DIVISIBILIDAD EN ISETL

Prof. Rosario Pujol

Prof. Laura Gonzalez

Prof. Teresa Pérez.

INTRODUCCIÓN A DIVISIBILIDAD EN 5º CIENTÍFICO USANDO ISETL.

CONSIDERACIONES PRELIMINARES:

- Cuando se trabaja en matemática discreta y programación en cursos aislados, el es el alumno quien debe establecer las conexiones entre ambas asignaturas. Sin embargo creemos que si se introducen los temas usando un lenguaje de programación se favorece la creación de estructuras mentales y la formalización de los conceptos que relacionan ambas disciplinas.
- El uso de la computadora en clase es una gran herramienta que permite que el alumno reconozca la necesidad de un uso correcto del lenguaje, ya sea el de programación o el matemático. Además es un elemento muy motivador para el alumno.

DELIMITACIÓN DE LA PROPUESTA:

- El objetivo del trabajo es elaborar una propuesta didáctica para introducir algunos conceptos del tema divisibilidad en quinto científico a través de un enfoque computacional, utilizando el programa ISETL.
- La unidad divisibilidad de 5º año científico, dice:

División entera. Propiedades. Algoritmo de Euclides. M.C.D, m.c.m. Teorema de Euclides. Números primos y números compuestos. Descomposición en factores primos.

- Los temas que se trabajarán específicamente son: división entera, concepto de múltiplo y divisor, mínimo común múltiplo y máximo común divisor, algoritmo de Euclídes.
- La implementación de la propuesta supone la reflexión sobre el concepto de función, la equivalencia entre definiciones, la traducción e interpretación del lenguaje matemático al lenguaje computacional y viceversa. En lo procedimental se trabajará sobre procesos de resolución de problemas logrando progresivamente mayores niveles de abstracción

IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA:

- Se elaborara un plan de clases.
- Se trabajara con el mismo en un grupo de quinto científico, para evaluar la viabilidad de la propuesta. Somos conscientes que esto no constituye de ningún modo una investigación; sino un primer acercamiento a la puesta en práctica de la propuesta, como forma de detectar las dificultades que puedan surgir.

PLAN DE CLASES.

PRIMERA CLASE

OBJETIVO:
Llegar a la definición de división entera en Z y analizar que la condición de resto positivo garantiza la unicidad.
Comentario: Consideramos que trabajar en Z favorece la comprensión de la necesidad del resto positivo para garantizar la unicidad del cociente y del resto.

ACTIVIDAD 1)

a) Completa los esquemas de división entera $\forall$ **n / n $\in$ N $\wedge$ 10 $\leq$ n $\leq$ 25.**

$$\mathbf{n} \quad \begin{array}{|l} \underline{\ \mathbf{6}\ \ } \end{array}$$

b) Ordena los resultados en la siguiente tabla:

dividendo	Divisor	cociente	resto
10	6		
	6		
	6		

Comentarios:

- El objetivo es recordar el concepto de división entera y su algoritmo. Los alumnos de este nivel ya tienen un manejo informal del tema.
- La confección de la tabla se realiza para facilitar la interpretación de la actividad que se propone a continuación.

ACTIVIDAD 2)

a) Copie el siguiente programa en la computadora y correrlo:

```
>      for x in  [10..25] do
>>         writeln x, x div 6, x mod 6;
>>     end;
```

b) Comparar los resultados con los que obtuvo en la actividad anterior.

c) Explique "qué hacen" **x mod 6** y **x div 6.**

Comentarios:

- Al comparar ambas actividades se intenta lograr que a partir de lo que el alumno ya conoce comprenda y deduzca lo que el programa de ISETL computa.

- Las siguientes actividades creemos que permitirán al alumno generalizar los resultados anteriores en Z.

ACTIVIDAD 3)

a) Repita la actividad 2 para x in [-10..10].
b) Escriba sus observaciones.

