

# TRABAJANDO DIVISIBILIDAD CON ISETL

*Prof.: Martín Dellapiazza.  
Prof.:  
Juan Pablo Lissio.*

Prof.:

*Fernando González.*  
**INTRODUCCIÓN:**

Este informe describe el trabajo realizado como evaluación final del curso de “matemática discreta usando Isetl”.

A continuación están detallados los objetivos planteados, las actividades y las conclusiones, que se desprenden de la realización de este trabajo.

**Importancia de la Matemática Discreta en la educación media:**

*“En lo que respecta al sistema educativo, es imprescindible que éste se adapte a los cambios generados por los avances teóricos y las aplicaciones en los diferentes campos científicos y tecnológicos, garantizando la transmisión y supervivencia del conocimiento. Así como en su época el cálculo diferencial se vió impulsado por el desarrollo de la física y los problemas planteados por esta ciencia en el siglo XVIII, determinando fuertemente la orientación de la educación matemática , los cambios ocurridos en el siglo que acaba de terminar reclaman del sistema educativo otras orientaciones. La MD debe su intenso desarrollo de los últimos años a la comunidad científica relacionada con la CC y en lo que se refiere a la educación, los estudios terciarios en dicha ciencia han incorporado cursos de MD con alta prioridad. Sin embargo, fuera del área de la CC, la MD es prácticamente inexistente y esta situación es la que creemos que debe corregirse, ya que consideramos que los estudios en MD son importantes para la formación de cualquier estudiante, aún de aquellos que no continúen estudios terciarios. Hoy día, la Economía, las Ciencias Sociales, las Ciencias gerenciales, la Ingeniería eléctrica, la Física simbólica, por solo nombrar algunas, tienen necesidad de resolver problemas que se modelan utilizando herramientas de MD. En el mercado laboral, es cada vez más frecuente que las personas deban enfrentarse a situaciones que involucran toma de decisiones, procesos de abstracción y razonamientos lógicos, necesitando habilidades que raramente son desarrolladas en su pasaje por la Enseñanza Media. Más aún, consideramos anacrónico que no exista en la cultura general brindada por la Enseñanza Secundaria una base de*

*conocimientos sobre algo tan ampliamente difundido en la sociedad actual como es la informática"...*

*..."El cambio que proponemos implica un proceso de adaptación, incorporación y modificación que muchas veces se realizará en etapas de aproximaciones sucesivas"...*<sup>1</sup>

### **IDEA INICIAL:**

Realizar un taller con un grupo reducido de alumnos, distribuido en tres clases.

Los integrantes del taller serían alumnos y exalumnos nuestros de ciclo básico, interesados en participar.

El acceso a la sala de informática fue pensado a través de coordinaciones con profesores de informática.

Conceptualmente se pretendió trabajar conceptos matemáticos usando Isetl sobre divisibilidad.

### **REFORMULACIÓN DEL PROYECTO:**

Al tratar de organizar las coordinaciones con los docentes responsables de las salas de informática de los liceos en los cuales nos desempeñamos como docentes, surgen variadas dificultades, principalmente de horarios así como de disponibilidad de tiempos (comienzo del asueto de invierno). Esto llevó a que tuviésemos la necesidad de buscar un lugar físico alternativo. Es así que, logramos el acceso a la sala de informática del CeRP del centro. Esto trajo consigo limitaciones de tiempo, teniendo que realizar el taller en una sola clase de algo más de dos horas.

---

<sup>1</sup> Extraído del documento: "MDformbasica", cortesía de la profesora Silvia da Rosa; el que está a disposición en la página del curso.

## **OBJETIVOS:**

Con este proyecto nos proponemos:

- Acercar los alumnos al trabajo matemático usando el procesador.
- Ver en el programa una herramienta que nos permite resolver problemas que hasta ahora no eran posibles con el uso de la calculadora.
- Discutir la conveniencia o no del uso de Isetl, en el caso de problemas que son de posible resolución con una calculadora.
- Mostrar la utilidad de conocer los conceptos matemáticos para uso más efectivo de la herramienta.
- Que los alumnos vean la posibilidad de diseñar y agregarle al programa funciones que nos permiten obtener resultados a los problemas que nos interesan.

