $x, y \in B$.
(3) Deducir que $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ y $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ para todos $x, y \in B$.

Se define la *implicación* por $x \to y := \neg x \vee y$ $(x, y \in B)$.

(4) Demostrar que $x \wedge y \leq z$ sii $x \leq y \to z$ (para todos $x, y, z \in B$).
(5) Deducir que $x \leq y$ sii $x \to y = 1$ (para todos $x, y \in B$).
(6) Usando la equivalencia anterior, demostrar que toda álgebra booleana completa cumple la propiedad de distributividad infinitaria: $x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I}(x \wedge y_i)$ (I cualquiera).

Se definen la *equivalencia lógica* por $x \Leftrightarrow y := (x \to y) \wedge (y \to x)$ y la *diferencia simétrica* por $x \vartriangle y := \neg(x \leftrightarrow y) = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$ $(x, y \in B)$.

(7) Verificar que $x = y$ sii $x \leftrightarrow y = 1$ sii $x \vartriangle y = 0$ para todos $x, y \in B$.
(8) Demostrar que $\neg(x \leftrightarrow y) = \neg x \leftrightarrow y = x \leftrightarrow \neg y = x \vartriangle y$ para todos $x, y \in B$.

Ejercicio 6 (Álgebras de Heyting)**.** Sea $H = (H, \leq)$ un retículo. Dados $x, y \in H$, se llama *pseudocomplemento de x relativamente a y* al elemento $x \to y := \text{máx}\{z \in H : z \wedge x \leq y\}$, cuando dicho elemento (máximo) existe. Cuando el pseudocomplemento relativo $x \to y$ existe para todos $x, y \in H$, se dice que H está *pseudocomplementado*.

(1) Demostrar que $x \to y$, cuando existe, está caracterizado por la adjunción:
$$z \leq x \to y \quad \text{sii} \quad z \wedge x \leq y \qquad \text{(para todo } z \in H)$$

Se llama *álgebra de Heyting* a todo retículo acotado pseudocomplementado.

(2) Demostrar que toda álgebra booleana es un álgebra de Heyting.
(3) Demostrar que todo conjunto totalmente ordenado acotado es un álgebra de Heyting. ¿Cuándo es un álgebra booleana?
(4) Demostrar que toda topología $\mathcal{T}$ (sobre un conjunto X) es un álgebra de Heyting completa (con el orden de inclusión). ¿Cuándo es un álgebra booleana?

A partir de ahora, se supone que $H = (H, \leq)$ es un álgebra de Heyting.

(5) Deducir de (1) que $x \leq y$ sii $x \to y = 1$ para todos $x, y \in H$.
(6) Demostrar que la operación $\to$ es antítona por la izquierda y monótona por la derecha: Si $x' \leq x$ e $y \leq y'$, entonces $x \to y \leq x' \to y'$ (para todos $x, x', y, y' \in H$).
(7) Demostrar que para todos $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$, tenemos que:
$$\begin{aligned} x \to (x \wedge y) &= x \to y \\ (x_1 \wedge x_2) \to y &= x_1 \to (x_2 \to y) \\ x \to (y_1 \wedge y_2) &= (x \to y_1) \wedge (x \to y_2) \\ x \to (y_1 \vee y_2) &\geq (x \to y_1) \vee (x \to y_2) \end{aligned}$$
Justificar por qué la última desigualdad no es una igualdad.
(8) Deducir que toda álgebra de Heyting es un retículo distributivo. (*Sugerencia:* Calcular $x \wedge (y \vee z) \to (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.)

(9) Demostrar que si además el álgebra de Heyting H es completa, entonces:
$x \wedge \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I}(x \wedge y_i)$ para todo $x \in H$ e $(y_i)_{i\in I} \in H^I$ (I cualquiera).

(10) Demostrar que para todos $x_1, x_2, y \in H$, tenemos que:

$$(x_1 \vee x_2) \to y \;=\; (x_1 \to y) \wedge (x_2 \to y)$$

Para todo $x \in H$, se nota $\neg x := (x \to 0)$.

(11) Verificar que $x \wedge \neg x = 0$, $x \vee \neg x \leq 1$ y $x \leq \neg\neg x$ para todo $x \in H$.
Justificar por qué las última dos desigualdades no son igualdades.

(12) Demostrar que las siguientes aserciones son equivalentes:
 (i) H es un álgebra booleana;
 (ii) $\neg\neg x = x$ para todo $x \in H$;
 (iii) $x \vee \neg x = 1$ para todo $x \in H$.

