MATEMÁTICA DISCRETA

CON

ISETL

Alumno objetivo	Primer año de la Enseñanza Media Tecnológica (CETP), opción Informática
Curso	Lógica para computación
Tema	Lógica de predicados
Item	Intercambio de cuantificadores
Conocimientos previos	○ Leyes de De Morgan ○ Equivalencia entre condicional y disyunción inclusiva ○ Propiedad involutiva de la negación ○ Escritura simbólica en la lógica de predicados ○ Leyes de intercambio entre cuantificadores ○ Sintaxis asociada al tema, que se utiliza en ISETL

Prof. A/C Ana María Antelo

Diciembre 2007

Fundamentación de la propuesta

Siguiendo la línea de trabajo propuesta en el curso acerca de pensar primero desde el punto de vista matemático y luego desde el computacional (en este caso implementando en ISETL), analizamos las ventajas de contar con este lenguaje como verificador.

Cuando el alumno cuenta con la posibilidad de verificar lo razonado utilizando otras estrategias no involucradas en el proceso inicial, se ve beneficiado tanto si la verificación confirma la validez de lo realizado, como si debe repensar el proceso, porque detecta errores. Si la verificación no se produce, y le indica que tiene un error, habilita al alumno a volver a pensar en el problema, en ese mismo momento, y buscar los por qué, reflexionar, corregir y volver a verificar.

La verificación de lo realizado, es para el alumno, una herramienta fundamental, que le brinda autonomía y lo motiva a seguir. No tener que esperar la corrección del docente, para asegurar la correctitud, le permite no reforzar errores por repetición, y reflexionar permanentemente sobre lo trabajado.

Este aspecto, nos llevó a pensar en aquellos temas en los que encontramos mayor dificultad en la verificación autónoma. Desde primaria, en los primeros cálculos, el alumno aprende estrategias de verificación, que sigue implementando luego con estrategias más o menos complejas, que surgen en casi todos los temas algebraicos. Incluso en el curso de Lógica para Computación que nos ocupa, el alumno puede, en la primer parte del curso (Lógica Proposicional) llevar a cabo desarrollos más o menos complejos usando distintas propiedades, que puede verificar usando las tablas de verdad.

Ese proceso, que permite que el alumno avance realizando ejercicios a nivel domiciliario, se corta cuando llegamos a Lógica de Predicados. En ese tema el alumno, llega semana a semana con la duda ¿está bien lo que hice? El mecanismo de verificación en este caso se reducee a la espera de la corrección docente, a la comparación de resultados con otros compañeros (no siempre válido, por la diversidad de caminos que se pueden adoptar) o la comparación con resultados de los libros que tiene la misma contra de la comparación con sus compañeros. El alumno muchas veces llega diciendo “No me da lo mismo y no sé donde está el error porque yo lo pensé distinto". Aquí es donde decidimos vincular el aprendizaje de la Lógica de predicados y en particular del Intercambio de cuantificadores, con la utilización del lenguaje ISETL.

Planteo matemático del tema

Actividad 1: Trabajo con dos expresiones cuantificadas

Metodología: Trabajo en equipos (3 o 4 integrantes)
Tiempo estimado: 10'

Sean las siguientes expresiones cuantificadas:

- No existe entero positivo menor que 100, que sea múltiplo de 6 y de 13 a la vez.
- Para todo entero positivo menor que 100, si es múltiplo de 6 entonces no es múltiplo de 13.

1. Identificar el universo
2. Definir los predicados utilizados en las expresiones, utilizando letras de predicados
3. Escribir simbólicamente, en coherencia con el universo y predicados establecidos, ambas expresiones cuantificadas.

Fundamentación de la actividad 1

En esta primer actividad, los alumnos retomarán la escritura simbólica de expresiones cuantificadas, haciendo hincapié en la definición de los predicados. Al exigir la escritura de los mismos mediante letras de predicados, que implican definiciones del tipo "x es…" se enfatiza su interpretación como funciones sobre un dominio (el universo elegido) con recorrido booleano.

El docente deberá estar atento durante el desarrollo de esta actividad, al surgimiento o no de diferentes universos posibles (Z o $\{z \in Z, 0<z<100\}$) ya que enriquecerá la puesta en común, el hecho de trabajar de las dos formas. Si no surgiera, el docente deberá guiar hacia su aparición.

