Práctico 5: Extensiones genéricas

Conjuntos de condiciones Sea $(\mathbb{P}, \leq) \in M$ un conjunto de forcing (i.e. un conjunto ordenado no vacío) en un modelo transitivo $M \models \mathrm{ZF}$. Dadas condiciones $p, q \in \mathbb{P}$, se nota

- $p \top q \quad :\equiv \quad (\exists r \in \mathbb{P})(r \leq p \wedge r \leq q)$ («p y q son *compatibles*»)
- $p \perp q \quad :\equiv \quad \neg(\exists r \in \mathbb{P})(r \leq p \wedge r \leq q)$ («p y q son *incompatibles*»)

Se recuerda que un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}$ es:

- *abierto* cuando $(\forall p, q \in \mathbb{P})(p \leq q \wedge q \in X \Rightarrow p \in X)$
- *denso* cuando $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in X)\ q \leq p$
- *predenso* cuando $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in X)\ q \top p$
- *un filtro* cuando $X \neq \varnothing \ \wedge\ X = \uparrow X \ \wedge\ (\forall p, q \in X)(\exists r \in X)(r \leq p \wedge r \leq q)$
- *una anticadena* cuando $(\forall p, q \in X)(p \neq q \Rightarrow p \perp q)$

Ejercicio 1 (Filtros M-genéricos)**.** Demostrar que para todo filtro $G \subseteq \mathbb{P}$, las siguientes aserciones son equivalentes:

(i) G interseca todo subconjunto denso de $\mathbb{P}$ en M.
(ii) G interseca todo subconjunto abierto denso de $\mathbb{P}$ en M.
(iii) G interseca todo subconjunto predenso de $\mathbb{P}$ en M.
(iv) G interseca toda anticadena maximal de $\mathbb{P}$ en M (cuando $M \models \mathrm{AC}$)

Cuando es el caso, se dice que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro M-genérico*.

Ejercicio 2 (Ortogonal de un conjunto de condiciones)**.** Dado un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}$, se nota $X^\perp := \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \in X)\ p \perp q\}$. Demostrar que para todos $X, Y \subseteq \mathbb{P}$:

(1) $X \subseteq Y$ implica $X^\perp \supseteq Y^\perp$
(2) $X \subseteq X^{\perp\perp}$
(3) $X^\perp = X^{\perp\perp\perp}$
(4) $X^\perp$ está cerrado inferiormente
(5) $X \cap X^\perp = \varnothing$
(6) $X \cup X^\perp$ es predenso
(7) $X = X^{\perp\perp}$ sii $X = \overline{X}^{\circ}$ (i.e. X es un abierto regular).

Ejercicio 3 (El álgebra booleana $\mathbb{B}$)**.** Sea $\mathbb{B} := \{X \in \mathfrak{P}^M(\mathbb{P}) : X = X^{\perp\perp}\}$ $(\in M)$ el álgebra booleana inducida por $\mathbb{P}$, y $e : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ la función definida por $e(p) := \{p\}^{\perp\perp}$ para todo $p \in \mathbb{P}$.

(1) Verificar que $e(p) = \{q \in \mathbb{P} : (\forall r \leq q)\ r \top p\}$ para todo $p \in \mathbb{P}$.
(2) Demostrar que para toda condición p:

$$e(p) \text{ es un átomo en } \mathbb{B} \text{ (sentido booleano)} \quad \text{sii} \quad (\forall q_1, q_2 \leq p)\ q_1 \top q_2.$$

El conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq)$ es *separativo* cuando $(\forall p, q \in \mathbb{P})(p \not\leq q \Rightarrow (\exists p' \leq p)\ p' \perp q)$.

(3) Demostrar que si $(\mathbb{P}, \leq)$ es separativo, entonces $e(p) = \downarrow\{p\}$ para todo $p \in \mathbb{P}$, y luego la función $e : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ es un encaje de $(\mathbb{P}, \leq)$ en $(\mathbb{B}, \subseteq)$.