ACTIVIDAD 4)

a) Repita la actividad 2 para **x div 8** y **x mod 8**.
b) Escriba sus observaciones.

ACTIVIDAD 5)

a) Repita la actividad 3 para **x div 8** y **x mod 8**.
b) Escriba sus observaciones.

Comentarios:

- Consideramos que el programa ISETL permite centrar la atención en los resultados y no en la operatoria. Favoreciendo la observación de las clases que establecen los restos.

CONCLUSIONES A LAS QUE CREEMOS SE DEBE LLEGAR:

- Definición de división entera:
  $\forall$ **a, b** $\in$ **Z b>0** $\exists$ **c y r / a = b.c + r y 0<r<b**

- Observar cuales son los restos posibles según el divisor.
- Observar que la condición de r>o garantiza la unicidad.
- Demostrar la unicidad del cociente y el resto. La demostración se realizará en la forma tradicional.

TAREA DOMICILIARIA:

Expresar por extensión los siguientes conjuntos:

R_0={x / x $\in$ [4..25] / x mod 6 = 0} = {x / x $\in$ N, 4 $\leq$ x $\leq$ 25 y el resto de la división de x entre 6 es 0}
R_1={x / x $\in$ [4..25] / x mod 6 = 1}
R_2={x / x $\in$ [4..25] / x mod 6 = 2}
R_3={x / x $\in$ [4..25] / x mod 6 = 3}
R_4={x / x $\in$ [4..25] / x mod 6 = 4}
R_5={x / x $\in$ [4..25] / x mod 6 = 5}

P_0={x / x $\in$ [4..25] / x mod 4 = 0}
P_1={x / x $\in$ [4..25] / x mod 4 = 1}
P_2={x / x $\in$ [4..25] / x mod 4 = 2}
P_3={x / x $\in$ [4..25] / x mod 4 = 3}

Comentarios:
- La actividad se propone con el objetivo de retomarla en la siguiente clase para llegar a la definición de múltiplo.
- Se plantea en lenguaje de conjunto para repasar la notación ya que la misma se utilizara en “set formers” al implementar programas en ISETL.

SEGUNDA CLASE

OBJETIVOS:

- Obtener la definición de múltiplo.
- Introducir los "set formers" y su traducción en ISETL
- Retomar el concepto de función y su traducción en ISETL.
- Trabajar sobre la equivalencia de definiciones. Observando que damos una definición equivalente a partir de las posibilidades del programa.

Retomando la actividad propuesta como tarea domiciliaria observamos R_0 y P_0 y vemos que estan incluidos en el conjunto de los múltiplos de 6 y de 4 respectivamente.

Definición de múltiplo: a es múltiplo de b $\Leftrightarrow$ a mod b = 0.

ACTIVIDAD 6)

a) Usando esta definición de múltiplo escribir los múltiplos de 12 entre 30 y 100.

Comentario: es importante que efectivamente se use la definición ,por lo que sería importante que los alumnos sistematicen como se encuentran los múltiplos usando esta definición. Si para los alumnos es muy evidente cuales son los múltiplos y no logran usar la definición cambiar el número, y usar por ejemplo 23. Es importante que los alumnos logran sistematizar su búsqueda por ejemplo a través de la confección de tablas.

b) Escribir el conjunto hallado en a) por comprensión
Se pretende que los alumnos logren una expresión del tipo:
mul(12)={x/x$\in$ N $\wedge$30$\leq$ x $\leq$ 100 $\wedge$x mod 12 = 0}

A partir de esta formulación se introducira la notación de "set formers en ISETL y se implementara en el computador.

M:={x:x in [30..100] | x mod 12 = 0}
M;

ACTIVIDAD 7) ¿Es posible que ISETL escriba todos los múltiplos de 12?

Permite observar que el conjunto de múltiplos de un número es infinito y que es imposible escribirlo todo, la imposibilidad de hacerlo con la computadora permita una mejor comprensión del concepto.

