

1. INTRODUCCIÓN

El presente informe es resultado del trabajo con el lenguaje de programación ISetL. ISetL es una herramienta que nos permite programar funciones sobre conjuntos discretos. En nuestro caso trabajaremos sobre subconjuntos del conjunto de números naturales.

Este lenguaje de programación es el que trabajamos en el curso “Matemática discreta usando ISetL” de la mano de la profesora Sylvia da Rosa. Una ventaja muy importante de trabajar con este lenguaje, es que las funciones definidas pueden ingresarse y devolver resultados en el lenguaje que se trabaja dentro de cada salón de clase en particular. Así por ejemplo en nuestro caso particular, al intentar realizar una división entera de divisor 0, el programa nos devuelve: “LA DIVISIÓN ENTRE CERO NO ESTÁ DEFINIDA”

En este informe se proponen una serie de actividades a llevar a cabo en primer año de ciclo básico, para trabajar con el tema divisibilidad con números naturales.

El objetivo fundamental de las actividades propuestas es aprender matemática. Se pretende investigar con la ayuda del programa ISetL, validar o refutar algoritmos de cálculo y comprobar propiedades que sin la ayuda del ordenador tendrían que ser decretadas por el docente. Esto es; se utilizará el programa ISetL como una mera herramienta de trabajo, al igual que dentro del salón de clase se utiliza la calculadora. Al decir de Leibniz: “*Es lamentable que personas de excelencia deban desperdiciar horas como esclavos en una labor de calcular, que podría confiarse a otras personas si fueran utilizadas máquinas¹*”. Y así lo haremos. Otra ventaja a la hora de usar un programa para hacer nuestros cálculos es la precisión (además de la rapidez como dijimos antes) con que el ordenador realiza los mismos.

Por lo dicho anteriormente, fundamentalmente por ser nuestro principal objetivo aprender matemática (y no computación) es que las funciones utilizadas en las actividades no son elaboradas por los estudiantes, sino que son definidas y presentadas por el docente.

Se transcribe a continuación la parte del programa de primer año de ciclo básico que corresponde al tema que nos ocupa en este trabajo:

Se sugiere iniciar el estudio de divisibilidad mediante la resolución de problemas sencillos que permitan recordar y afianzar los conocimientos sobre el tema adquiridos en el ciclo escolar. En una etapa posterior se alcanzará un tratamiento más formal y preciso en cuanto a definiciones y propiedades.

Se ejercitará el cálculo mental del mcm y MCD evitando en una primera instancia la aplicación de metodologías para su cálculo; las que quedarán postergadas para una etapa posterior y luego aplicadas sólo en aquellos casos en que el cálculo mental resulte difícil. Implica lo anterior, evitar ejercitaciones reiterativas de aplicación de metodologías de cálculo. Se propondrán problemas sobre el tema que integren las distintas propiedades estudiadas.

Teniendo en cuenta lo anterior, y suponiendo ya conocidas las conceptos de división entera, divisor, múltiplo, conjunto de divisores, conjunto de múltiplos, y concepto de número primo; se tratará de conseguir con esta herramienta informática, validar métodos

¹ Sylvia da Rosa; *La matemática discreta como formación básica*.

y algoritmos de cálculo para “*aquellos casos en que el cálculo mental resulte difícil*” como dice en el programa.

Se trabajará en una primera instancia a nivel conceptual, se familiarizará al alumno con el manejo del programa abordando las nociones conocidas por el alumno.

En la segunda etapa se trabajará con el conjunto de divisores comunes a dos números (respec. múltiplos comunes) y se tratará de justificar la existencia de un máximo (resp. mínimo), para llegar así a formalizar las definiciones de máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

En una tercera etapa, se intentará llegar a un algoritmo de cálculo del MCD en casos en que no es sencillo determinar el conjunto de divisores comunes. Así se llegará al algoritmo de Euclides.

Al final, y relacionando los conceptos vistos anteriormente (MCD y MCM), se intentará justificar usando funciones definidas en IsetL que $a.b = MCD(a,b) . mcm(a,b) \quad \forall a,b \in \mathbb{N}$

2. **ACTIVIDADES**

En esta sección se presentan, los objetivos a perseguir con cada una de las actividades a trabajar en clase, y las funciones a utilizar durante el desarrollo de las mismas.