Ejercicio 7 (Álgebra de Tarski-Lindenbaum)**.** Sea $\mathscr{T}$ una teoría de primer orden sobre un lenguaje $\mathscr{L}$. Se nota T_0 (resp. F_0) al conjunto de los términos cerrados (resp. al conjunto de las fórmulas cerradas) del lenguaje $\mathscr{L}$. Se equipa el conjunto F_0 con la equivalencia $\sim$ definida por $\varphi \sim \psi$ sii $\mathscr{T} \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ (para todos $\varphi, \psi \in F_0$), y se llama *álgebra de Tarski-Lindenbaum* de la teoría $\mathscr{T}$ al cociente $B_{\mathscr{T}} := F_0/\!\sim$ equipado con el orden $\leq$ definido por:

$$[\varphi] \leq [\psi] \;\text{ sii }\; \mathscr{T} \vdash \varphi \Rightarrow \psi$$

(1) Demostrar que $B_{\mathscr{T}}$ es un álgebra booleana, en que:
$[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$ y $\neg[\varphi] = [\neg\varphi]$ (para todos $\varphi, \psi \in F_0$)

(2) Verificar que:
 (i) $B_{\mathscr{T}} \cong \mathbf{1}$ sii $\mathscr{T}$ es inconsistente.
 (ii) $B_{\mathscr{T}} \cong \mathbf{2}$ sii $\mathscr{T}$ es consistente y completa.

(3) Demostrar que si la teoría $\mathscr{T}$ es Henkin-completa[1], entonces:

$$[\forall x\, \varphi(x)] \;=\; \bigwedge_{t\in T_0} [\varphi(t)] \qquad \text{y} \qquad [\exists x\, \varphi(x)] \;=\; \bigvee_{t\in T_0} [\varphi(t)]$$

para toda fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje $\mathscr{L}$ que depende de una sola variable x.

(4) ¿Qué pasa cuando $\mathscr{T}$ no es Henkin-completa?

Ejercicio 8 (Morfismos de álgebras booleanas)**.** Dadas álgebras booleanas B y B', se dice que una función $f : B \to B'$ es un *morfismo de álgebras booleanas* cuando:

$$\begin{array}{rclll} f(\neg x) & = & \neg f(x) & & \\ f(x \wedge y) & = & f(x) \wedge f(y) & \qquad f(0_B) = 0_{B'} & \qquad \text{(para todos } x, y \in B) \\ f(x \vee y) & = & f(x) \vee f(y) & \qquad f(1_B) = 1_{B'} & \end{array}$$

Se dice que $f : B \to B'$ es un *isomorfismo de álgebras booleanas* cuando además f es biyectiva y su inversa $f^{-1} : B' \to B$ es un morfismo de álgebras booleanas.

(1) Demostrar que una función $f : B \to B'$ es un isomorfismo de álgebras booleanas si y sólo si f es un isomorfismo de conjuntos ordenados.

(2) Demostrar que todo morfismo inyectivo $f : B \hookrightarrow B'$ de álgebras booleanas es un encaje:

$$x \leq y \quad \text{sii} \quad f(x) \leq f(y) \qquad\qquad \text{(para todos } x, y \in B)$$

(3) Deducir que todo morfismo biyectivo de álgebras booleanas es un isomorfismo.

[1] Se recuerda que una teoría $\mathscr{T}$ es *Henkin-completa* cuando para toda fórmula $\varphi(x)$ de su lenguaje que depende de una sola variable x, existe un término $t_\varphi \in T_0$ tal que $\mathscr{T} \vdash \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t_\varphi)$.

Ejercicio 9 (El álgebra booleana numerable sin átomos)**.** Se dice que un elemento a de un álgebra booleana B es un *átomo* cuando $a > 0$ y a es minimal en $B - \{0\}$.

(1) Sea $R \subseteq \mathfrak{P}(\omega)$ el conjunto de los subconjuntos recursivos de ω[2] e $I \subseteq R$ el ideal de los subconjuntos finitos. Demostrar que R/I es un álgebra booleana numerable sin átomos.
(2) Sea $P \subseteq \mathfrak{P}(\omega)$ el conjunto de los subconjuntos periódicos de ω[3]. Demostrar que P es una subálgebra booleana de $\mathfrak{P}(\omega)$, numerable y sin átomos.
(3) Demostrar que si B y C son dos álgebras booleanas numerables y sin átomos, entonces B y C son isomorfas. Para ello, se podrá construir dos sucesiones crecientes de subálgebras booleanas finitas $(B_n \subseteq B)_{n\in\omega}$ y $(C_n \subseteq C)_{n\in\omega}$ tales que $B_n \cong C_n$ para todo $n \in \omega$, y tales que $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ y $C = \bigcup_{n\in\omega} C_n$.

Ejercicio 10 (Operadores de clausura y polaridades)**.** En este ejercicio, se presentan unas herramientas para construir retículos completos.

Operadores de clausura Sea A un conjunto. Un *operador de clausura* sobre A es una función $(X \mapsto \overline{X}) : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(A)$ tal que:

$$(i)\ X \subseteq \overline{X} \qquad (ii)\ \overline{\overline{X}} = \overline{X} \qquad (iii)\ X \subseteq Y \text{ implica } \overline{X} \subseteq \overline{Y}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{P}(A)$.

(1) Demostrar que el conjunto $\boldsymbol{T} := \{X \in \mathfrak{P}(A) : \overline{X} = X\}$ (equipado con $\subseteq$) es un retículo completo en que el ínfimo de una familia es su intersección. ¿Cuál es su supremo?