## **METODOLOGÍA:**

- Se trabajará en parejas con la finalidad de fomentar la discusión acerca de las dudas e inquietudes.
- A través de tablas comparativas Matemática-Isetl, que se entregarán a los alumnos, se pretende llegar a los contenidos.
- Considerando el número reducido de alumnos se intentará fundamentalmente trabajar a través de las interrogantes de los alumnos y la discusión entre ellos.
- Los conceptos matemáticos, ya manejados por los alumnos, serán la base de las discusiones durante todo el taller.

## **ALGUNAS ACLARACIONES REALIZADAS A LOS ALUMNOS ANTES DE COMENZAR EL TRABAJO.**

- En Isetl se trabaja con el idioma inglés, por lo cual se hace necesaria la traducción de algunas pocas palabras tales como “return”, “include”, etc.
- De acuerdo a lo que trabajamos en el tema divisibilidad en primer año, usaremos únicamente números naturales.
- En este programa solo es posible trabajar con conjuntos con un número finito de elementos, por lo cual en el momento de trabajar con “conjunto de múltiplos” y “divisores de cero” , los mismos deberán acotarse.
- Se debe de ser muy preciso con el lenguaje dado que Isetl obedece a una frase en particular, y no a un sinónimo
- Este programa tiene una cierta cantidad de funciones predefinidas, pero también está la posibilidad de definir otras funciones acorde a nuestros intereses.
- Por una cuestión de tiempo, algunas de las funciones con las que se trabajará ya fueron incluidas por los docentes.

## **TRABAJO EN CLASE**

1. Se comienza el taller con la siguiente actividad para refrescar en los alumnos la idea de división entera; y así luego ver como se obtiene el cociente y el resto de la misma utilizando el programa.

## TRABAJO 0

### MATEMÁTICA

#### DIVISION ENTERA

$a$        $b$   
 $r$        $c$       con  $a, b, c \in \mathbb{N}$  y  $b \neq 0$   
 $a = b \times c + r$ ,  $r < b$

“c” es el cociente de la división entera  
“r” es el resto de la división entera

### ISETL

#### DIVISION ENTERA

- Cociente de la división entera  
>  $c := a \text{ div } b;$

*Ejemplo:*  
>  $8 \text{ div } 4;$   
2;

- Resto de la división entera  
>  $r := a \text{ mod } b;$

*Ejemplo:*  
>  $8 \text{ mod } 5;$   
1;

*Actividad 1:* Halla usando Isetl el cociente y el resto de la división entera de : a) 71181 entre 826  
b) 818923 entre 967.

- 2.** Con la finalidad de refrescar la idea de división exacta y ver que en ese caso el resto es 0, se propone el siguiente cuadro. Y a su vez escribir esta condición en el programa ( $x \bmod y = 0$ )

### TRABAJO 1

MATEMÁTICA	ISETL
<p><u>DIVISIÓN EXACTA</u></p> <p><math>a \neq 0</math>      <math>b</math>  <math>0</math>      <math>c</math>      con <math>a, b, c \in \mathbb{N}</math> y <math>b \neq 0</math>  <math>a = b \times c</math></p> <p>entonces:</p>	<p><u>DIVISION EXACTA</u></p> <p><u>Ejemplos:</u></p> <p><math>&gt; 4 \bmod 2;</math>  <math>0;</math>  <math>&gt; 7 \bmod 4;</math>  <math>3;</math>  <math>&gt; 4 \bmod 2 = 0;</math>  <math>\text{true};</math>  <math>&gt; 3 \bmod 2 = 0;</math>  <math>\text{false};</math></p> <p><u>Actividad 2:</u>  Investiga  a) ¿7284321 es múltiplo de 137?  b) ¿827 es divisor de 349821?</p>
<p><u>Ejemplo:</u></p> <p><math>20 \quad 5</math>  <math>0 \quad 4</math></p> <p>entonces</p>	

- Una vez traída a clase la idea de división exacta se recuerda a los alumnos los conceptos de divisor y múltiplo de un número natural.