Relación de forcing Dada una fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathscr{L}_{\in,\check{V}}$, se recuerda que la *relación de forcing* $p \Vdash \varphi(u_1,\dots,u_n)$ (con $p \in \mathbb{P}$ y $u_1,\dots,u_n \in M^{\mathbb{B}}$) está definida en M por:

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi(u_1,\dots,u_n) &\iff e(p) \leq [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \\ &\iff p \in [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]^{\mathbb{B}} \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (Propiedades de la relación de forcing)**.** Dadas fórmulas φ, ψ, $\chi(x)$ con parámetros (implícitos) in $M^{\mathbb{B}}$, demostrar que para todo $p \in \mathbb{P}$, tenemos que:

(1) $p \Vdash \varphi \;\Rightarrow\; (\forall q \leq p)\, q \Vdash \varphi$
(2) $\neg(\exists p \in \mathbb{P})(p \Vdash \varphi \;\wedge\; p \Vdash \neg\varphi)$
(3) $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \leq p)(q \Vdash \varphi \;\vee\; q \Vdash \neg\varphi)$
(4) $p \Vdash \neg\varphi \;\Leftrightarrow\; (\forall q \leq p)\, q \nVdash \varphi$
(5) $p \Vdash \varphi \wedge \psi \;\Leftrightarrow\; p \Vdash \varphi \;\wedge\; p \Vdash \psi$
(6) $p \Vdash \varphi \vee \psi \;\Leftrightarrow\; (\forall q \leq p)(\exists r \leq q)(r \Vdash \varphi \;\vee\; r \Vdash \psi)$
(7) $p \Vdash \forall x\, \varphi(x) \;\Leftrightarrow\; (\forall u \in M^{\mathbb{B}})\; p \Vdash \varphi(u)$
(8) $p \Vdash \exists x\, \varphi(x) \;\Leftrightarrow\; (\forall q \leq p)(\exists r \leq q)(\exists u \in M^{\mathbb{B}})\; r \Vdash \varphi(u)$

Cuando $M \models$ AC, demostrar además que:

(9) $p \Vdash \exists x\, \varphi(x) \;\Leftrightarrow\; (\exists u \in M^{\mathbb{B}})\; p \Vdash \varphi(u)$

Ejercicio 5 (Cardinales posibles para el continuo)**.** En este ejercicio, se supone que existe un modelo transitivo numerable de ZF.

(1) Mostrar (bajo la hipótesis anterior) que cada una de las siguientes teorías tiene un modelo transitivo numerable: ZFC + HGC, ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ ($n \geq 1$) y ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$.
(2) Demostrar en ZFC que $(\forall\kappa \in Cn)(\mathrm{cof}(\kappa) = \aleph_0 \;\Rightarrow\; \kappa^{\aleph_0} > \kappa)$
(*Sugerencia*: Usar el lema de König.)
(3) Demostrar en ZFC + HGC que $(\forall\kappa \in Cn)(\mathrm{cof}(\kappa) > \aleph_0 \;\Rightarrow\; \kappa^{\aleph_0} = \kappa)$
(*Sugerencia*: Observar que si $\mathrm{cof}(\kappa) > \aleph_0$, entonces $\kappa^{\aleph_0} = \sup_{\mu<\kappa} \mu^{\aleph_0}$.)
(4) Mostrar que existe un modelo transitivo $M \models$ ZFC y un cardinal $\kappa \in Cn^M$ tales que: $M \models \mathrm{cof}(\kappa) > \aleph_0$ y $M \models \kappa^{\aleph_0} > \kappa$. (*Sugerencia*: Elegir M tal que $M \models 2^{\aleph_0} = \aleph_2$.)
(5) Dado un modelo transitivo numerable $M \models$ ZFC, demostrar que para todo cardinal infinito $\kappa \in Cn^M$ tal que $M \models \kappa^{\aleph_0} = \kappa$, existe una extensión genérica $M[G] \supseteq M$ tal que $Cn^{M[G]} = Cn^M$ y $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa$.

Ejercicio 6 (Condición de κ-cadena)**.** Sea un modelo transitivo $M \models$ ZFC y un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$. Fijado un cardinal infinito $\kappa \in Cn^M$, se dice que el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$ cumple la *condición de κ-cadena* (notación: κ-c.c.), cuando

$$M \models (\forall A \subseteq \mathbb{P})(A \text{ anticadena} \Rightarrow |A| < \kappa).$$

En lo siguiente, siempre se considera la condición de κ-cadena (que no es absoluta) en el sentido del modelo de base M.

