Metaheurísticas y Optimización sobre Redes

(Apoyo al modelado)

23 de octubre de 2019

1. Considere el grafo dirigido $G' = (V, E')$ equivalente al grafo $G = (V, E)$ con las aristas duplicadas usando ambas direcciones. Siguiendo la sugerencia, se construirán dos grupos de restricciones para definir el problema. El primero de ellos en (1) fuerza la construcción de caminos consistentes para los túneles. La expresión $E^+(u)$ en (1) alude al conjunto de nodos $v \in V$ tal que existe un arco $uv \in E'$. Complementariamente, $E^-(u)$ es el conjunto de nodos v tales que $vu \in E'$.

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in E^+(u)} x_{uj}^{p,uv} = 1 & \forall u \in V, D(u,v) > 0 & (i) \\ \sum\limits_{j \in E^+(u)} x_{uj}^{s,uv} = 1 & \forall u \in V, D(u,v) > 0 & (ii) \\ \sum\limits_{i \in E^-(j)} x_{ij}^{p,uv} - \sum\limits_{k \in E^+(j)} x_{jk}^{p,uv} = 0 & \forall j \neq u,v, D(u,v) > 0 & (iii) \\ \sum\limits_{i \in E^-(j)} x_{ij}^{s,uv} - \sum\limits_{k \in E^+(j)} x_{jk}^{s,uv} = 0 & \forall j \neq u,v, D(u,v) > 0 & (iv) \\ x_{ij}^{p,uv} = x_{ji}^{p,uv} & \forall ij \in E', D(u,v) > 0 & (v) \\ x_{ij}^{s,uv} = x_{ji}^{s,uv} & \forall ij \in E', D(u,v) > 0 & (vi) \\ x_{ij}^{p,uv} + x_{ij}^{s,uv} \leq 1 & \forall ij \in E, D(u,v) > 0 & (vii) \end{cases} \quad (1)$$

Las ecuaciones (i) y (ii) en (1) garantizan que una unidad de flujo sea inyectada por un enlace de salida de todo nodo u, respectivamente para su camino primario y secundario. Las ecuaciones (iii) y (iv) preservan el balance de esos flujos en cualquier nodo intermedio potencial. Pueden agregarse restricciones para forzar que los flujos inyectados en (i) y (ii) lleguen a los destinos, o simplemente desestimar las variables $x_{iu}^{p,uv}$

y $x^{s,uv}_{iu}$ en las ecuaciones anteriores. Lo último evita que el flujo drene hacia la fuente u y consigue el mismo efecto. Las ecuaciones (v) and (vi) imponen que los caminos primarios y secundarios entre u y v sigan los mismos recorridos en ambas direcciones. Pueden suprimirse y asumir esto implícitamente, para lo cual sólo deben considerarse variables para una de las demandas $D(u,v)$ o $D(v,u)$. El bloque de ecuaciones (vii) impone la independencia lógica entre los caminos, dado que un mismo ij no puede ser usado al mismo tiempo como parte de los caminos primario y secundario. De suprimir las ecuaciones (v) and (vi), hay que adaptar (vii) para sumar ambas direcciones en ij, ya que no sabemos de antemano cuál va a ser la elegida. Resolver el problema con este bloque en primer lugar, usando otro objetivo como referencia, por ejemplo, minimizando el delay total de todos los caminos primarios más los secundarios.

Como resultado de (1) se consiguen caminos consistentes para los túneles. Veremos ahora cómo imponer las condiciones de delay y congestión que garantizan la Calidad de Servicio (QoS). Esto se consigue con (2).

$$\begin{cases} \sum_{ij\in E} L(i,j)\cdot x^{p,uv}_{ij} \le MD(u,v) & \forall D(u,v)>0 \quad (i) \\ \sum_{ij\in E} L(i,j)\cdot x^{s,uv}_{ij} \le MD(u,v) & \forall D(u,v)>0 \quad (ii) \\ \sum_{D(uv)>0} D(u,v)(x^{p,uv}_{ij} + y^{uv}_{ij,rs}) \le \beta\cdot C(i,j) & \forall ij\neq rs\in E \quad (iii) \\ y^{uv}_{ij,rs} \ge x^{s,uv}_{ij} + x^{p,uv}_{rs} - 1 & \forall ij\neq rs\in E,\ D(u,v)>0 \quad (iv) \end{cases} \tag{2}$$

Las sumatorias a la izquierda de las desigualdades (i) y (ii) en (2) simplemente computan el delay acumulado para los caminos primario y secundario de cada túnel, los que deben por tanto respetar los límites establecidos. Supongamos por el momento que β en (iii) es una constante de valor 1. En ese caso, los términos de la derecha en (iii) corresponden a los límites de capacidad de los enlaces ij. La suma a la izquierda de la desigualdad computa la demanda/tráfico de todos los caminos primarios que usan ij, más la de todos los secundarios que también usan ij ante una falla en $rs \neq ij$. Así, las desigualdades en (iii) aseguran la no congestión en cualquier escenario de fallas. Las ecuaciones (2)-(iii) al igual que las variables $y^{uv}_{ij,rs}$ exploran todas las combinaciones enlace/falla distintos, por lo que son numerosas. Las ecuaciones (iv) in (2) fuerzan la consistencia entre las variables $x^{p,uv}_{ij}$ y $y^{uv}_{ij,rs}$, ya que $y^{uv}_{ij,rs}$ debe valer 1 cuando $x^{s,uv}_{ij} = 1$ y $x^{p,uv}_{rs} = 1$.

Solamente resta definir el objetivo a optimizar. De acuerdo a como está planteado el problema, uno pensaría en maximizar un factor α que multiplica a todos los $D(u, v)$ en (2)-(iii), pero el resultado no sería lineal. En cambio, se usa $\beta = 1/\alpha$, que logra el mismo efecto *contrayendo* la capacidad de los enlaces que antes buscábamos *dilatando* la demanda. Por tanto, el problema completo surge de unir las restricciones (1), (2) con $\beta \geq 0$, en un problema que minimiza β donde la última es la única variable real.