Evaluación final

Curso de Actualización 2006
Matemática Discreta usando Isetl

Resumen:

Este es el informe del trabajo de evaluación del curso matemática discreta desarrollado por la Dra Sylvia da Rosa (docente del InCo) con la participación del Msc. Luis Sierra (docente del InCo), y dirigido a docentes de Enseñanza Secundaria.

Se desarrolla aquí una propuesta de trabajo sobre temas de matemática discreta pertenecientes a los cursos de 2° año de bachillerato en las asignaturas Matemáticas y Filosofía, mediante la integración al proceso de aprendizaje de programas en ISETL. Para ello se plantean dos actividades. La primer actividad se desarrollo en tres clases curriculares y fue diseñada en bloques de tres ejercicios: el primero para repasar los conceptos matemáticos involucrados, el segundo para resolverlo usando ISETL y el último para que los alumnos lo realicen solos. Los dos últimos ejercicios de la actividad son complementarios. Se pretende, en virtud de la similitud de la redacción, que el proceso de resolución de los ejercicios en matemática sea apoyado, acompañado y complementado por la redacción en el programa ISETL, y así ayude en la fijación de los conceptos.

Fundamentación:

Los ordenadores y programas de tratamiento de la información constituyen herramientas de uso poco habitual en las clases de Matemáticas en las carreras del ciclo secundario y carreras técnicas (Morphett, 1997) siendo que la utilización del ordenador viene a simplificar la realización de ejercicios y las aplicaciones usuales de la asignatura. Esto hace que sea especialmente adecuada su integración en el aula en el periodo de formación.

Hay opiniones diversas sobre el uso de los CAS (Computer Algebra Systems) que al parecer, los reducirían a la subutilización del recurso al priorizar su empleo como una calculadora potente[1] en lugar de recurrir al empleo de las Tics para tratar de fomentar la creatividad matemática de los alumnos (Ortega, 2002; Galán y otros, 2002a; Galán y otros, 2002b).

La idea **es** modificar las clásicas rutinas de empleo del recurso informático para maximizar las oportunidades que ofrecen estas tecnologías (García y otros, 2002), orientando su aplicación, por ejemplo:

- en el sentido de incidir positivamente en el aprendizaje (Dubinsky y Noss, 1996),
- aumentar considerablemente la posibilidad de experimentación (Hoya y otros, 2002) y
- permitir que el alumno construya su conocimiento matemático bajo la orientación del docente (Nava, 1998).

La propuesta de emplear un lenguaje de programación intenta ir en este sentido al conjugar el empleo de esta herramienta como recurso que potencie el aprendizaje, la comprensión de conceptos y su comprobación mediante el empleo de programas que confirman el acierto del desarrollo de los conceptos empleados y favorecen la transposición didáctica de los mismos, así como abren un terreno adecuado a las posibles interacciones transversales en el currículo de la enseñanza media.

La utilidad de la programación permite encontrar tareas que corresponden a las construcciones mentales de los conceptos matemáticos y la interacción de los distintos modelos representacionales (Dubinsky, 1994). Como ejemplo se puede citar el lenguaje de programación ISETL, utilizado por el profesor Dubinsky para enseñar Matemática a alumnos universitarios por tener una sintaxis que favorece la asimilación de los contenidos matemáticos a partir de su explicitación y programación que determinan la utilización, aplicación y transferencia de conceptos abstractos de matemática.(Dubinsky, 1995).

---

[1] Del trabajo “Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática. Una experiencia en las titulaciones de ingeniería de la Universidad de Málaga.”

Si bien **los objetivos de este trabajo están determinados por los lineamientos que se dieron en el curso para el trabajo de evaluación** establecimos una ampliación más general y que creemos que sigue el sentido que se nos propuso alcanzar con el curso:

· Observar el impacto que produce en los alumnos el desarrollo de una metodología didáctica mixta que incluye la evaluación de expresiones en ISETL sobre el aprendizaje de los temas que desarrollamos en este trabajo

· Constatar la incidencia del tratamiento didáctico mencionado sobre los diferentes factores del proceso didáctico, sobre las actitudes, los conocimientos, la participación, las destrezas y el rendimiento de los alumnos.

· Indagar sobre las posibles incidencias negativas que pueda ocasionar el uso de ISETL sobre el aprendizaje en la asignatura.

· Inducir la participación del alumnado en la elaboración y desarrollo de las actividades que se proponen, concretamente con la realización de parte de las sentencias que se utilizarán para resolver los ejercicios propuestos.