(1) Sea $\mathbb{B} := \{X \in \mathfrak{P}^M(\mathbb{P}) \;:\; X = X^{\perp\perp}\} \in M$ el álgebra booleana inducida por $\mathbb{P}$ en M. Demostrar que si $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ cumple la κ-c.c. en M, entonces:

$$M \models (\forall A \subseteq \mathbb{B})(A \text{ anticadena} \Rightarrow |A| < \kappa).$$

A partir de ahora, se considera un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$.

(2) Demostrar que si $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ cumple la κ-c.c. en M, con κ regular en M, entonces:
$$M[G] \models (\forall\mu \geq \kappa)((\mu \text{ cardinal regular})^M \ \Leftrightarrow\ \mu \text{ cardinal regular}).$$
(*Sugerencia*: Adaptar la prueba del teorema de preservación de los cardinales bajo la condición de cadena numerable.)

(3) Demostrar que si $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ cumple la κ-c.c. en M, con κ regular en M, entonces:
$$M[G] \models (\forall\mu \geq \kappa)((\mu \text{ cardinal})^M \ \Leftrightarrow\ \mu \text{ cardinal}).$$
(*Sugerencia*: Considerar el mínimo contraejemplo.)

(4) Deducir de lo anterior que en toda extensión genérica $M[G] \supseteq M$, existe un cardinal infinito $\kappa \in Cn^M$ tal que:
$$M[G] \models (\forall\mu \geq \kappa)((\mu \text{ cardinal})^M \ \Leftrightarrow\ \mu \text{ cardinal}).$$

(5) Demostrar que en toda extensión genérica $M[G] \supseteq M$:
$$M[G] \models (\exists\lambda, \sigma \in On)(\forall\alpha \in On)(\aleph_{\lambda+\alpha} = \aleph^M_{\lambda+\sigma+\alpha}).$$

Ejercicio 7 (Colapso de cardinales)**.** Sea un modelo transitivo numerable $M \models$ ZF. Mostrar que para cada par $X, Y \in M$ de conjuntos infinitos en M, existe una extensión genérica de M en la cual ambos conjuntos X e Y son equipotentes.

Ejercicio 8 (Conjuntos de forcing κ-distributivos y κ-cerrados)**.** Sea un modelo transitivo $M \models$ ZFC y un conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$. Fijado un cardinal infinito $\kappa \in Cn^M$, se dice que el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq) \in M$ es:

- *κ-distributivo* cuando la intersección de toda familia (en M) de subconjuntos abiertos densos de $\mathbb{P}$ indexada por el cardinal κ es un subconjunto abierto denso de $\mathbb{P}$;
- *$<\kappa$-distributivo* cuando es λ-distributivo para todo cardinal $\lambda < \kappa$ (en M);
- *κ-cerrado* cuando toda sucesión decresciente de elementos de $\mathbb{P}$ (en M) indexada por un ordinal $\lambda \leq \kappa$ tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$;
- *$<\kappa$-cerrado* cuando es λ-cerrado para todo cardinal $\lambda < \kappa$ (en M).

(1) Demostrar que si $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ es κ-cerrado (en M) entonces es κ-distributivo.

(2) Demostrar que si $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ es κ-distributivo (en M), entonces en toda extensión genérica $M[G] \supseteq M$ y para todo conjunto $X \in M$, tenemos que $(X^\kappa)^{M[G]} = (X^\kappa)^M$, y en particular: $\mathfrak{P}^{M[G]}(\kappa) = \mathfrak{P}^M(\kappa)$.

(3) Deducir de lo anterior que si el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}) \in M$ es $<\kappa$-distributivo, entonces toda extensión genérica $M[G] \supseteq M$ preserva todos los cardinales hasta κ (inclusive).