ACTIVIDAD 8)

a) Escirbir en notación de conjuntos el conjunto de los múltiplos de un número cualquiera(a) mayores que 30 y menores que 100.
b) Complete la siguiente tabla:

a	Conjunto de los múltiplos de a
20	
10	
35	
55	
110	

Comentario:
La lectura de la tabla permite analizar:

- Dado un número obtenemos un conjunto.
- ¿Esta correspondencia es una función? ¿cuál es su dominio? ¿Y su conjunto de llegada?. En este momento debemos retomar el concepto de función.
- El siguiente paso sería expresar esta función en lenguaje matemático y luego implementarla en ISETL introduciendo el lenguaje.

En lenguaje matemático:

mul: $\mathbf{N} \rightarrow \boldsymbol{P}(\mathbf{N})$
mul(a) = $\{x / x \in \mathbf{N} \wedge 30 \leq x \leq 100 \wedge x \textbf{ mod } a = 0\}$

En ISETL:

```
mul:=func(a);
return { x : x in [ 30..100] | x mod a = 0 };
end;
```

ACTIVIDAD 9) Hallar : mul(7);mul(50); mul(91);mul(110).

TAREA DOMICILIARIA:

Encontrar y expresar en lenguaje matemático una función que halle los múltiplos menores de 200 de un natural cualquiera.

TERCER CLASE:

OBJETIVOS:

- Introducir el concepto de mínimo común múltiplo de dos números. Implementar una función que permita hallarlo.

ACTIVIDAD 10)

a) Complete la siguiente tabla según el ejemplo:

A	Tope	Múltiplos de a menores o iguales que el tope y mayores que cero
10	100	{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}
10	150	
10	300	
5	10	
5	40	
5	60	
5	80	
5	100	
20	100	
20	200	
20	300	
50	100	
50	200	
50	330	

b) Exprese en lenguaje matemático una función que dado un número natural encuentre el conjunto de sus múltiplos menores o iguales que otro número natural que llamaremos tope y mayores que cero.

c) Exprese la función hallada en b) utilizando ISETL..

Comentarios:

- Este problema permite generalizar los resultados de la tarea domiciliaria.
- Se deberá explicitar que no se considerara el 0, ya que el mismo pertenece a todos los conjuntos de múltiplos.
- La tabla permite analizar que para obtener el conjunto necesitamos conocer el número **a** y el **tope**, entonces podemos concluir que para cada par (**a**, **tope**) se obtiene un y solo un conjunto, estamos entonces frente a una función.
- Creemos que los alumnos en la parte b) deberán llegar a una expresión similar a:

  en lenguaje matemático:

  mul: N x N $\rightarrow$ ***P*(N)**
  mul $=\{x \,/\, x \in N \ \wedge\ x \leq \text{ tope } \ \wedge\ x$ **mod** $a = 0\}$

En la parte c) deberían llegar a una expresión como:

```
 mul:= func(a,tope);
        return { x:x in [1..tope] | x mod a = 0};
end;
```

Consideramos que el objetivo central no es que los alumnos aprendan la sintaxis de ISETL sino que puedan lograr mayores niveles de abstracción , e integrar conceptos como el de función en el tema divisibilidad, lo cual no se hace tradicionalmente. Por lo tanto las dificultades con la sintaxis intentaremos no representen un obstáculo para el alumno.

Pero sí se puede resaltar la importancia de utilizar el lenguaje correctamente como forma de comunicación, ya sea ISETL o matemático. La computadora no me entiende si no me expreso correctamente.

- Podría plantearse que el conjunto de múltiplos es infinito y si es posible que ISETL escriba todos los múltiplos de un número. El uso del programa permite observar en primer lugar que es imposible implementarlo ya que se necesita una tupla sobre la cual "elige" los múltiplos. Se podrá ir aumentando el tope y así observar que siempre se encuentran más múltiplos.

