Ejercicios para la materia Teoría de Juegos Evolutivos. 3a. lista

Facultad de Ingeniería UdelaR

Abril 2024

Ejercicio 1 *Considere el juego simétrico cuya matriz de pagos es*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *Encuentre los equilibrios de Nash.*
2. *Indique los equilibrios evolutivamente estables.*
3. *Considere la dinámica del replicador para este juego, y encuentre los equilobrios dinámicos.*
4. *Analice su estabilidad.*
5. *Indique las relaciones entre estos puntos y los equilibrios encontrados en lso numerales 1 y 2.*

Ejercicio 2 *Considere el juego simétrico definido por la matriz de pagos:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Muestre que* $(\mathrm{e}^1, \mathrm{e}^1)$ *es un equilbrio de Nash.*
2. *Plantee la dinámica del replicador.*
3. *Muestre que la estabilidad de los equilbrios dinámicos no puede ser analizada usando el teorema de Hartman Grobbman.*
4. *Muestre que existe un ciclo heterclínico que une los equilbrios* $\mathrm{e}^1, \mathrm{e}^2$ *y* e^3

   Sugerencia: en la ecuación de replicador considere la evolucióon del sistema partiendo de un punto en las aristas del simplex.
5. *Muestre que el ciclo hteroclínico es asintt́icamente estable.*

Ejercicio 3 *Muestre que la razón* x_j/x_k $x_j > 0, x_k > 0$ *entre dos subpoblaciones que siguen los comportamientos* j *y* k *respectivamente crece o decrece en el tiempo según cual de ellas presente un retorno mayor.*

Sugerencia: Considere $\frac{d}{dt}\left[\frac{x_j}{x_k}\right]$.

Ejercicio 4 *Considere los juegos simétricos con 2 estrategias definidos por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1. *Muestre que todos ellos pueden reducirse a uno de los siguientes 4 casos canónicos sin que se modifiquen los equilbrios de Nash.*
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$
siendo $a_1a_2 > 0$, $a_1a_2 < 0$ *o bien* $a_1a_2 = 0$.

2. *Construya la dinámica del replicador correspondiente.*

3. *Estudie la estabilidad de cada uno de los equilrios de Nash en cada caso.*

Ejercicio 5 *Sea* Δ_i *el conjunto de estrategias del* $i-$*ésimo jugador ,* $i \in I = \{1, ..., n\}$. *A partir de las siguientes definiciones,*

Definicion 1 $y_i \in \Delta_i$ **domina debilmente** *a* $x_i \in \Delta_i$ *si* $u_i(y_i, z_{-i}) \geq u_i(x_i, z_{-i})$ *para toda* $z \in \Pi_{j=1}^n \Delta_j$. *Una estrategia* x_i *se dice no dominada si no existe ningua estrategia que la domine debilemnte.*

Esta definición dice, que no importa que jueguen los demás, para el iésimo jugador, jugar y_i *nunca es mejor que jugar* x_i.

Definicion 2 $y_i \in \Delta_i$ **domina estrictamente** *a* $x_i \in \Delta_i$ *si* $u_i(y_i, z_{-i}) > u_i(x_i, z_{-i})$ *para toda* $z \in \Pi_{j=1}^n \Delta_j$.

demuestre el siguiente teorema:

Teorema 1 *Si la estrategia pura* i *es debilmente dominada por la estrategia* y *, entonces* $\xi_i(t, x_0)_{t\to\infty} \to 0$ *para cualquier* $x_0 \in \Delta^0$.

Sugerencia: *Suponga que* $y \in \Delta$ *domina a* e^i, $i \in K$, *esto es que* $u_i^(y - e^i, x) > 0$ *para todo* $x \in \Delta$.

- *demuestre que eixste* ϵ *tal que* $u_i^(y - e^i, x) > \epsilon > 0$ *para todo* $x \in \delta$.
- *Considere la función* $v_i(x) = \log(x_i) - \sum_{k=1}^k y_j \log(x_j)$
- *Muestre que* $\frac{d}{dt}tv(\xi(t, x_0) = u(e^i - y, x) \leq -\epsilon < 0$.

- *Como* $v_i(\xi(t,x_0)$ *decrece (a lo largo de las trayectorias) con el tiempo a menos infinito,* $\xi_i(t,x_0) \to 0$.

Ejercicio 6 *Considere el juego simétrico*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Muestre que existen dos equilbrios de Nash en la frontera del simplex* $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ *y* $q = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
2. *Muestre que* $\Delta^{NE} = \left\{(x_1, \frac{1}{2}, x_3) : x_1 + x_3 = \frac{1}{2},\ 0 \leq x_1, x_3 \leq \frac{1}{2}\right\}$.
3. *Muestre que* Δ^{NE} *es asintóticamente estable para la dinámica del replicador.*