Soluciones posibles de la actividad 1

Universo	$\mathbf{U} = Z$	Universo	$\mathbf{U} = \{z \in Z, 0<z<100\}$
Predicados	P(x): x está entre 0 y 100	Predicados	Q(x): x es múltiplo de 6
	Q(x): x es múltiplo de 6		R(x): x es múltiplo de 13
	R(x): x es múltiplo de 13		
Expresión Cuantificada 1	$\neg(\exists x)(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$	Expresión Cuantificada 1	$\neg(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$
Expresión Cuantificada 2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow \neg R(x))$	Expresión Cuantificada 2	$(\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$

Actividad 2: Puesta en común de la actividad 1

Metodología: Análisis comparativo

Tiempo estimado: 10'

Se solicitará a dos alumnos que planteen en el pizarrón la solución a la que llegaron. La selección de los alumnos no será casual. Se buscará que una de las soluciones planteadas lo haga en base al universo infinito (los enteros) y otra en base al universo finito (la restricción necesaria). Este hecho deberá quedar priorizado en la puesta en común, ya que resultará fundamental a la hora de trabajar la verificación con ISETL.

Fundamentación de la actividad 2

Al realizar una actividad en equipos, surge naturalmente una puesta en común que enriquece la actividad primaria. En este caso el análisis comparativo de una solución planteada con universo finito y otra con universo infinito es tan relevante para el resto de la propuesta, que hemos decidido incorporarla como una actividad en sí misma más que como el corolario de la primera.

Actividad 3: Equivalencia de expresiones con distinto cuantificador

Metodología: Taller. Trabajo individual.

Tiempo estimado: 10'

Demostrar utilizando propiedades, la equivalencia de las expresiones simbólicas obtenidas.

Aplicaciones y ordenamiento sugeridos:

- Leyes de intercambio de cuantificadores
- Propiedad asociativa de la conjunción
- Leyes de De Morgan
- Equivalencia entre disyunción inclusiva y condicional
- Leyes de De Morgan
- Equivalencia entre disyunción inclusiva y condicional

Fundamentación de la actividad 3

En este caso, hemos decidido trabajar en modalidad de taller, dando a los alumnos todas las herramientas que necesitarán utilizar, e incluso el orden sugerido, para unificar las entradas para la actividad siguiente. El hecho de que todos los alumnos tengan la misma secuencia de propiedades, nos permitirá aplicar en la siguiente actividad, una metodología expositiva, en la que la explicación será válida para cada alumno. Permitirá también la comparación entre pares, diluyendo las dificultades sintácticas que puedan presentarse en ISETL en la actividad 4, cuya atención no es objetivo de la actividad.

Soluciones posibles de la actividad 3

	$\neg(\exists x)(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$
Leyes de intercambio de cuantificadores	$(\forall x)\neg(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$
Propiedad asociativa de la conjunción	$(\forall x)\neg(P(x) \wedge (Q(x) \wedge R(x)))$
Leyes de De Morgan	$(\forall x)(\neg P(x) \vee \neg(Q(x) \wedge R(x)))$

Equivalencia entre disyunción inclusiva y condicional	$(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg (Q(x) \wedge R(x)))$
Leyes de De Morgan	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\neg Q(x) \vee \neg R(x)))$
Equivalencia entre disyunción inclusiva y condicional	$(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$

Al concluir con la tercera actividad, hemos finalizado el planteo matemático del tema. Hemos trabajado con dos expresiones cuantificadas equivalentes, demostrándolo matemáticamente, utilizando el lenguaje simbólico apropiado.

Planteo informático del tema

Actividad 4: Equivalencia de expresiones con distinto cuantificador

Metodología: Expositiva - interactiva.

Tiempo estimado: 10'

El alumno deberá recordar a esta altura la diferencia existente en ISETL entre un "true" que se obtiene al evaluar dos expresiones booleanas que mapean al mismo valor, y un "true" que está afirmando la tautología en un bicondicional, lo que da la equivalencia de la forma argumentativa. Si este tema estuviese alejado en el tiempo, con respecto a la clase actual, se recomienda su repaso en la clase previa, priorizando conceptos como los siguientes:

> Es habitual que el alumno escriba la Propiedad conmutativa de la conjunción, expresando simplemente $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, dando por obvio que p y q son enunciados cualesquiera. Si en ISETL definimos dos enunciados, por ejemplo p: 3<4 y q: 7<6 y luego evaluamos $p \wedge q = q \wedge p$, nos dará true, ya que la expresión enunciativa de la izquierda evalúa a falso al igual que la de la derecha. Pero eso, no nos demuestra que los enunciados sean equivalentes. También daría true, si evaluáramos por ejemplo $p \rightarrow q = p \vee q$, que obviamente no encierra expresiones equivalentes. El error está en quedarnos con una interpretación de la fórmula, lo cual da la satisfactibilidad, pero no su validez. Para demostrar la propiedad conmutativa de la conjunción entonces usando ISETL, deberíamos evaluar forall p,q in Bool| $(p \wedge q = q \wedge p)$ siendo Bool ={true,false}.
>
> La fórmula evalúa a true, que equivale a la demostración de que el bicondicional asociado a la propiedad, es una tautología.