Para alcanzar los objetivos enunciados en el apartado anterior, se empleará una metodología que consiste en la elaboración y realización de prácticas con ordenador en la asignatura matemática y que tienen como aspecto diferente de las tradicionales propuestas en clase la utilización del programa ISETL por parte de los alumnos al evaluar expresiones o definirlas, o usar directivas (como include) o segmentos de código. (como por ejemplo, for …)

Con este tipo de prácticas, en las que el alumno no sólo resuelve problemas sino que construye los programas para comprobar su solución, se pretende que el empleo del ordenador se utilice como herramienta para fomentar la comprensión conceptual de los alumnos.

Habría indicios razonables de que la realización de comandos con ISETL facilita el aprendizaje y mejora la motivación del alumno[2], y tiene además una sintaxis muy parecida a la utilizada en matemática (de hecho es un programa que fue hecho con ese fin).

Desarrollo:

Se elaboraron dos actividades prácticas: una sobre conjuntos y relaciones, y otra sobre cálculo preposicional y cálculo de predicados. Dichas actividades fueron pensadas para ser aplicadas en la clase de matemática y de filosofía del segundo ciclo de Educación Secundaria. Se desarrollaron actividades prácticas sobre conjuntos y relaciones para las asignaturas Matemática del segundo ciclo de Educación Secundaria que tuvieron una estructura basada en tres clases de las cuales detallamos los objetivos específicos:

[2] LA MATEMATICA DISCRETA COMO FORMACION BASICA; Sylvia da Rosa
Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Objetivos específicos de las Actividades.

1. Introducir el lenguaje de programación matemática (ISETL) mediante la resolución de problemas sobre conjuntos y relaciones.
2. Repasar las formas de definir un conjunto y las operaciones básicas entre ellos.
3. Identificar la sintaxis del programa y mostrar que es similar a la notación matemática estándar.
4. Dar una nueva definición de múltiplo utilizando la función *mod* predefinida en ISETL. Implementar la nueva definición de múltiplo.
5. Repasar el concepto de divisor a partir del de múltiplo.
6. Repasar la definición de función haciendo hincapié en que es una terna formada por el conjunto Dominio, Codominio y la regla de transformación definida entre ellos.
7. Trabajar con funciones cuyo Codominio sea el conjunto de Bool.
8. Repasar la definición de relación entre conjuntos, las propiedades y los tipos de relaciones.
9. Mostrar la importancia del rol y el sentido de los cuantificadores.
10. Comenzar a trabajar con predicados y proposiciones. Comprobar equivalencia de expresiones y su valor de verdad. Comprobarlos mediante sentencias programadas en ISETL

· Primera actividad

- **Desarrollo de la primera clase:**

- En la primera clase se trabajaron los tres primeros ejercicios de la actividad. Los alumnos realizaron el ejercicio Nº1 en grupos formados por dos personas en sus cuadernos y luego se realizó una puesta en común en la pizarra.
- El ejercicio Nº2 se realizó en grupos formado por tres personas usando las computadoras y cada grupo pasó a la pizarra a responder las preguntas realizadas en el mismo. Se escribieron los comandos que utiliza el lenguaje para realizar operaciones entre conjuntos, y se discutió sobre la definición de los conjuntos involucrados comparándolas con las dadas en el ejercicio anterior. A partir de ese intercambio se analizó la función **mod** predefinida en el programa. Se escribo explícitamente su definición dando el Dominio, el Codominio y, se llegó a que a **mod** b = o si y sólo si a es múltiplo de b.
- Por último, cada uno escribió en sus cuadernos las definiciones de los conjuntos involucrados en el ejercicio Nº3, corrigiéndose esta parte sólo en forma oral por falta de tiempo. Algunos alumnos llegaron a terminar en totalidad este ejercicio haciendo la parte correspondiente en ISETL.

- **Desarrollo de la segunda clase:**

- En la segunda clase se trabajó con una dinámica muy parecida a la anterior. Se realizó el ejercicio Nº4 en grupos formados por dos personas, cada uno en sus cuadernos, para luego hacer una corrección en la pizarra. Se presentaron algunas dificultades en las definiciones de los conjuntos involucrados, especialmente en la definición de número primo. Se repasaron algunos conceptos de divisibilidad lo que permitió que todos terminaran el ejercicio en su totalidad.
- Luego, se reordenaron en grupos de a tres para realizar el ejercicio Nº5 en donde se trabajaría con los mismos conjuntos que se habían trabajado en el ejercicio anterior. Esto fue identificado por los alumnos casi instantáneamente después de ingresar el archivo en el programa. En la puesta en común en la pizarra se habló sobre la diferencia del significado de los símbolos **:=** y = para ISETL, mostrando que en matemática se usa siempre el símbolo =.
- Se escribieron las funciones **odd** y **even** con sus respectivos Dominios y Codominios, introduciendo el conjunto de Bool. A partir de algunos comentarios y preguntas sobre funciones con Codominio Bool se trabajó con las expresiones **in** y **<** viendo cómo escribir el dominio de estas funciones. Aquí se vio que un Dominio podía ser un producto cartesiano y además, se observó que ese producto cartesiano no tenía porque estar sólo formado por conjuntos numéricos.
- Por último, se habló de la función **d** definida en el archivo adjunto y de su aplicación en la definición del conjunto B. En los últimos minutos de la clase algunos grupos realizaron el ejercicio Nº6 en sus cuadernos y en ISETL.