Polaridades Una *polaridad* es una terna (A^-, A^+, R) formada por dos conjuntos A^- y A^+ equipados con una relación $R \subseteq A^- \times A^+$ cualquiera (el *polo*). Se notan:

- $X^+ := \{y \in A^+ : (\forall x \in X)\ x R y\}\ (\subseteq A^+)$ para todo $X \subseteq A^-$;
- $Y^- := \{x \in A^- : (\forall y \in Y)\ x R y\}\ (\subseteq A^-)$ para todo $Y \subseteq A^+$.

(2) Demostrar que para todos $X, X' \subseteq A^-$ (resp. $Y, Y' \subseteq A^+$):
   (2.1) $X \subseteq X'$ implica $X^+ \supseteq X'^+$ (resp. $Y \subseteq Y'$ implica $Y^- \supseteq Y'^-$)
   (2.2) $X \subseteq (X^+)^-$ (resp. $Y \subseteq (Y^-)^+$)
   (2.3) $((X^+)^-)^+ = X^+$ (resp. $((Y^-)^+)^- = Y^-$)
(3) Deducir de lo anterior que $X \mapsto (X^+)^-$ y $Y \mapsto (Y^-)^+$ son operadores de clausura sobre A^- y A^+, respectivamente, y que los conjuntos

$$\boldsymbol{T}^- := \{X \in \mathfrak{P}(A^-) : (X^+)^- = X\} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{T}^+ := \{Y \in \mathfrak{P}(A^+) : (Y^-)^+ = Y\}$$

   (equipados con $\subseteq$) son retículos completos antiisomorfos el uno del otro.
(4) Caracterizar los ínfimos y los supremos en $\boldsymbol{T}^-$ y en $\boldsymbol{T}^+$.
(5) En el caso particular donde $A^+ = A^- = A$ y donde $R \subseteq A^2$ es simétrica, ¿se puede deducir que $\boldsymbol{T}^+ = \boldsymbol{T}^-$ es un álgebra booleana? Demostrarlo, o dar un contraejemplo.

Un ejemplo importante de construcción por polaridad está dado en el ejercicio siguiente.

---

[2] Es decir los subconjuntos de ω cuya función característica es computable.
[3] Es decir los subconjuntos de ω cuya función característica es periódica.

Ejercicio 11 (Completación de Dedekind-MacNeille)**.** Sea $P = (P, \leq)$ un conjunto ordenado cualquiera. En el marco de la polaridad $(P, P, \leq)$ (véase Ejercicio 10), se notan

$$X^- \ :=\ \{x \in P : (\forall y \in X)\ x \leq y\} \qquad \text{y} \qquad X^+ \ :=\ \{x \in P : (\forall y \in X)\ x \geq y\}$$

para todo $X \in P$. Se llama *completación de Dedekind-MacNeille* del conjunto ordenado $(P, \leq)$ al conjunto $\bar{P} := \{X \subseteq P : (X^+)^- = X\}$ ordenado por la inclusión. Vimos en el ejercicio anterior que $\bar{P}$ es un retículo completo. Para todo $x \in P$, se nota $\iota(x) := \{x\}^-$ $(\in \bar{P})$.

(1) Verificar que $\iota(x) = {\downarrow}x$ (= clausura inferior de x) para todo $x \in P$, y deducir que la función $\iota : P \to \bar{P}$ es un encaje de $(P, \leq)$ en $(\bar{P}, \subseteq)$.

(2) Demostrar que ι preserva todos los ínfimos y supremos que existen en P, es decir:
   (i) si $x = \operatorname{ínf}_{i\in I} x_i$ (en P), entonces $\iota(x) = \bigwedge_{i\in I} \iota(x_i)$ (en $\bar{P}$),
   (ii) si $x = \sup_{i\in I} x_i$ (en P), entonces $\iota(x) = \bigvee_{i\in I} \iota(x_i)$ (en $\bar{P}$)
   para todos $x \in P$ y $(x_i)_{i\in I} \in P^I$ (I cualquiera).

(3) Demostrar que para todo $X \in \bar{P}$, tenemos que:

$$X \ =\ \bigwedge\{Y \in \iota(P)\ :\ Y \supseteq X\} \ =\ \bigvee\{Y \in \iota(P)\ :\ Y \subseteq X\}.$$

   (Es decir: todo elemento de $\bar{P}$ es ínfimo y supremo de elementos que vienen de P.)

(4) Deducir que si P es un retículo completo, entonces $\iota : (P, \leq) \to (\bar{P}, \subseteq)$ es un isomorfismo.

(5) Demostrar más generalmente que si L es un retículo completo, entonces toda función monótona $f : P \to L$ que preserva los ínfimos y supremos que existen en P se extiende de manera única en un morfismo de retículos completos $\bar{f} : \bar{P} \to L$:

$$\begin{tikzcd} \bar{P} \arrow[dr, dotted, "\bar{f}"] & \\ P \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f"'] & L \end{tikzcd}$$

(6) Determinar $\bar{P}$ en el caso particular donde $P = \mathbb{Q}$ (equipado con el orden usual).

(7) Demostrar que si $(P, \leq)$ es un álgebra de Heyting (resp. de Boole), entonces su completación de Dedekind-MacNeille $(\bar{P}, \subseteq)$ también lo es.