Una vez asegurado este repaso (recomendado en la clase previa) se comenzará la actividad, analizando los pros y contras de seleccionar, de la actividad 2, distintos universos y predicados para su implementación con ISETL. Se observará, que esto no implica que necesariamente se deba trabajar con el universo de enteros entre 0 y 100. Se podría trabajar con el rango de datos de los valores del tipo "Integer" de C por ejemplo, (o cualquier otra restricción de Z a un conjunto finito que incluya lo necesario), y mantener los tres predicados que se trabajaron en la actividad 3. Esto es importante porque ISETL nos restringe en la no vinculación al dominio, ya que la sintaxis de las expresiones cuantificadas exige la explicitación del mismo.

Una vez resuelto esto, se procederá a implementar la evaluación de la primera equivalencia de la demostración de la actividad 3.

Aspectos como el manejo de paréntesis para que no surjan advertencias como “Syntax: warning -- id bound twice in same scope” pueden ser elementos extra a trabajar.

Completar la verificación, en sus pasos siguientes quedará a cargo del estudiante. Esto se podrá trabajar en el resto del módulo o como tarea domiciliaria.

Fundamentación de la actividad 4

Cuando realizamos la demostración matemática de la equivalencia, las propiedades fueron aplicadas sobre las letras de predicados. Ahora al implementar en ISETL, eso no es posible. Nos exige comprender a fondo que es lo que estamos aplicando y dónde lo podemos aplicar.

Cuando hablamos de P(x), prescindiendo de los cuantificadores, estamos en presencia de una expresión abierta. Esta expresión no posee valor de verdad en si misma. Al incluirla en una expresión cuantificada, la variable irá recorriendo los valores del universo, (dominio del predicado), mapeando a diferentes valores de verdad. Pasamos de expresiones abiertas a enunciados en los que son aplicables ciertas propiedades. Cuando aplicamos las Leyes de De Morgan por ejemplo, estamos trabajando con la negación de la conjunción de enunciados.

Cuando el universo es finito, (o si las variables están restringidas a un conjunto finito), las expresiones con cuantificadores, pueden ser interpretadas como términos ordinarios de la lógica proposicional. Genéricamente expresado, supongamos que $U=\{c_1,c_2, \ldots,c_n\}$, donde el cardinal del universo es n. Entonces, las expresiones cuantificadas pueden expandirse como sigue:

$$(\forall x)P(x) = P(c_1) \wedge P(c_2) \wedge \ldots \wedge P(c_n)$$

$$(\exists x)P(x) = P(c_1) \vee P(c_2) \vee \ldots \vee P(c_n)$$

Con un universo finito, entonces, los cuantificadores son sólo abreviaturas sintácticas. Con un universo pequeño, es perfectamente posible, razonar directamente con las expresiones expandidas.

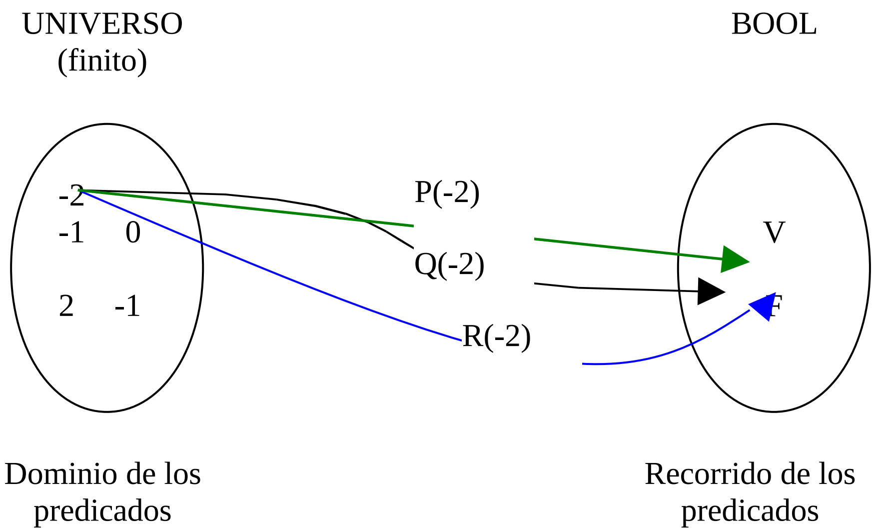
Si las variables no estuviesen restringidas a conjuntos finitos, no sería posible la expansión de la fórmula. Podría ser intuitivo escribir $P(c_1) \vee P(c_2) \vee P(c_3) \ldots$ pero esto no es una fórmula bien formada. Todas las fórmulas bien formadas tienen un tamaño finito, aunque no hay cota en cuán larga la fórmula puede ser.