Las actividades propiamente dicha se incluyen en este trabajo en forma de *repartidos*, pues a la hora de llevar este trabajo a la práctica, es de esa forma como se van a entregar las actividades a los alumnos.

2.1. **ACTIVIDAD 1 – Primer encuentro con IsetL**

Objetivos:

- En esta primera actividad, como se dijo anteriormente, se pretende familiarizar al estudiante con el manejo del programa.
- Como también se dijo, se suponen conocidas nociones de divisibilidad numérica, que se abordarán en esta actividad.

Funciones a utilizar durante esta actividad:

```
- División entera:

> divisionentera:=func(x,y);
>> if is_nat(x) and is_nat(y) then
>> if y=0 then
>> print "LA DIVISION ENTRE CERO NO ESTA DEFINIDA";
>> else if y>0 then
>> return [x div y,x mod y];
>> end;
>> end;
>> end;
>> end;
```

- Conjunto de divisores de un número natural:

```
> divisores:=func(x);
>> if is_nat(x) and x>0 then
>> return {y:y in [1..x]|x mod y=0};
>> else if x=0 then
>> print "TODOS LOS NATURALES MENOS EL CERO SON DIVISORES DEL
CERO";
>> end;
>> end;
>> end;
```

- Número primo:

```
> primo:=func(x);
>> if is_nat(x) and x>1 and divisores(x)={1,x} then
>> print "ES PRIMO";
>> else if x>1 and not(divisores(x)={1,x}) then
>> print "ES COMPUESTO";
>> else if x=0 or x=1 then
>> print "NO ES PRIMO";
>> end;
>> end;
>> end;
>> end;
```

- Conjunto de los múltiplos de un número natural menores que otro dado

```
> multiplos:=func(x,n);
>> if is_nat(x) and is_nat(n) and x>0 and n>0 then
>> return {z:z in [0..n-1]|z mod x=0};
>> else if x=0 then
>> return {0};
>> end;
>> end;
>> end;
```

2.2. **ACTIVIDAD 2 – MCD y MCM por inspección**

Objetivos:

- En esta segunda actividad, se introducirán los conceptos de divisores y múltiplos comunes, y de MCD y MCM.
- Éstos se definirán como máximo y mínimo respectivamente de los conjuntos de divisores y múltiplos comunes.
- Se intentará justificar la existencia y unicidad de éstos dos números, y se calcularán por inspección, es decir, se buscará el máximo (o mínimo) de un conjunto definido por extensión.
- También se justificará en cada caso, porqué se habla de máximo (o mínimo) y no se habla de mínimo (respectivamente máximo), pues el mínimo del conjunto de divisores comunes a dos naturales es siempre 1 (el conjunto de múltiplos comunes no tiene máximo)

Funciones a utilizar durante esta actividad:

- Conjunto de divisores comunes a un par de números naturales:

```
> divisorescomunes:=func(x,y);  
>> if is_nat(x) and is_nat(y) and x>0 and y>0 then  
>> return {z:z in [1..max(x,y)]|x mod z=0 and y mod z=0};  
>> else if x=0 and y>0 then  
>> return {z:z in [1..y]|y mod z=0};  
>> else if y=0 and x>0 then  
>> return {z:z in [1..x]|x mod z=0};  
>> end;  
>> end;  
>> end;  
>> end;
```

- Conjunto de los múltiplos comunes de dos números naturales menores que		
- MCD		
	> MCD:=func(x,y);	
	>> if is_nat(x) and is_nat(y) then	at(n) and x
	>> if x mod y=0 then return y;	and z mod y
	>> else return MCD(y,x mod y);	
	>> end;	
	>> end;	
	>> end;	
		- MCM.
		> MCM:=func(x,y);
		>> return x*y div MCD(x,y);
		>> end;

2.3. **ACTIVIDAD 3 – Algoritmo de Euclides**

Objetivos:

- En esta actividad, se calculará el MCD de dos números dados, utilizando el algoritmo de Euclides.
- La idea de utilizar ISetL en la misma, es que tenemos definida la función divisionentera. De esta forma los cálculos no serán impedimento a la hora de aprender un algoritmo de cálculo.

