Ejercicios para la materia: Teoría de Juegos Evolutivos. 2a. lista

Facultad de Ingeniería UdelaR

Abril 2024

Ejercicio 1 *Considere los juegos simétricos* 2×2 *en su forma canónica. Considere los retornos* $\pi(x, x)$ *escritos como función de de* x_1.

1. *Analice las relaciones existentes entre extremos (relativos y absolutos) de* π*, equilibrios de Nash y estrategias evolutivamente estables.*

2. *Indique los casos en que* $\pi(x, x)$ *crece monotonamente a lo largo de una solución de la dinámica del replicador que parte de un punto no estacionario.*

3. *Muestre que la función de retornos se ve afectada por transformaciones afines, en el sentido de que puede suceder que crezca monotonamente en la forma original pero no en la canónica correspondiente.*

4. *Como ejemplo analice* $\pi(x, x)$ *para el caso del dilema del prisionero, según la forma original y según la transformada.*

5. *Muestre que la dinámica del replicador no varia al llevar el juego a la forma canónica.*

Ejercicio 2 *Considere el juego simétrico cuya matriz de retornos está dada por:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Encuentre los equilibrios de Nash.*

2. *Muestre que el único equilibrio de Nash simétrico es ESS.*

3. *Suponga ahora que* x *es la ESS anteriormente hallada. Suponga que aparecen dos mutaciones simultaneamente* $y = e^1$ *y* $z = e^2$ *en cantidades dadas por* $\frac{1}{2}\epsilon$ *cada una siendo* ϵ *pequeño. Considere la mutación equivalente* $y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$*. Sea* w *la población posterior a la mutación. Muestre que la estrategia mutante* y *es mejor que la ESS no mutante* x *dada la población pasterior a las mutaciones.*

Ejercicio 3 *Demuestre completamente la proposición que afirma que toda ESS interior es globalmente estable para la dinámica del replicador. Formalmente, que* si $x \in int(\Delta) \cap \Delta^{ESS}$ entonces $\xi(t, x_0)_{t \to \infty} \to x$, para todo x_0.

Ejercicio 4 *Considere un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma*

$$\dot{x}_i = g_i(x)x_i,\ i = 1, ..., k$$

donde $g(x) = (g_1(x), ..., g_k(x))$ *es un campo vectorial al que llamamos vector de tasas de crecimiento y* $x(t) = (x_1(t), ..., x_k(t))$ *es un campo vectorial definido en un intervalo* $T \subset R$ *abierto. Supongamos además que* $g : X \to R^k$ *donde* X *es un abierto que contiene a* Δ *el lipschitziana en su dominio.*

1. *Muestre que la dinámica del replicador es un caso particular de este tipo de dinámica, la que además verfica que* $g(x)x = 0$ *(producto interno) para todo* $x \in \Delta$.

2. *Muestre que si existe un entorno* U_{x^*} *de* x^* *tal que* $g(y)x^* > 0$ *para todo* $y \in U_{x^*}$ *entonces* x^* *es asint oticamente estable.*

3. *Muestre que si existe un entorno* U_{x^*} *de* x^* *tal que* $g(y)x^* < 0$ *para todo* $y \in U_{x^*}$ *entonces* x^* *es inestable.*

   SUGERENCIA: use la entropía relativa como función de Liapunov.

4. *Interprete geométricamente los resultados anteriores.*

Ejercicio 5 *Considere un juego doblemente simétrico, esto es un juego simétrico para el que además se cunple la condición* $A = A^T$ *siendo* A *la matriz de retornos y* A^T *su traspuesta. Sea*

$$\dot{u}(x, x) = \frac{d}{dt} u(\xi(t, x), \xi(t, x))|_{t=0}$$

la derivada de la función de $u(x, x)$ *a lo largo de una solución de la dinámica del replicador que pasa por el estado* x *en* $t = 0$.

1. *Muestre que* $\dot{u}(x, x) = 2 \sum_{i \in K} \dot{x}_i u(e_i, x)$.

2. *Usando la simetría de* A *muestre que*

$$\dot{u}(x, x) = 2 \sum_{i \in K} x_i [u(e_i, x) - u(x, x)]^2$$

3. *Interprete el resultado* $\dot{u}(x, x) \leq 0$. *Muestre que la igualdad se cumple si y solamente si* $x \in int(\Delta)$.