Acotemos el dominio de los tres predicados al conjunto {-2,-1,0,1,2} para trabajar la expansión de la expresión cuantificada más fácilmente y comprender la idea. Tomemos la expresión cuantificada original y hagamos su expansión

$\neg(\exists x)(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$ con $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$

$\neg((P(-2) \wedge Q(-2) \wedge R(-2)) \vee (P(-1) \wedge Q(-1) \wedge R(-1)) \vee (P(0) \wedge Q(0) \wedge R(0)) \vee (P(1) \wedge Q(1) \wedge R(1)) \vee (P(2) \wedge Q(2) \wedge R(2)))$

Al trabajar ahora por ejemplo P(-2) estamos frente al enunciado: -2 está entre 0 y 100, cuyo valor de verdad es falso haciendo falso el primer término de la expansión. Podemos así evaluar la expresión total expandida, que es verdadera.



Si aplicamos una de las leyes de intercambio de cuantificadores, obtenemos

$(\forall x)\neg(P(x)\wedge Q(x)\wedge R(x))$ con $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$

cuya expansión resulta:

$\neg(P(-2)\wedge Q(-2)\wedge R(-2)) \wedge\neg(P(-1)\wedge Q(-1)\wedge R(-1)) \wedge\neg(P(0)\wedge Q(0)\wedge R(0)) \wedge\neg(P(1)\wedge Q(1)\wedge R(1)) \wedge\neg (P(2)\wedge Q(2)\wedge R(2))$ que evalúa también a verdadero, y es equivalente a la expansión anterior por aplicación de De Morgan .

Si nosotros trabajáramos en ISETL definiendo el conjunto dominio D={-2,-1,0,1,2}, definiendo los tres predicados involucrados, y luego usándolos en las expresiones cuantificadas, y preguntáramos si son iguales, estaríamos cometiendo un error conceptual frente a la verificación que queremos, pues la respuesta de la evaluación (que sería TRUE) sólo significaría que la **evaluación** de ambas expresiones es la misma.

A nosotros nos interesa verificar que la expresión $\neg(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)\wedge R(x))$ es equivalente a la expresión $(\forall x)\neg(P(x)\wedge Q(x)\wedge R(x))$ sean cuales sean los predicados P, Q y R, sea cual sea la evaluación de P(x) cuando x va tomando los distintos valores del dominio, y sea cual sea el dominio.

Como no nos interesa evaluar una imagen particular del predicado, sino lo que sucede cuando las imágenes van recorriendo todas las posibles combinaciones, es que debemos cuantificar en forma universal, a p, q y r en las expresiones de ISETL. Recordemos que estamos demostrando la equivalencia argumentativa de las expresiones, con independencia de la interpretación, que sólo es usada para concretar el razonamiento, y acercarnos a la edad de los estudiantes (15 a 17).

Solución posible de la actividad 4

Bool:={true,false};

forall p,q,r in Bool|((not exists x in[-200..200]|(p and q and r))=(forall x in[-200..200]| not (p and q and r)));
true;

Conclusiones

Más allá del valor de la verificación que permite este modo de trabajo, ya expresado en la fundamentación de la propuesta, exige repensar los aspectos teóricos del tema para su aplicación práctica. La diferencia entre una fórmula satisfactible y una válida se evidencia en la aplicación con ISETL, enriqueciendo los aprendizajes.

Bibliografía

BOCHENSKI, J.M. 1982 “Compendio de Lógica Matemática”. Madrid, Paraninfo

HURLEY, Patrick J. 2006 “A concise introduction to logic”.U.S.A. , Thomson

MORDECHAI, Ben – Ari. 2006 “Mathematical logic for computer science”. Great Britain, Springer

BURCH, Robert W. 2006 “Study guide for Hurley’s”. Canadá. Thomson

D’ANGELO, John P. & WEST Douglas B. “Mathematical thinking- Problem solving and proofs”

O’ DONNELL, John. “Discrete mathematics using a computer”

SOLOW, Daniel. 1992 “Como entender y hacer demostraciones en matemáticas”. Mexico, Limusa