Práctico 4: Modelos booleanos

El modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$ Dada un álgebra booleana completa $\mathbb{B}$, se define la clase $V^{\mathbb{B}}$ de los $\mathbb{B}$-*nombres* por $V^{\mathbb{B}} := \bigcup_{\alpha\in On} V^{\mathbb{B}}_\alpha$, donde $V^{\mathbb{B}}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{B}^{\subseteq V^{\mathbb{B}}_\beta}$ para todo $\alpha \in On$. El universo V se encaja en $V^{\mathbb{B}}$ mediante la funcional $(x \mapsto \check{x}) : V \to V^{\mathbb{B}}$ definida por $\in$-recursión sobre $x \in V$ por $\check{x} := \{(\check{y}, 1) : y \in x\}$. A partir de ahora, se considera el lenguaje de primer orden $\mathscr{L}_{\in,\subseteq,\check{V}}$ definido a partir de los tres símbolos de predicado «$\cdot \in \cdot$» (pertenencia), «$\cdot \subseteq \cdot$» (inclusión primitiva) y «$\cdot \in \check{V}$» (pertenencia al universo inicial), y a cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\subseteq,\check{V}}$ se asocia la funcional $((u_1, \ldots, u_n) \mapsto [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}}) : (V^{\mathbb{B}})^n \mapsto \mathbb{B}$ definida por:

$$\begin{array}{rclrcl}
[\![u = v]\!]^{\mathbb{B}} & := & [\![u \subseteq v]\!]^{\mathbb{B}} \wedge [\![v \subseteq u]\!]^{\mathbb{B}} & [\![u \subseteq v]\!]^{\mathbb{B}} & := & \displaystyle\bigwedge_{u'\in\mathrm{dom}(u)} (u(u') \to [\![u' \in v]\!]^{\mathbb{B}}) \\
[\![u \in v]\!]^{\mathbb{B}} & := & \displaystyle\bigvee_{v'\in\mathrm{dom}(v)} (v(v') \wedge [\![u = v']\!]^{\mathbb{B}}) & [\![u \in \check{V}]\!]^{\mathbb{B}} & := & \displaystyle\bigvee_{x\in V} [\![u = \check{x}]\!]^{\mathbb{B}} \\
[\![\neg\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & := & \neg[\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & [\![\varphi(\vec{u}) \Rightarrow \psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & := & [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} \to [\![\psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} \\
[\![\varphi(\vec{u}) \wedge \psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & := & [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} \wedge [\![\psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & [\![\varphi(\vec{u}) \vee \psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & := & [\![\varphi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} \vee [\![\psi(\vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} \\
[\![\forall y\, \varphi(y, \vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & := & \displaystyle\bigwedge_{v\in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(v, \vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & [\![\exists y\, \varphi(y, \vec{u})]\!]^{\mathbb{B}} & := & \displaystyle\bigvee_{v\in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(v, \vec{u})]\!]^{\mathbb{B}}
\end{array}$$

En lo siguiente, se trabaja en el lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ (inducido por los símbolos de predicado «$\cdot \in \cdot$» y «$\cdot \in \check{V}$»), ya que la inclusión usual, definida por $x \subseteq y :\equiv \forall z\,(z \in x \Rightarrow z \in y)$, tiene la misma denotación que la inclusión primitiva del lenguaje anterior. En fin, dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parámetros $u_1, \ldots, u_n \in V^{\mathbb{B}}$, se nota

$$V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u_1, \ldots, u_n) \ :\equiv\ [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}} = 1_{\mathbb{B}}\,.$$

La clase $V^{\mathbb{B}}$ equipada con la noción de satisfacción anterior constituye un *modelo booleano* de ZF, en el sentido en que en ZF, se demuestra que

(1) $V^{\mathbb{B}} \models \varphi$ para cada teorema de $\mathrm{ZF}_{\check{V}}$[1]

En el modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$, el predicado «$\cdot \in \check{V}$» define una clase transitiva que contiene todos los ordinales y cumple las mismas propiedades que el universo inicial:

(2) $V^{\mathbb{B}} \models (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \ \wedge\ On \subseteq \check{V}$;

(3) $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \ \Leftrightarrow\ V^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n))$;

Y en ZFC se demuestra que:

(4) $V^{\mathbb{B}} \models \mathrm{AC}$, y luego: $V^{\mathbb{B}} \models \varphi$ para cada teorema de ZFC.