1. Pasamos ahora a trabajar con conjuntos de divisores de un número natural. Primero en matemática, para luego pasar a hacerlo utilizando el programa.

## TRABAJO 2

MATEMÁTICA	ISETL
<p><u>CONJUNTO DE DIVISORES</u></p> <p>El conjunto de divisores de <math>x</math> está formado por todos los naturales que dividen a <math>x</math>.  <u>Notamos:</u> <math>D(x)</math></p> <p><u>Ejemplo:</u> <math>D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}</math></p>	<p><u>CONJUNTO DE DIVISORES</u></p> <pre>&gt; divisores:= func(x); &gt;&gt; if is_nat(x) then &gt;&gt; return {y : y in [1..x]   x mod y = 0}; &gt;&gt; end; &gt;&gt; end;</pre> <p><u>Ejemplos:</u></p> <pre>&gt; divisores(73); {1, 73}; &gt; divisores(74); {2, 1, 74, 37};</pre> <p><u>Actividad 3:</u> Halla el conjunto de divisores de los siguientes números: 123 y 5040.</p>

1. En este momento es que se comienzan a ver las ventajas del uso del programa, frente a la calculadora.

## TRABAJO 3

MATEMÁTICA	ISETL
<p><u>CARDINAL DE UN CONJUNTO</u></p> <p>Definimos cardinal de un conjunto a la “cantidad” de elementos del conjunto.  <u>Notamos:</u> <math>\#</math></p> <p><u>Ejemplo:</u>  <math>A = \{0, 7, 9, 14, 23\}; \quad \#(A) = 5</math></p>	<p><u>CARDINAL DE UN CONJUNTO</u></p> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre>&gt; A := {0, 7, 9, 14, 23}; &gt; #(A); 5;</pre>

- Se interroga a los alumnos sobre cuáles son las condiciones para que un número sea primo, y a partir de esto trabajarla en Isetl

## TRABAJO 4

MATEMÁTICA	ISETL
<p><u>NÚMERO PRIMO</u></p> <p>Diremos que un número es primo si y solo si el cardinal del conjunto de divisores es igual a 2.</p> <p><u>Ejemplo:</u>  <math>D(7) = \{1, 7\}</math>  <math>2</math>  entonces 7 es primo.</p>	<p><u>NÚMERO PRIMO</u></p> <pre> &gt; primo:= func(x); &gt;&gt; if is_nat(x) then &gt;&gt;   return #(divisores(x)) = 2; &gt;&gt; end; &gt;&gt; end;</pre> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre> &gt; primo(7); true; &gt; primo(9); false;</pre> <p><u>Actividad 4:</u> Investiga si los siguientes números son primos o no: 127, 4823, 643, 977, 979, 345.</p>

- En este momento, cuando se obtuvieron resultados como “true” o “false”, se comenzó a trabajar con elementos del conjunto Bool.

## TRABAJO 5

MATEMÁTICA	ISETL
------------	-------

<u>CONJUNTO DE DIVISORES COMUNES</u>	<u>CONJUNTO DE DIVISORES COMUNES</u>
<p>El conjunto de divisores comunes de <math>x</math> e <math>y</math> es el conjunto intersección de <math>D(x)</math> y <math>D(y)</math>.</p> <p><u>Notamos:</u> <math>D(x,y)</math></p> <p><u>Ejemplos:</u></p> <p><math>D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}</math>  <math>D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}</math>  <math>D(18, 24) = \{1, 2, 3, 6\}</math></p>	<pre data-bbox="801 265 1428 489">&gt; divcom:= func(x,y); &gt;&gt; if is_nat(x) and is_nat(y) then &gt;&gt;   return divisores(x) inter &gt;&gt;   divisores(y); &gt;&gt; end; &gt;&gt; end;</pre> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre data-bbox="801 561 1206 640">&gt; divcom(18, 24); {1, 2, 6, 3};</pre> <p><u>Actividad 5:</u> Encuentra los divisores comunes entre 92 y 184; 123 y 702.</p>