- **Desarrollo de la tercera clase:**

- En la última clase de está actividad se realizaron los ejercicios Nº7, Nº8 y Nº9.
- En grupos de dos personas resolvieron el ejercicio Nº7 y luego se realizó la corrección en la pizarra. Para resolver el ejercicio Nº8 se acomodaron en grupos de tres y trabajaron en las computadoras. En la puesta en común de este ejercicio un alumno pasó a escribir un pequeño resumen que contenía cómo escribir algunos “símbolos” en ISETL.

- Luego se habló de la importancia de los cuantificadores y se resolvió la última parte de este ejercicio porque no todos habían podido hacerlo ya que tuvieron algunos problemas de sintaxis. Por último, trabajaron una parte del ejercicio Nº9 en la pizarra, quedando el resto del mismo para ellos. La segunda actividad se aplicará en forma interdisciplinaria entre las materias filosofía y matemática la primer quincena del mes de agosto.

Actividad I
Conjuntos y Relaciones.

Ejercicio 1)

a) Definir los siguientes conjuntos de naturales por comprensión y por extensión:
- El conjunto A formado por los números que son: múltiplos de 8 y menores que 41
- El conjunto B formado por los números que son: múltiplos de 4 y menores que 21

b) Hallar $A \cap B$; $A \cup B$, B-A, $P(A \cap B)$

c) Calcular #A, #B, # $P(A \cap B)$

Ejercicio 2)

a) Introducir las siguientes definiciones en ISETL.

```
A:={x: x in [0..41] | x mod 8 = 0};
B:={x: x in [0..21]| x mod 4 = 0};
B;
A;
A inter B;
A union B;
B-A;
pow(A inter B);
#A;
#B;
# pow(A inter B);
```

b) ¿Qué operaciones entre conjuntos se han realizado?

c) ¿Cómo se denominan estas operaciones en ISETL?

d) ¿Qué operación es x **mod** 8?

e) ¿Qué operación es a **mod** b, siendo a y b naturales cualquiera?

Ejercico 3)

a) Definir los siguientes conjuntos de naturales por comprensión:

b) El conjunto A formado por los múltiplos de 3 menores que 30.

c) El conjunto B formado por los múltiplos de 9 menores que 50.

d) Realizar las operaciones indicadas: A inter B; A union B; A-B; B-A; #A; #B.

Ejercicio 4)

a) Definir los siguientes conjuntos de naturales por comprensión y por extensión:
   1. El conjunto A formado por los números pares menores o iguales que diez.
   2. El conjunto B formado por los números primos menores o iguales que diez.

b) Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   1. $2 \in A$, $3 \in A$, $5 \in B$, $4 \in B$, $7 \in B$.
   2. $\{2,4\} \subset A$

3. $A \subset B$
4. $A=B$
5. $\{2\} \subset B$
6. #A=#B

Ejercico 5)

a) Obtener el archivo adjunto M5.txt que contiene las definiciones de los conjuntos A y B trabajados en el ejercicio 4).

1. Guardar este archivo en el mismo directorio en el que se corre el programa.
2. Evaluar estas definiciones en ISETL incluyendo el archivo M5.txt en la ventana de ejecución escribiendo: “!include M5.txt” y pulsando enter.

b) Introducir y evaluar las siguientes expresiones en ISETL.

1. x:=2;
2. x in A;
3. y:= 3;
4. y in A;
5. even(2);
6. 2<10;
7. odd(5);
8. 5<10;
9. 4 in B;
10. 7 in B;
11. {2,4} subset A;
12. A subset B;
13. A = B;
14. {2} subset B;
15. #A = #B;

c) Observar las respuestas obtenidas al evaluar 1, 3, 13 y 15. Deducir el significado de los símbolos = y := en ISETL.

d) ¿Cuáles fueron las respuestas obtenidas al evaluar 4, 5 y 6? ¿Qué otras expresiones arrojaron resultados de este tipo?

e) ¿Cuál es el dominio y el codominio de la función even predeterminada en ISETL? ¿y el de la función odd?

f) En el archivo incluido en la parte b) está definida una función denominada d que se uso para definir el conjunto B.

1. ¿Qué se obtiene al aplicar la función d y a qué se la aplica?
2. ¿Con qué fin se uso la función d para definir el conjunto B?