Dadas familias $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$ y $(u_i)_{i\in I} \in (V^{\mathbb{B}})^I$ indexadas por un mismo conjunto I, se define la *mezcla* $\sum_{i\in I} a_i \cdot u_i$ por

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{dom}\Big(\sum_{i\in I} a_i \cdot u_i\Big) & := & \displaystyle\bigcup_{i\in I} \mathrm{dom}(u_i) & \\
\Big(\sum_{i\in I} a_i \cdot u_i\Big)(v) & := & \displaystyle\bigvee_{i\in I} (a_i \wedge [\![v \in u_i]\!]^{\mathbb{B}}) & \qquad (\text{para todo } v \in \textstyle\bigcup_{i\in I} \mathrm{dom}(u_i))
\end{array}$$

[1] Donde $\mathrm{ZF}_{\check{V}}$ es la teoría de Zermelo-Fraenkel cuyos esquemas de comprensión y de reemplazo han sido extendidos a todas las fórmulas del lenguaje $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$.

y se demuestra que si $a_i \wedge a_j \leq [\![u_i = u_j]\!]^{\mathbb{B}}$ para todos $i, j \in I$, entonces

$$a_i \ \leq\ [\![\textstyle\sum_{i\in I} a_i \cdot u_i \ =\ u_i]\!]^{\mathbb{B}} \qquad\qquad \text{(para todo } i \in I)$$

Ejercicio 1 (Ordinales booleanos)**.**

(1) Demostrar (en ZF) que para toda fórmula $\varphi(x)$ (con parámetros en $V^{\mathbb{B}}$), tenemos que

$$[\![(\exists\alpha \in On)\, \varphi(\alpha)]\!]^{\mathbb{B}} \ =\ \bigvee_{\alpha\in On} [\![\varphi(\check{\alpha})]\!]^{\mathbb{B}} \qquad \text{y} \qquad [\![(\forall\alpha \in On)\, \varphi(\alpha)]\!]^{\mathbb{B}} \ =\ \bigwedge_{\alpha\in On} [\![\varphi(\check{\alpha})]\!]^{\mathbb{B}}$$

(2) Demostrar (en ZF) que para todo $u \in V^{\mathbb{B}}$, las siguientes aserciones son equivalentes:

(2.1) $V^{\mathbb{B}} \models On(u)$

(2.2) Existen una familia de ordinales $(\alpha_i)_{i\in I}$ y una partición de la unidad $(a_i)_{i\in I}$ (indexadas por el mismo conjunto I) tales que $V^{\mathbb{B}} \models u = \sum_{i\in I} a_i \cdot \check{\alpha}_i$.

El principio del máximo En ZFC, el modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$ cumple el *principio del máximo*: para cada fórmula $\varphi(x, \vec{w})$ (con parámetros $\vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$), existe $u^* \in V^{\mathbb{B}}$ tal que

$$[\![\exists x\, \varphi(x, \vec{w})]\!]^{\mathbb{B}} \left(= \bigvee_{u\in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(u, \vec{w})]\!]^{\mathbb{B}}\right) \ =\ [\![\varphi(u^*, \vec{w})]\!]^{\mathbb{B}}\,.$$

(Y dualmente, existe $u_* \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $[\![\forall x\, \varphi(x, \vec{w})]\!]^{\mathbb{B}} = [\![\varphi(u_*, \vec{w})]\!]^{\mathbb{B}}$.)

Ejercicio 2 (Forma débil del principio del máximo)**.** Mostrar en ZF (sin AC) que si $\varphi(x, \vec{w})$ (con $\vec{w} \in V^{\mathbb{B}}$) es tal que $V^{\mathbb{B}} \models \exists! x\, \varphi(x, \vec{w})$, entonces existe $u^* \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(u^*, \vec{w})$.
Sugerencia: Hallar un ordinal α tal que $\bigvee_{u\in V^{\mathbb{B}}_\alpha} [\![\varphi(u, \vec{w})]\!]^{\mathbb{B}} = 1$, y considerar el $\mathbb{B}$-nombre $u^* \in V^{\mathbb{B}}$ definido por $\mathrm{dom}(u^*) := V^{\mathbb{B}}_\alpha$ y $u^*(v) := [\![\exists x\, \varphi(x, \vec{w}) \wedge v \in x]\!]^{\mathbb{B}}$ para todo $v \in \mathrm{dom}(u^*)$.