TRABAJO 6

MATEMÁTICA	ISETL
<p><u>MÁXIMO COMÚN DIVISOR</u></p> <p>Llamamos máximo común divisor entre <math>x</math> e <math>y</math> al mayor elemento del conjunto de divisores comunes entre <math>x</math> e <math>y</math>.</p> <p><u>Notamos:</u> <math>MCD(x,y)</math></p> <p><u>Ejemplo:</u> <math>MCD(18, 24) = 6</math></p>	<p><u>MÁXIMO COMÚN DIVISOR</u></p> <pre data-bbox="801 1066 1428 1246">&gt; MCD:= func(x,y); &gt;&gt; if is_nat(x) and is_nat(y) then &gt;&gt;   return maxC(divcom(x,y)); &gt;&gt; end; &gt;&gt; end;</pre> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre data-bbox="801 1313 1150 1392">&gt; MCD(18,24); [6];</pre> <p><u>Actividad 6:</u> Halla el máximo común divisor entre:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>9170 y 850</li> <li>817 y 815</li> <li>102 y 666</li> </ol>

TRABAJO 5

MATEMÁTICA	ISETL
<p><u>CONJUNTO DE DIVISORES COMUNES</u></p>	<p><u>CONJUNTO DE DIVISORES COMUNES</u></p>

<p>El conjunto de divisores comunes de <math>x</math> e <math>y</math> es el conjunto intersección de <math>D(x)</math> y <math>D(y)</math>.</p> <p><u>Notamos:</u> <math>D(x,y)</math></p> <p><u>Ejemplos:</u></p> <p><math>D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}</math>  <math>D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}</math>  <math>D(18, 24) = \{1, 2, 3, 6\}</math></p>	<pre> &gt; divcom:= func(x,y); &gt;&gt; if is_nat(x) and is_nat(y) then &gt;&gt;   return divisores(x) inter &gt;&gt;   divisores(y); &gt;&gt; end; &gt;&gt; end; </pre> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre> &gt; divcom(18, 24); {1, 2, 6, 3}; </pre> <p><u>Actividad 5:</u> Encuentra los divisores comunes entre 92 y 184; 123 y 702.</p>
---	---

## TRABAJO 6

MATEMÁTICA	ISETL
<p><u>MÁXIMO COMÚN DIVISOR</u></p> <p>Llamamos máximo común divisor entre <math>x</math> e <math>y</math> al mayor elemento del conjunto de divisores comunes entre <math>x</math> e <math>y</math>.</p> <p><u>Notamos:</u> <math>MCD(x,y)</math></p> <p><u>Ejemplo:</u> <math>MCD(18, 24) = 6</math></p>	<p><u>MÁXIMO COMÚN DIVISOR</u></p> <pre> &gt; MCD:= func(x,y); &gt;&gt; if is_nat(x) and is_nat(y) then &gt;&gt;   return maxC(divcom(x,y)); &gt;&gt; end; &gt;&gt; end; </pre> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre> &gt; MCD(18,24); [6]; </pre> <p><u>Actividad 6:</u> Halla el máximo común divisor entre:  c) 9170 y 850  d) 817 y 815  102 y 666</p>

## TRABAJO 7

MATEMÁTICA	ISETL

<p><u>CONJUNTO DE MÚLTIPLOS</u></p> <p>El conjunto de múltiplos de <math>x</math> esta formado por todos los naturales que son múltiplos de <math>x</math>.</p> <p><u>Notamos:</u> <math>M(x)</math></p> <p><u>Ejemplo:</u></p> <p><math>M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}</math></p>	<p><u>CONJUNTO DE MÚLTIPLOS</u></p> <pre> multiplos:= func(x); &gt;&gt; if is_nat(x) then return {y:y in [0..1000]   y mod x = 0}; &gt;&gt; end; &gt;&gt; end; </pre> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre> &gt; multiplos(154); {0, 154, 308, 462, 616, 770, 924} </pre> <p><u>Actividad 7:</u> Encuentra los múltiplos menores a mil de:</p> <p>a) 120 245</p>
--	---