ACTIVIDAD 11) Encuentre el conjunto de los múltiplos comunes a dos naturales dados. Expréselo en lenguaje matemático y en ISETL.

Lenguaje matemático: **mul**(**a**) $\cap$ **mul**(**b**).

ISETL: A:= **mul**(**a**,**tope**) **inter mul**(**b**,**tope**);

Definición de mínimo común múltiplo m.c.m(a,b): Llamamos mínimo común múltiplo de dos números naturales al menor múltiplo común no nulo.

ACTIVIDAD 12)

a) Encuentre el mínimo común múltiplo de 360 y 405.
b) ¿Cómo lo hallaría utilizando ISETL?.

Comentarios:

- la solución matemática del problema no representa mayores dificultades para el alumno, pero para su implementación en ISETL deberemos incluir una función que permita hallar el mínimo de un conjunto, la llamaremos **menR**.

La función **menR** toma un conjunto y una relación de orden (en este caso la relación menor) y devuelve el menor de los elementos del conjunto.
El docente deberá incluir las siguientes funciones en ISETL para que los alumnos simplemente la utilicen:

menR:= func(X,R); return [x : x in X | forall y in X | R(x)(y)] (1) ; end;
menor:= func(x); return | y → x ≤ y | ; end;

Por ejemplo, dado el conjunto C:={7,9,5,8} hallar el menor de los elemntos de C utilizando menR y la relación de menor.

```
>	C:={7,9,8,5};
>	menR(C,menor);
5;
```

Retomando el problema del cálculo del mínimo común múltiplo entre 360 y 405, la solución en ISETL de la actividad es:

```
>	A:=mul(360,13000) inter mul(405,13000);
>	menR(A,menor);
3240;
```

ACTIVIDAD 13) Hallar usando ISETL :

a) mcm(438,138)
b) mcm(5742,3762)
c) Investigar cual debe ser el **tope** para hallar los conjuntos de múltiplos.

Comentarios:

Esta actividad obliga a realizar una síntesis de lo trabajado en la clase.

CUARTA CLASE:

OBJETIVO:

- introducir el concepto de divisor a partir del de múltiplo.
- Introducir el concepto de mayor divisor común.
- Analizar como obtener el M.C.D., comenzar el planteo del algoritmo de Euclides.

ACTIVIDAD 14)

a) Escriba el conjunto de los divisores de 20 por extensión.
b) Escriba el conjunto de los divisores de 20 por comprensión.

Comentario:

Se deberá lograr que, primero, los alumnos comparen las definiciones clásicas de divisor y de múltiplo y luego discutan el siguiente planteo:

$$\mathbf{a \mid 20 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ n\ /\ 20 = a.n \quad \Leftrightarrow \quad 20 = \mathring{a} \quad \Leftrightarrow \quad 20\ mod\ a=0}$$

Definición de divisor: **a** es **divisor** de **x** ⇔ **x mod a** = 0

ACTIVIDAD 15)

a) Hallar los divisores de 18 y de 51 usando la definición anterior.
b) ¿Cómo lo realizaría con la computadora?
c) ¿Cómo lo realizaría para un número cualquiera?

Comentarios:

- El objetivo de la parte a) es que los alumnos usen la definición, por lo que se debe lograr que los alumnos expliciten como lo hacen. Se podría ordenar la búsqueda a través de la confección de una tabla, pero lo fundamental es que cada alumno pueda explicitar sus mecanismos y quede claro como usa la definición.

a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
18 mod a																				

¿Puedes predecir los resultados de la segunda fila para los a>18?

- Este actividad permite visualizar algunas propiedades como que todos los divisores de **a** son menores o iguales que **a**, por lo que los conjuntos de divisores son finitos.