Ejercicio 3 (El principio del máximo es equivalente a AC)**.**

(1) Dada una familia $(b_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$ tal que $\bigvee_{i\in I} b_i = 1$, se llama *refinamiento disjunto* de $(b_i)_{i\in I}$ a toda partición de la unidad $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$ tal que $a_i \leq b_i$ para todo $i \in I$. Se notan:

- u al $\mathbb{B}$-nombre definido por $\mathrm{dom}(u) = \{\check{\imath} : i \in I\}$ y $u(\check{\imath}) := b_i$ para todo $i \in I$;
- R al conjunto de todos los refinamientos disjuntos de $(b_i)_{i\in I}$;
- $U := \{v \in V^{\mathbb{B}} : [\![v \in u]\!]^{\mathbb{B}} = 1\}$.

(1.1) Verificar que para todo $(a_i)_{i\in I} \in R$, tenemos que $\left(\sum_{i\in I} a_i \cdot \check{\imath}\right) \in U$.

(1.2) Mostrar que para todo $v \in U$, existe un único $(a_i)_{i\in I} \in R$ tal que $[\![v = \sum_{i\in I} a_i \cdot \check{\imath}]\!]^{\mathbb{B}} = 1$.

(2) Sean las fórmulas:

$\Phi(\mathbb{B})$: $(\forall u \in V^{\mathbb{B}})([\![u \neq \varnothing]\!]^{\mathbb{B}} = 1 \ \Rightarrow\ (\exists v \in V^{\mathbb{B}})\, [\![v \in u]\!]^{\mathbb{B}} = 1)$.

$\Psi(\mathbb{B})$: Toda familia $(b_i)_{i\in I} \in \mathbb{B}^I$ tal que $\bigvee_{i\in I} b_i = 1$ tiene un refinamiento disjunto.

(2.1) Demostrar en ZF (sin AC) que: $\Phi(\mathbb{B}) \Leftrightarrow \Psi(\mathbb{B})$ (usando (1)).

(2.2) Sea $\mathscr{B}$ la clase de las álgebras booleanas completas.
Demostrar en ZF (sin AC) que: $(\forall \mathbb{B} \in \mathscr{B})\, \Psi(\mathbb{B}) \ \Rightarrow\ $ AC.
Sugerencia: Considerar el caso particular donde $\mathbb{B} = \mathfrak{P}(X)$, con X cualquiera.

(3) Deducir de lo anterior que (en ZF) el principio del máximo es equivalente a AC.

Ejercicio 4 (Núcleo)**.** Dado $u \in V^{\mathbb{B}}$, un *núcleo* de u es un conjunto $U \subseteq V^{\mathbb{B}}$ tal que:

(i) $[\![v \in u]\!]^{\mathbb{B}} = 1$ para todo $v \in U$.

(ii) Para todo $v \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $[\![v \in u]\!]^{\mathbb{B}} = 1$, existe un único $v' \in U$ tal que $[\![v = v']\!]^{\mathbb{B}} = 1$.

(1) Demostrar (en ZFC) que todo $u \in V^{\mathbb{B}}$ tiene un núcleo.

(2) Verificar (en ZFC) que si U_1 y U_2 son dos núcleos de un mismo nombre $u \in V^{\mathbb{B}}$, entonces el conjunto $h := \{(v_1, v_2) \in U_1 \times U_2 : [\![v_1 = v_2]\!]^{\mathbb{B}} = 1\}$ es una biyección entre U_1 y U_2.

(3) Sea $u \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $V^{\mathbb{B}} \models u \neq \varnothing$, y U un núcleo de u.

(3.1) Verificar (en ZFC) que $U \neq \varnothing$.

(3.2) Probar (en ZFC) que para todo $v \in V^{\mathbb{B}}$, existe $v' \in U$ tal que $[\![v = v']\!]^{\mathbb{B}} = [\![v \in u]\!]^{\mathbb{B}}$.

Modelos inducidos A partir de ahora, se considera un modelo de Tarski $\mathscr{M} \models$ ZFC, así como puntos $\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}} \in \mathscr{M}$ tales que $\mathscr{M} \models$ «$(\mathbb{B}, \leq_{\mathbb{B}})$ es un álgebra booleana completa». En lo siguiente se nota $\mathcal{B}$ al conjunto externo asociado a $\mathbb{B}$, y $\leq_{\mathcal{B}}$ a la relación externa asociada a $\leq_{\mathbb{B}}$:

$$\mathcal{B} \;:=\; \{a \in \mathscr{M} \;:\; \mathscr{M} \models a \in \mathbb{B}\} \qquad \text{(comprensión externa)}$$

$$a \leq_{\mathcal{B}} a' \;:\equiv\; \mathscr{M} \models a \leq_{\mathbb{B}} a' \quad (\Leftrightarrow \quad (a, a')^{\mathscr{M}} \in^{\mathscr{M}} \mathbb{B}) \qquad \text{(para todos } a, a' \in \mathcal{B})$$