Funciones a utilizar durante esta actividad:

- divisionentera. (ya fue presentada)
- MCD (ya fue presentada)

2.4. **ACTIVIDAD 4 – Una propiedad importante**

Objetivos:

- En esta última actividad, se intentará concluir que el producto de dos números naturales es igual al producto de su MCD y de su MCM, como ya se dijo antes.
- No se intentará hacer una prueba del mismo en el sentido formal, sino que la verificaremos con casos particulares.

- En este sentido, la justificación del programa en esta actividad, es además de no complicarnos con los cálculos, poder conjeturar la veracidad de la propiedad, *probando* todas las veces que sea necesario con los números que deseen nuestros estudiantes.

Funciones a utilizar durante esta actividad: (todas ya fueron presentadas)

- MCD
- MCM
- Producto de dos números (esta función es predefinida en Isetl).

3. CONCLUSIONES

- **Al utilizar Isetl notamos que la planificación requiere de un esfuerzo mayor. Es todo un desafío introducir una nueva estrategia para plantear una situación-problema utilizando tal herramienta didáctica.**
- **Pero a pesar de todo el esfuerzo que requiere los objetivos a ser alcanzados parecen estar más cerca.**
- **Sin duda alguna hace la clase más divertida motivando tanto a los alumnos como a docentes.**

4. BIBLIOGRAFÍA

- Siberio, Daniel. *Notas para un curso de Álgebra I en el I.P.A.*
- Osin, Luis. *Introducción al análisis matemático. Kapelusz – 1966*
- Baldor, Aurelio. *Aritmética*. Cultural Centroamericana - 1968
- Beclcredi, L y Zambra, M. Gauss – primer año. La flor de itapebí - 1998
- grupo Botadá (Martha Borbonet y otros) . Matemática 1. Fin de siglo – 1995.
- Pequeño Manual de ISetL.
- da Rosa, Sylvia; La matemática discreta como formación básica.

ACTIVIDAD 1 - Primer encuentro con ISetL

Ingresando en ISetL: **divisionentera(71,5);**

Nos devuelve **(11,5)** lo que significa que el cociente de la división de 71 entre 5 es 11 y el resto es 5

$$\begin{array}{r} 71 \quad | \quad 6 \\ 5 \quad 11 \end{array}$$

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
65	7		
59	5		
43	8		
77	6		

1. Completa la siguiente tabla. Verifica tus resultados

usando la función divisionentera.

2. Completa los siguientes esquemas de división entera:

■ $\begin{array}{r} 249 \quad | \quad 50 \\ \dots \quad \dots \end{array}$

■ $\begin{array}{r} 761 \quad | \quad 39 \\ \dots \quad \dots \end{array}$

■ $\begin{array}{r} 93 \quad | \quad 11 \\ \dots \quad \dots \end{array}$

■ $\begin{array}{r} 197 \quad | \quad 82 \\ \dots \quad \dots \end{array}$

■ $\begin{array}{r} 38 \quad | \quad 93 \\ \dots \quad \dots \end{array}$

■ $\begin{array}{r} 309 \quad | \quad 0 \\ \dots \quad \dots \end{array}$

3. Completa la siguiente tabla de la relación es divisible por usando la función divisionentera. Justifica tu respuesta

	2	3	4	5	9	11
519						
3315						
6420						
186						
1998						

4. Ingresando en ISetL la expresión **divisores(8)**; nos devuelve en pantalla {1,2,4,8} que es el conjunto de divisores de 8.
Escribe el conjunto de divisores de n en cada caso, confeccionando la tabla:

n	Divisores
0	
1	
12	
13	
32	
56	
37	

5. Verifica tus resultados con la función divisores en ISetL. Observando la tabla construida en el ejercicio 4, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

- Todo número natural es divisor de si mismo.
- El 1 es divisor de cualquier número natural.
- El 0 no tiene divisores.
- El cero es divisible entre cualquier número natural.

6. Ingresando en ISetL **multiplos(8,45)**; nos devuelve el conjunto de los múltiplos de 8, menores que 45.

- Escribe el conjunto de los múltiplos de 9 menores que 90.
- Escribe el conjunto de los múltiplos de 9 menores que 120.
- Escribe el conjunto de los múltiplos de 9 menores que 160.
- ¿Podrías escribir el conjunto de todos los múltiplos de 9? Justifica.
- Verifica tus resultados usando ISetL.