- En la parte b) se pretende que logren llegar a escribir los conjuntos, primero en **lenguaje matemático:**

$d(18)=\{\ x\ /\ x \in\ N \wedge 18\ \mathbf{mod}\ x = 0\}$ $d(\mathbf{nr})=\{x\ /\ x \in\ N \wedge nr\ \mathbf{mod}\ x = 0\}$

y luego que lo traduzcan a ISETL.
d(18)={ x | 18 mod x=0} d(nr)={x | nr mod x =0}

Comentario: A partir de la resolución de las actividades anteriores hacer un razonamiento análogo al hecho para los múltiplos e implementar la función divisor, a saber:

Divisor :**N → *P*(N)**
Divisor:= func(**nr**);
return {x:x in[1..nr] | **nr** mod x =0};
end;

ACTIVIDAD 16) Busca, usando la función anterior, los divisores de 345 y de 1173.

TAREA DOMICILIARIA:

1. busca los divisores de:
   1.i. (1173 mod 345),
   1.ii. (345 mod 138)
   1.iii. (138 mod 69).
2. Calcula el M.C.D. entre 1173 y 345.
3. Expresa por extensión los siguientes conjuntos:
   3.i. divisor(0) inter divisor(69),
   3.ii. divisor (138) inter divisor (69)
   3.iii. divisor (138) inter divisor (345)
   3.iv. divisor (1173) inter divisor (345).
4. Escribe tus conclusiones.

QUINTA CLASE

OBJETIVOS:
Dar la justificación teórica al Algoritmo de Euclides e implementarlo en ISETL.

ACTIVIDAD 17) Demostrar que si x|a y x|b entonces x|a mod b.

ACTIVIDAD 18) Demostrar que si x|b y x|a mod b ,entonces x|a.

Comentario: Estas demostraciones se realizan en clase sin usar el interprete, los alumnos deberán trabajar sobre la equivalencia entre definiciones.

ACTIVIDAD 19) Demostrar que los siguientes conjuntos son iguales:
divisor (a) ∩ divisor (b) y divisor (b) ∩ divisor (a mod b)

ACTIVIDAD 20) Calcular
a) M.C.D(7315,3910);
b) M.C.D.(365,73);
c) M.C.D.(11977,3857).

Comentario: Se sugiere mostrar a los alumnos el esquema gráfico usual en el manejo del Algoritmo y hacerles notar que el último resto no nulo es el M.C.D. buscado.

A modo de ejemplo: **Hallar el MCD(11977, 3857)**

Grafico usual				**Trabajando en ISETL**
	3	9	2	11977 mod 3857 = 406
11977	3857	406	203	3857 mod 406 = 203
406	203	0		406 mod 203 = 0

Observamos que :
$\mathbf{a \bmod b = r_1}$
$\mathbf{b \bmod r_1 = r_2}$
$\mathbf{r_1 \bmod r_2 = 0}$

Este mecanismo en sí mismo es recursivo, en ISETL lo implementamos como una función (recursiva) porque es lo que el lenguaje permite.

ACTIVIDAD 21) Escribe la la función que permite hallar el M.C.D.,basándote en el algoritmo anterior.

Comentario: se pretende que los alumnos lleguen a la siguiente definición por recurrencia:

M.C.D.: ZXZ → Z

Comentario:

Se deberá proponer a los alumnos casos concretos para que apliquen la definición de modo que comprendan la nueva definición de M.C.D. como función recursiva y el mecanismo que permite implementarlo en ISETL.

$$\text{M.C.D.}(a,b) = \begin{cases} b & \text{si } a \bmod b = 0 \\ \text{M.C.D.}(b,\ a \bmod b) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ACTIVIDAD 22) Escribir el algoritmo usando el intérprete.

```
$ M.C.D: ZXZ→Z
M.C.D :=func(a,b);
        If  a mod b=0 then return b;
       else return  M.C.D.(b,a mod b);end;
      end;
```

Comentario:
Uno de los puntos de contacto entre Matemática y Programación es la elaboración y utilización de algoritmos, al respecto Griamaldi(227) sostiene:

> *"En primer lugar un **algoritmo** es una lista de instrucciones **precisas** diseñadas para resolver un **tipo** de problema particular, no solamente un caso especial. En general, esperamos que todos nuestros algoritmos reciban una **entrada** y nos proporcionen el resultado (o resultados) necesario como **salida.** De igual modo un algoritmo debe proporcionar el mismo resultado si repetimos el valor (o valores) para la entrada. Esto sucede cuando la lista de instrucciones es tal que cada resultado intermedio proveniente de la ejecución de cada instrucción es único y solo depende de la entrada (inicial) y de cualquier resultado que se pudiera haber obtenido en cualquiera de las instrucciones precedentes. Para lograr esto hay que eliminar toda vaguedad del algoritmo; las instrucciones deben describirse de forma simple pero no ambigua de modo que pueda ser ejecutada por la máquina. Por último, nuestro algoritmo no puede continuar por siempre. Dede terminar después de la ejecución de un número finito de instrucciones."*

COMENTARIOS ACERCA DE LA APLICACIÓN DE LA PROPUESTA EN UN GRUPO DE 5º CIENTIFICO.

Se *t*rabajó en clases extra-curriculares con alumnos de 5º científico del Colegio Santa Elena de Lagomar.

Perfil del grupo:

Es un grupo de trece alumnos con buen nivel de motivación y curiosidad. Los alumnos conocen a las docentes de años anteriores, y mantienen una buena relación con ellas. Es un grupo con avanzados conocimientos de ingles y muy familiarizados con el uso del P.C.

Observaciones de los docentes:

Los alumnos demostraron entusiasmo e interés por la tarea propuesta así como flexibilidad al cambio.

No se plantearon dificultades en el manejo del intérprete.

Demostraron confianza en los resultados que el computador dió como respuesta a los ejercicios propuestos. Por ejemplo si bien les sorprendió mucho el cociente y resto de la división entera para dividendo negativo no cuestionaron los resultados que dió la computadora. Esto favoreció la comprensión de la necesidad de que el resto sea positivo para garantizar la unicidad del cociente y resto.

Cuando planteamos conceptos conocidos pero desde una nueva perspectiva como el de m.c.m. no tuvieron dificultad en incorporar el concepto de función y abstraer.

Conclusiones.

Creemos que para implementar cuaquier tema desde un enfoque computacional primero debe el docente reformular y reflexionar sobre lo que quiere proponer. No se trata de hacer lo mismo que antes pero con la computadora,es necesario reelaborar la forma de presentar los conceptos a partir de las posibilidades de la nueva herramienta: Al planificar una clase en ISETL es importante tener en cuenta las funciones que puede necsitar el alumno y que no estan implementadas en el lenguaje, para incluirlas previamente. .Creemos que puede ser viable el uso de un lenguaje computacinal para tratar este tema a nivel de enseñanza secundaria.

Fortalezas:

- Cuando lo que nos interesan son los resultados , permite concentrarse en los mismos y no en los mecanismos
- Estimula la resolución algoritmica de problemas.
- La importancia del uso correcto del lenguaje.
- Los alumnos se interesan en la actividad con más entusiasmo.
- Permite la integración de conceptos.

Debilidades.

- No permite la demostración formal de aspectos teóricos.
- Requiere un acceso fluído a la sala de informática lo cual no es posible en la enseñanza pública actual.

BIBLIOGRAFÍA:

- Introduction to Discrete Mathematics with ISETL.
  William E. Fenton, Ed Dubinsky.

- Intoducción al Algebra.
  Mischa Cotlar, Cora Ratto de Sadosky.

- Folleto de División Entera (tapa verde).
  Adhemar Infantozzi.

- Analisis Matematico.
  Rey Pastor.

- Calculus.
  Tom Apostol.

- Matemática Discreta y Combinatoria.
  Grimaldi.

- Transparencias del curso: “Introducción a la Matemática Discreta con ISETL”.
  Sylvia Da Rosa.