En la metateoría, el par $(\mathcal{B}, \leq_{\mathcal{B}})$ es un álgebra booleana $\mathscr{M}$*-completa*, en el sentido en que todo subconjunto externo $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}$ asociado a un subconjunto interno $X \subseteq^{\mathscr{M}} \mathbb{B}$ (es decir: un punto $X \in \mathscr{M}$ tal que $\mathscr{M} \models X \subseteq \mathbb{B}$) tiene un ínfimo y un supremo en $\mathcal{B}$. En lo siguiente, se nota $\mathfrak{P}^{\mathscr{M}}(\mathcal{B})$ al conjunto de los subconjuntos de $\mathcal{B}$ que corresponden a un subconjunto interno:

$$\mathfrak{P}^{\mathscr{M}}(\mathcal{B}) \;:=\; \{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \;:\; (\exists X \in \mathscr{M})(\forall a \in \mathcal{B})(a \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \mathscr{M} \models a \in X)\}$$

La construcción del modelo booleano $V^{\mathbb{B}}$ (en ZFC) induce un subconjunto

$$\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \;:=\; \{u \in \mathscr{M} \;:\; \mathscr{M} \models u \in V^{\mathbb{B}}\}.$$

Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$, la funcional $(u_1, \ldots, u_n) \mapsto [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathbb{B}}$ (definida en ZF) induce en el modelo $\mathscr{M} \models$ ZFC una función

$$((u_1, \ldots, u_n) \mapsto [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathcal{B}}) \;:\; (\mathscr{M}^{\mathbb{B}})^n \to \mathcal{B}$$

mientras que la funcional $x \mapsto \check{x}$ (en ZFC) induce una función

$$(a \mapsto \check{a}) \;:\; \mathscr{M} \to \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$$

De las propiedades de $V^{\mathbb{B}}$ en ZFC, se deduce que:

(1) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$ para cada teorema de ZFC$_{\check{V}}$

(2) $[\![(\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \;\wedge\; On \subseteq \check{V}]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$

(3) $\mathscr{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ sii $[\![\varphi^{\check{V}}(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_n)]\!]^{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$
(para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parámetros $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{M}$).

Dado un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{M}$ (interno o externo), se nota $\mathscr{M}[\mathcal{U}] := \mathscr{M}^{\mathbb{B}}/{\sim}$, donde $\sim$ es la relación binaria sobre $\mathscr{M}$ definida por

$$u \sim u' \;:\equiv\; [\![u = u']\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \qquad (u, u' \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

y se equipa $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ con las relaciones $(\in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]}) \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{U}]^2$ y $\check{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}[\mathcal{U}]$ definidas por

$$[u] \in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]} [u'] \quad \text{sii} \quad [\![u \in u']\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \qquad (u, v \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

$$[u] \in \check{\mathscr{M}} \quad \text{sii} \quad [\![u \in u']\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U} \qquad (u \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}})$$

Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$ con parámetros $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{M}^{\mathbb{B}}$, se demuestra que:

$$\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models \varphi([u_1], \ldots, [u_n]) \quad \text{sii} \quad [\![\varphi(u_1, \ldots, u_n)]\!]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{U}.$$

(interpretando el símbolo «$\cdot \in \check{V}$» por la relación $u \in \check{\mathscr{M}}$ en $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$).

De las propiedades del modelo booleano interno $\mathscr{M}^{\mathbb{B}} \subseteq \mathscr{M}$, se deduce que:

(1) El conjunto $\mathscr{M}[\mathcal{U}]$ equipado con las relaciones $\in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]}$ y $\check{\mathscr{M}}$ es un modelo de $\mathrm{ZFC}_{\check{V}}$.

(2) $\mathscr{M}[\mathcal{U}] \models (\forall x \in \check{V})\, x \subseteq \check{V} \ \wedge\ On \subseteq \check{V}$.

(3) La función $h : \mathscr{M} \to \mathscr{M}[U]$ definida por $h(a) := [\check{a}]$ para todo $a \in \mathscr{M}$ es un encaje de $(\mathscr{M}, \in^{\mathscr{M}})$ en $(\mathscr{M}[\mathcal{U}], \in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]})$.

(4) Tenemos que $h(\mathscr{M}) \subseteq \check{\mathscr{M}}$ y a través de esta inclusión, $\check{\mathscr{M}}$ (equipado con $\in^{\mathscr{M}[\mathcal{U}]}$) es una *extensión elemental* de $\mathscr{M}$ (equipado con $\in^{\mathscr{M}}$).