Ejercicio 9 (Forzar un buen orden sobre $\mathfrak{P}(\omega)$)**.** En un modelo transitivo $M \models$ ZF + DC, se considera el conjunto de forcing $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}) \in M$ definido por:
$$(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}) := \Big(\bigcup_{\alpha<\aleph_1^M} \mathrm{Iny}(\alpha, \mathfrak{P}^M(\omega)),\ \supseteq\Big)$$
donde $\mathrm{Iny}(\alpha, \mathfrak{P}^M(\omega))$ es el conjunto de las funciones inyectivas de α en $\mathfrak{P}^M(\omega)$. Fijado un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$, se nota $g := \bigcup G$ $(\in M[G])$.

(1) Demostrar que $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ es $\aleph_0$-cerrado en M, y deducir que $\mathfrak{P}^{M[G]}(\omega) = \mathfrak{P}^M(\omega)$.
(*Sugerencia*: No se pueden usar directamente los resultados del Ejercicio 8, que requieren que $M \models$ AC. Sin embargo, se pueden adaptar dichas ideas al marco de este ejercicio, en que sólo suponemos que $M \models$ DC.)

(2) Demostrar que $M[G] \models g : \aleph_1 \to \mathfrak{P}(\omega)$ biyectiva.
(*Sugerencia*: Primero demostrar que $M[G] \models g : \aleph_1^M \to \mathfrak{P}(\omega)$ biyectiva,
y luego deducir que $\aleph_1^{M[G]} = \aleph_1^M$.)

(3) Deducir que $M[G] \models \mathfrak{P}(\omega)$ bien ordenable.

Ejercicio 10 (Colapso de Lévy)**.** En un modelo transitivo $M \models$ ZF, se consideran un cardinal regular infinito κ (en M) y otro cardinal $\lambda > \kappa$ (en M). Se considera el conjunto de forcing

$$(\mathbb{P}, \leq) \ := \ (\{(f : \kappa \rightharpoonup \lambda) : |\mathrm{dom}(f)| < \kappa\}^M, \ \supseteq) \qquad\qquad (\in M)$$

así como un filtro M-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$.

(1) Demostrar que el conjunto ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ es separativo y $<\kappa$-cerrado (en M). Deducir que todos los cardinales $\leq \kappa$ en M están preservados en $M[G]$.

(2) Demostrar que $M[G] \models |\lambda| = \kappa$.

(3) Demostrar que si $\lambda^\kappa = \lambda$ (en M), entonces $|\mathbb{P}| = \lambda$ (en M). Deducir (bajo la hipótesis anterior) que todos los cardinales $> \lambda$ en M están preservados en $M[G]$.

Ejercicio 11 (Forcing producto)**.** Sean $(\mathbb{P}_1, \leq_1), (\mathbb{P}_2, \leq_2) \in M$ dos nociones de forcing adentro de un mismo modelo transitivo $M \models$ ZF. Se considera el conjunto producto

$$(\mathbb{P}, \leq) \ := \ (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2, \ \leq_1 \times \leq_2)$$

donde $\leq \, := \, \leq_1 \times \leq_2$ es el orden producto, definido por

$$(p_1, p_2) \leq (q_1, q_2) \quad \text{sii} \quad p_1 \leq_1 q_1 \ \text{ y } \ p_2 \leq_2 q_2 \qquad\qquad (\text{para todos } (p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{P})$$

(1) Demostrar que para todo $G \subseteq \mathbb{P}$, las siguientes condiciones son equivalentes:
  (1.1) El subconjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro M-genérico;
  (1.2) G es de la forma $G = G_1 \times G_2$, donde $G_1 \subseteq \mathbb{P}_1$ es un filtro M-genérico,
  y $G_2 \subseteq \mathbb{P}_2$ un filtro $M[G_1]$-genérico.
  (1.3) G es de la forma $G = G_1 \times G_2$, donde $G_2 \subseteq \mathbb{P}_2$ es un filtro M-genérico,
  y $G_1 \subseteq \mathbb{P}_1$ un filtro $M[G_2]$-genérico.

(2) Deducir de lo anterior que para todo filtro M-genérico $G = G_1 \times G_2 \subseteq \mathbb{P}$, tenemos que

$$M[G] \ = \ M[G_1][G_2] \ = \ M[G_2][G_1].$$