7. Completa la siguiente tabla.

	Múltiplo de:			
Nº	2	3	5	10
658				
1955				

518				
1000				
4096				

8. Verdadero o falso

- 6 es divisor de 24
- 45 es divisor de 9
- Todos los divisores de 12 son divisores de 4
- Todos los números divisibles por 6 son pares

9. Indica cuáles de los siguientes números son primos y cuáles no: 0, 1, 5, 7, 23, 15, 45, 86, 110. Justifica la respuesta.

10. Ingresando en IsetL **primo(13)**; imprime en pantalla **ES PRIMO**.

- Verifica de esta manera los resultados obtenidos en el ejercicio 9.
- ¿Por qué crees que el 0 y el 1 no son números primos?
- ¿Qué significa que el programa nos responda **ES COMPUESTO**?

ACTIVIDAD 2 – MCD y MCM por inspección

- determina el conjunto de divisores de 24 y de 36. escribe el conjunto de los números que pertenecen a ambos conjuntos.
- Ingresando en iSetL **divisorescomunes(24,36)**; nos imprime en pantalla **{1, 2, 3, 4, 12, 6}** que debe ser el resultado del ejercicio anterior. Es decir, ISetL nos devuelve el conjunto de los números que dividen a 24 y a 36 al mismo tiempo.
Hallar el conjunto de divisores comunes de los siguientes pares de números:

números	Divisores comunes
(243 , 81)	
(600 , 375)	
(500 , 360)	
(84 , 112)	
(480 , 36)	
(16 , 1)	

- Verifica los resultados anteriores usando la función **divisorescomunes** en ISetL y contesta las siguientes preguntas.
 1. ¿Existe algún elemento MÁXIMO en el conjunto de divisores comunes?
 2. ¿Y algún elemento mínimo?

- Calcula el MCD de los pares anteriores ingresando en ISetL por ejemplo **MCD(24, 36)** ;
- Halla el conjunto de los múltiplos de 20 menores que 300, y el de los múltiplos de 35 menores que 300. Ahora forma el conjunto de los números que pertenecen a ambos conjuntos. Ingresando en ISetL **multiploscomunes(20,35,300)**; imprime en la pantalla el conjunto **{140, 280}**; de los divisores comunes a 20 y 35, menores que 300. Compara el resultado con lo hallado anteriormente: ¿ISetL te muestra el mismo conjunto que hallaste antes?
Halla el conjunto de múltiplos comunes a 20 y 35 en los siguientes casos:
 1. Menores que 500
 2. Menores que 700
 3. Menores que 1000
 4. Todos los múltiplos comunes

¿Existe algún elemento mínimo en los conjuntos anteriores?
En cada caso, ¿es el mismo número?

- Calcula el MCM de los siguientes pares de números

Números	(24 , 16)	(27 , 45)	(36 , 42)	(30 , 45)	(72 , 80)
MCM					

Comprueba tus resultados ingresando en ISetL por ejemplo **MCM(24, 16)** ;

ACTIVIDAD 3 – Algoritmo de Euclides

1. Completar el siguiente esquema de divisiones sucesivas usando **divisionentera** en ISetL;

	3					
94	26					
16						

Calcula el MCD de 94 y 26.

2. Calcula el MCD de los siguientes pares de números mediante el algoritmo de Euclides:

Números	(435 , 320)	(1000 , 100)	(8024 , 3200)	(721 , 280)	(250 , 1025)
MCM					

ACTIVIDAD 4 – Una propiedad importante

1. Completa la siguiente tabla usando las funciones que creas conveniente, y anota tus conclusiones:

a	b	MCD(a,b)	MCM(a,b)	a · b	MCD(a,b) · MCM(a,b)
855	945				
750	625				
460	736				
4815	2205				

2. Calcula usando el algoritmo de Euclides **MCD (690 , 615)**. Usando la propiedad del ejercicio anterior calcular **MCM (690 , 615)**.
3. Idem con 85 y 40.
4. Sabiendo que el MCD de dos números es 7 y el MCM es 28, ¿cuáles son los posibles valores de dichos números?.