(Observar que la inclusión $h(\mathscr{M}) \subseteq \check{\mathscr{M}}$ es estricta en general.)

Ultrafiltro $\mathscr{M}$-genérico Se dice que el ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ es *$\mathscr{M}$-genérico* cuando

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U} \quad \text{implica} \quad \textstyle\bigwedge \mathcal{X} \in \mathcal{U} \qquad\qquad (\text{para todo } \mathcal{X} \in \mathfrak{P}^{\mathscr{M}}(\mathcal{B}))$$

o dualmente, cuando:

$$\textstyle\bigvee \mathcal{X} \in \mathcal{U} \quad \text{implica} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{U} \neq \varnothing \qquad\qquad (\text{para todo } \mathcal{X} \in \mathfrak{P}^{\mathscr{M}}(\mathcal{B}))$$

(Ejercicio: Demostrar la equivalencia entre ambas definiciones.)

Ejercicio 5 (Caracterización de la igualdad $h(\mathscr{M}) = \check{\mathscr{M}}$)**.**

(1) Demostrar que si el ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ es $\mathscr{M}$-genérico, entonces $h(\mathscr{M}) = \check{\mathscr{M}}$.

(2) Demostrar (en ZFC) que para toda anticadena $A \subseteq \mathbb{B}$, existe una familia de conjuntos $(x_a)_{a \in A}$ y un nombre $u \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $[\![u = \check{x}_a]\!]^{\mathbb{B}} = a$ para todo $a \in A$.

(3) Deducir de lo anterior que si $h(\mathscr{M}) = \check{\mathscr{M}}$, entonces el ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{B}$ es $\mathscr{M}$-genérico.
Sugerencia: Observar que para todo $\mathcal{X} \in \mathfrak{P}^{\mathscr{M}}(\mathcal{B})$, existe una anticadena $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}^{\mathscr{M}}(\mathcal{B})$ tal que $\bigvee \mathcal{X} = \bigvee \mathcal{A}$ y tal que para todo $a \in \mathcal{A}$, existe $b \in \mathcal{X}$, tal que $a \leq_{\mathcal{B}} b$.

Ejercicio 6 (Ultrafiltros internos y externos)**.** Se dice que un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ es *interno* cuando viene de un punto $U \in \mathscr{M}$ tal que $\mathscr{M} \models U \subseteq \mathbb{B}$ ultrafiltro. Demostrar que para todo ultrafiltro $\mathscr{M}$-genérico $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$, las siguientes aserciones son equivalentes:

(*i*) $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro interno

(*ii*) $\mathcal{U} = \uparrow\{a\}$ para algún átomo $a \in \mathcal{B}$

(*iii*) $\mathscr{M}[\mathcal{U}] = \check{\mathscr{M}}$ $(\simeq \mathscr{M})$

Ejercicio 7 (Caracterización de los ultrafiltros genéricos)**.** Se dice que un subconjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}^*$ $(= \mathcal{B} - \{0\})$ es *denso* cuando $\uparrow\mathcal{D} = \mathcal{B}^*$.

(1) Demostrar que un subconjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ es un ultrafiltro $\mathscr{M}$-genérico si y sólo si $\mathcal{U}$ es un filtro propio de $\mathcal{B}$ que interseca todo conjunto denso $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}^*$ que viene de $\mathscr{M}$.

(2) Demostrar que si $\mathscr{M}$ es numerable, entonces existe un ultrafiltro $\mathscr{M}$-genérico $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$.
Sugerencia: Considerar una enumeración $(\mathcal{D}_n)_{n<\omega}$ de los suconjuntos densos de $\mathcal{B}$ que vienen de $\mathscr{M}$, construir una sucesión decreciente $(b_n)_{n<\in\omega} \in \mathcal{B}^{*\omega}$ tal que $b_n \in \mathcal{D}_n$ para todo $n \in \omega$, y tomar $\mathcal{U} := \uparrow\{b_n : n < \omega\}$.

Ejercicio 8 ($\mathbb{B}$-nombre genérico)**.** En ZF, se define el $\mathbb{B}$-*nombre genérico* $U \in V^{\mathbb{B}}$ por $U := \{(\check{b}, b) : b \in \mathbb{B}\} \in V^{\mathbb{B}}$. Demostrar que $V^{\mathbb{B}} \models$ «$U \subseteq \check{\mathbb{B}}$ es un ultrafiltro $\check{V}$-genérico».