Problema de Fragmentación de Grafos

Pablo Romero

Metaheurísticas y Optimización sobre Redes

Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Contenidos

Motivación

Preguntas

- *Modelos Epidémicos (cuarentena).*
- *Potenciales aplicaciones en incendios.*
- *Protección de Redes Eléctricas.*
- *Terrorismo.*

Contenidos

Problema

Se tiene un grafo simple $G = (V, E)$ y un presupuesto limitado B:

- Elegimos un conjunto U de $|U| = B$ nodos.
- La naturaleza selecciona al azar un nodo v de $V - U$.
- Mueren todos los nodos de la componente de v.

El *Problema de Fragmentación de Grafos* (GFP) consiste en minimizar el valor esperado de muertes:

$$min_{U \subseteq V} g(U) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_k^2}{n}$$

$$s.t. \& |U| = B,$$

donde $n_1, \ldots, n_k$ son los tamaños de las componentes conexas de $G^* = G - U$.

Complejidad

Recordemos que CLIQUE es $\mathcal{NP}$-Completo.

Theorem

El GFP es $\mathcal{NP}$-Completo.

Proof.

El objetivo alcanza la unidad si y solo si el complemento tiene un CLIQUE de tamaño al menos $|V| - B$. $\square$

Inaproximabilidad

Recordemos que 3-cut es $\mathcal{NP}$-Completo.

Theorem

El GFP es inaproximable a factores menores que 5/3.

Proof.

Tomemos una instancia de 3-cut: (G, u, v, w) y reemplacemos cada nodo distinguido por un enorme clique K_N, $N >> |E|$. Si logramos separar los 3 nodos, la pérdida esperada es N. Si no, la pérdida esperada es:

$$g(U) \approx \frac{(2N)^2}{3N} + \frac{N^2}{3N} = \frac{5N}{3}. \tag{1}$$

Luego, si existe un algoritmo de factor $\alpha < 5/3$, podemos resolver 3-cut. $\square$

Balance de Componentes

Theorem

El vector $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ *debe tener la menor varianza.*

Proof.

El óptimo minimiza $\|\vec{n}\|_2$ bajo $\|\vec{n}\|_1$ constante. El mínimo se alcanza en la proyección ortogonal del vector nulo en el hiperplano $\|\vec{n}\|_1 = n$, y es la dirección del vector normal: $n_i = n/k$. □

Casos Exactos

Hemos hallado el óptimo para el GFP en:

- Caminos Elementales.
- Ciclos Elementales.
- Árboles.
- Grafos Acíclicos.
- Algunos Grafos Bipartitos.

Contenidos

Greedy

Algorithm 1 $G_{out} = Greedy(G, B)$

1: **for** $i = 1 : B$ **do**
2: $w \leftarrow ChooseBestNode(G)$
3: $G \leftarrow G - \{w\}$
4: **end for**
5: $G_{out} \leftarrow G$
6: **return** G_{out}

Balance

Algorithm 2 $G_{out} = Balance(G, B)$

for $i = 1 : B$ **do**
    $V_{max} \leftarrow LargestComponent(G_{out})$
    $w \leftarrow ChooseRandom(V_{max})$
    $G \leftarrow G - \{w\}$
end for
$G_{out} \leftarrow G$
return G_{out}

GRASP (1/3)

Algorithm 3 $G_{out} = Main(G, B, \alpha, MaxIter, k)$

for $i = 1$ TO *MaxIter* **do**
    $G_i \leftarrow Alg\_GRASP(G, B, \alpha)$
end for
$Pool \leftarrow SelectBest(k, G_1, \ldots, G_{MaxIter})$
$Pool_{out} \leftarrow Path\_Relinking(Pool)$
$G_{out} \leftarrow SelectBest(1, Pool)$
return G_{out}

GRASP (2/3)

Algorithm 4 $G_{out} = Alg\_GRASP(G, B, \alpha)$

for $i = 1$ TO B **do**
  $SC_l \leftarrow LowestReduction(G)$
  $SC_h \leftarrow HighestReduction(G)$
  $RCL \leftarrow \{v : Sc(G - v) \leq SC_l + \alpha(SC_h - SC_l)\}$
  $v \leftarrow ChooseRandom(RCL)$
  $G \leftarrow G - \{v\}$
end for
while $Improve(G) = True$ **do**
  $(G, LocalImprove) \leftarrow Swap(G)$
end while
return G_{out}

GRASP (3/3)

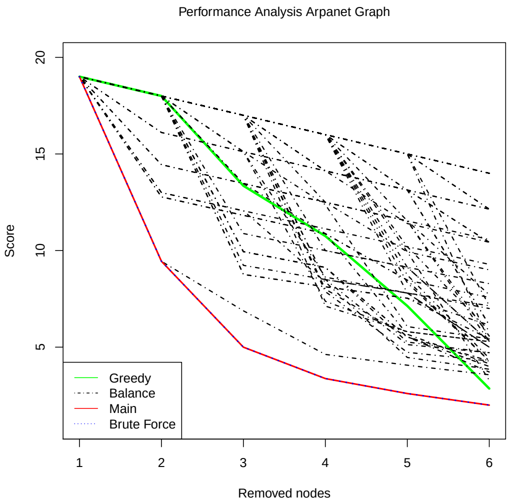
Algorithm 5 $Pool = Path\_Relinking(S_1, S_2, \ldots, S_k)$

1: $Pool \leftarrow (S_1, S_2, \ldots, S_k)$
2: $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$
3: **for** $i = 1$ TO $k - 1$ **do**
4:     **for** $j = i + 1$ TO k **do**
5:         $Path_{(i,j)} \leftarrow Lexicographic(S_i, S_j)$
6:         $S_{(i,j)} \leftarrow SelectBest(1, Path_{(i,j)})$
7:         $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{S_{(i,j)}\}$
8:     **end for**
9: **end for**
10: $Pool \leftarrow SelectBest(k, \mathcal{S})$
11: **return** $Pool$

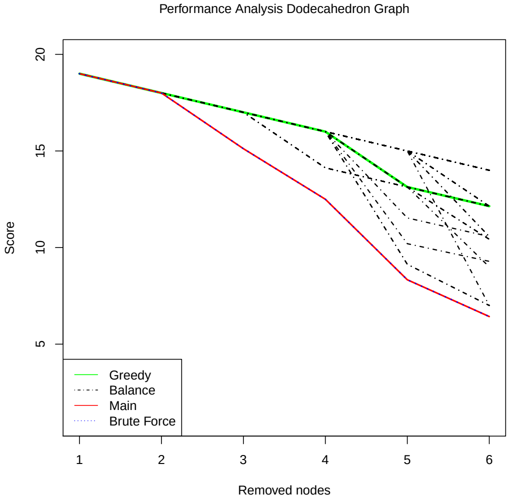
Contenidos

Resultados

Resultados 1/2



Resultados 2/2



Contenidos

Conclusiones

1. Se ha generado un equipo de trabajo nacional en GFP.
2. Existen generalizaciones (SWGFP).
3. La coincidencia con la Nodo-Criticalidad invita a nuevas cooperaciones.
4. Se han desarrollado heurísticas GRASP, métodos exactos y cotas.
5. Hasta el momento no se han desarrollado aplicaciones.