## TRABAJO 8

MATEMATICA	ISETL
<p><u>CONJUNTO DE MÚLTIPLOS COMUNES</u></p> <p>El conjunto de múltiplos comunes de <math>x</math> e <math>y</math> es el conjunto intersección de <math>M(x)</math> y <math>M(y)</math>.</p> <p><u>Notamos:</u> <math>M(x,y)</math></p> <p><u>Ejemplos:</u></p> <p><math>M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}</math>  <math>M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}</math>  <math>M(2, 3) = \{0, 6, 12, 18, \dots\}</math></p>	<p><u>CONJUNTO DE MÚLTIPLOS COMUNES</u></p> <pre> multcom:= func(x,y); &gt;&gt; if is_nat(x) and is_nat(y) then &gt;&gt; return multiplos(x) inter multiplos(y); &gt;&gt; end; &gt;&gt; end; </pre> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre> &gt; multcom(12,150); {600, 900, 300, 0}; </pre> <p><u>Actividad 8:</u> Encuentra los múltiplos comunes menores a mil entre:</p> <p>a) 120 y 25 15 y 55</p>

## TARABAJO 9

MATEMÁTICA	ISETL
------------	-------

<p><b><u>MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO</u></b></p> <p>Llamamos mínimo común múltiplo de <math>x</math> e <math>y</math> al menor elemento distinto de cero del conjunto de múltiplos comunes de <math>x</math> e <math>y</math>.</p> <p><u>Notamos:</u> <math>mcm(x,y)</math></p> <p>-</p> <p><math>M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}</math>  <math>M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}</math>  <math>M(2, 3) = \{0, 6, 12, 18, \dots\}</math>  <math>mcm(2, 3) = 6</math></p>	<p><b><u>MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO</u></b></p> <pre> &gt;      mcm:= func(x,y); &gt;&gt;      if is_nat(x) and is_nat(y) then &gt;&gt;          return minC(mulcom(x,y) - {0}); &gt;&gt;      end; &gt;&gt;      end; </pre> <p><u>Ejemplo:</u></p> <pre> &gt;      mcm(2,3); [6]; </pre> <p><u>Actividad 9:</u> Halla el mínimo común múltiplo entre:</p> <p>e) 73 y 15  f) 20 y 85  g) 150 y 45</p>
---	---

**COMENTARIOS ANTES DE CULMINAR LA ACTIVIDAD.**

Al final del trabajo se le mostró a los alumnos la forma de definir alguna función sencilla, como lo es el doble de un número natural.

```
yiyo:= func(x);  
if is_nat(x) then  
return 2*x;  
end;  
end;
```

```
yiyo(2);  
4,
```

```
yiyo("a");  
OM,
```

En este ejemplo también se muestra que el nombre que se le asigna a una función es el que quiera el usuario, y que si queremos hallar la imagen de un elemento no natural, la función no lo reconoce.

## **COMENTARIOS SOBRE EL TALLER REALIZADO CON ALUMNOS DE CICLO BÁSICO.**

Se invitó a quince alumnos nuestros de primero, segundo y tercer año, de los liceos N°2 y N°3 de la ciudad de Florida a participar de un taller.

Este consistió en una clase de dos horas reloj, en la cual los alumnos trabajaron en parejas en la sala de informática cedida por el Centro Regional de Profesores del centro.

Este grupo de alumnos tiene las características buena disposición frente al trabajo , demostrar afinidad con la matemática tanto como con los docentes; y ser muy dispuestos a la hora de participar de actividades extracurriculares.

## **CONCLUSIONES:**

Los participantes de la actividad vieron el programa como una herramienta que proporciona “facilidades” a la hora de realizar algoritmos que resultan tediosos por su longitud, pero que requiere de todos modos el conocimiento de los conceptos involucrados.

Al hacer una especie de comparación del programa con una calculadora; los participantes plantearon ideas como el programa aprende de nosotros, por ende es necesario conocer el/los concepto/s en “matemática”, para “enseñarlo” al programa, y que este nos facilite la obtención de resultados, cuando son estos los que nos interesan como parte de la resolución de un problema por ejemplo.

### **Acerca del curso:**

Acerca del desarrollo del curso, pensamos que se generaron algunas dificultades de comunicación e intercambio de ideas acerca de las actividades. Por ejemplo, el ingreso a las News, para quien no tenía conexión a Internet en su hogar, exigía toda una configuración previa que nos dificultó un poco la fluidez en la comunicación. Para ello pensamos que en lo particular, nos hubiese sido más útil el correo electrónico.

Si bien pensamos que más clases presenciales hubiesen sido considerablemente más enriquecedora, reconocemos que esta modalidad nos brindó una oportunidad que sería imposible en las condiciones de los cursos anteriores (totalmente presenciales).

Finalmente, nos genera buena expectativa la instancia de presentación de trabajos, ya que se intercambiarán distintas ideas y experiencias, así como también los distintos proyectos y enfoques acerca de un mismo tema

### **MATERIAL INCLUIDO**

## (MD08)

```
is_nat:= func(x);
return (is_integer(x) and x >= 0);
end;
```

```
divisores:= func(x);
if is_nat(x) then
return {y : y in [1..x] | x mod y = 0};
end;
end;
```

```
primo:= func(x);
if is_nat(x) then
return #(divisores(x)) = 2;
end;
end;
```

```
divcom:= func(x,y);
if is_nat(x) and is_nat(y) then
return divisores(x) inter divisores(y);
end;
end;
```

```
maxC:= func(A);
if is_set(A) then
return [x | x in A : forall y in A | max(x,y) = x];
end;
end;
```

```
MCD:= func(x,y);
if is_nat(x) and is_nat(y) then
return maxC(divcom(x,y));
end;
```

```
end;

multiplos:= func(x);
if is_nat(x) then
return {y : y in [0..1000] | y mod x = 0};
end;
end;

mulcom:= func(x,y);
if is_nat(x) and is_nat(y) then
return multiplos(x) inter multiplos(y);
end;
end;

minC:= func(A);
if is_set(A) then
return [x | x in A : forall y in A | min(x,y) = x];
end;
end;

mcm:= func(x,y);
if is_nat(x) and is_nat(y) then
return minC(mulcom(x,y) - {0});
end;
end;
```

## BIBLIOGRAFÍA

- Elementos de Análisis Algebraico.

J. Rey Pastor.

- Matemática 1

Grupo Botadá.

- Calculus

Tom. M. Apostol.

- Material extraído del curso de Matemática discreta usando ISETL, dictado por la profesora Sylvia Da Rosa

### **AGRADECIMOS A:**

Nuestros alumnos: Romina Costa, Francisco Vidovich, Martin Barreiro, Luciana Lombado, Fernanda Iglesias, Jéssica Berrondo, Gabriel Cabrera,

Verónica González, Pamela Ghiena, Florencia Flores, Melissa Larrosa, Camila Videla, Florencia Rodriguez y Belén Martínez ; que asistieron voluntariamente en horario extra curricular.

Rosita Angelo, directora del Cerp, quien nos brindó la posibilidad de trabajar en exelentes condiciones, en la sala de Informática de dicho centro.

Ariel Mazza, docente de matemática de la citada institución, quien confió en nosotros y

fue el nexo que nos permitió llegar a la sala en la que trabajamos.

Además a: Roberto Santos, Julio González, Ema Gutierrez, Fanny Folgar, Rafael Fajardo, Richard Alzugaray y otros, que nos facilitaron este trabajo.

## **INDICE:**

- ❖ Introducción.....2
- ❖ Importancia de la matemática discreta en la educación media.....2

❖ Idea inicial.....	3
❖ Reformulación del proyecto.....	3
❖ Objetivos.....	4
❖ Metodología.....	4
❖ Algunas aclaraciones realizadas a los alumnos antes de comenzar el trabajo	
5	
❖ Trabajo en clase.....	6
❖ Comentarios antes de culminar la actividad.....	14
❖ Comentarios sobre el taller realizado con alumnos de ciclo básico.....	14
❖ Conclusiones.....	15
❖ Material incluido (md08).....	16
❖ Bibliografía.....	18
❖ Agradecimientos.....	19