Ejercicio 6)

a) Definir por extensión los conjuntos:

1. $P=\{x: x \in N / x< 6\}$
2. $Q=\{x: x \in N / x<13\}$

b) Comprobar usando ISETL si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. $P \subset Q$
2. #P = 7
3. $Q \subset P$
4. $2 \in P$
5. $\{2\} \subset (P \cap Q)$

6. $5 \in Q$
7. $5 \in (P \cup Q)$
8. $P \cup Q = Q$
9. $\#Q > \#P$
10. $P \cap Q = P$

Ejercicio 7)

Sea $A=\{1,2,4,6,8\}$ y $R=\{(x,y)\ ;\ x \in A,\ y \in A \mid (x+y)$ es múltiplo de $3\}$ una relación definida en A.

a) Determinar R por extensión.
b) Investigar si R es idéntica (refleja), simétrica y/o transitiva.

Ejercicio 8)

a) Obtener el **archivo adjunto** M8.txt e incluirlo en ISETL.
b) ¿Qué resultados se obtuvieron al evaluar p, q y r? ¿Por qué?
c) ¿Cómo se escribe en ISETL: $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\in$, $\Rightarrow$?
d) Una sentencia, comos (x+x)mod 3=0 por ejemplo, no puede ser evaluada a menos que se le dé a x algún valor, o se introduzca algún cuantificador (para todo o "forall" en nuestro caso). Al ser cuantificada una sentencia se transforma en un predicado y su valor puede ser evaluado en verdadero o falso (se profundizara en este tema en la próxima actividad).
En nuestro ejercicio: forall x in A | ((x+x) mod 3 =0) es falso.
¿Cómo se escribiría en ISETL $\forall x,\ x \in \{1,2,3,4\} \mid x<=5$? ¿Qué resultado se obtiene al evaluar la expresión en ISETL?

Ejercicio 9)

Sea $P=\{1,2,3,4\}$
Determinar usando ISETL cuáles de las siguientes relaciones son idénticas, simétricas y/o transitiva.
$R_1=\{(x,y) / x+y = 5\}$
$R_2=\{(x,y) / x<=y\}$

Ejercicio 10)

Sea A:={x in [1..100] | x div 5 = 0};

a) Definir A por extensión e implementar en ISETL.
b) Definir una relación de orden en A (idéntica, antisimétrica y transitiva). Implementar en ISETL y verificar las propiedades.

Ejercicio 11)

Sea M el conjunto formado por todos los meses del año y $R=\{(x,y) / x, y \in M$, "x tiene la misma cantidad de días que y"$\}$.

a) Probar que R es una relación de equivalencia. Implementar en ISETL
b) Encontrar las clases de equivalencias y verificar (usando ISETL) que son disjuntas dos a dos, y que la unión da el conjunto M.

· *Segunda actividad.*

Actividad 2
Lógica proposicional.

El diseño de la actividad 2) es distinto al de la actividad anterior ya que fue pensada para ser trabajada en dos asignaturas distintas, dictadas por docentes distintas: los primeros ejercicios (cálculo proposicional) se trabajan en la Asignatura Filosofía con excepción de la parte de ISETL que ya pueden hacerla los alumnos solos porque han utilizado el lenguaje; la segunda parte de la actividad está pensada para ser trabajada en la Asignatura Matemática.

Ejercicio 1)

a) Clasificar las siguientes proposiciones en simples y compuestas.
Simbolizarlas usando variables proposicionales y, conectivos lógicos en los casos necesarios.

1) Mi padre fue a trabajar.
2) Mi hermano miró el partido.
3) Mi padre fue a trabajar o mi hermano miró el partido.
4) Mi padre fue a trabajar y mi hermano miró el partido.

b) Averiguar los valores de verdad de las proposiciones 3) y 4) a partir de los que pueden tomar 1) y 2).
c) Ingresar en ISETL el siguiente segmento de código, pintarlo y apretar Run en la barra superior:

```
for p, q in [true, false] do write p, q, p or q;
writeln;
end;
```

Se desplegaran los valores de p, de q y, de p or q (disyunción).
d) Confirmar los resultados obtenidos en b) con los obtenidos en el segmento de código ingresado en ISETL en la parte c)
e) Escribir un segmento de código para la conjunción (and).

Ejercicio 2)

a) Siendo p: “mi padre fue a trabajar” y q: “mi hermano miró el partido” simbolizar las siguientes proposiciones

1) Si mi padre fue a trabajar entonces mi hermano miró el partido.
2) Si mi padre fue a trabajar entonces mi hermano no miró el partido.

b) Averiguar los valores de verdad de las proposiciones anteriores.
c) Ingresar y ejecutar en ISETL el siguiente segmento de código:

```
for p, q in [true, false] do write p, q, p impl q;
writeln;
end;
```

d) Verificar los resultados obtenidos en b) con los obtenidos en el ordenador en la parte anterior.
e) Me aseguran que las proposiciones 1) y 2) de la parte a) <u>son verdaderas</u>.
¿Se puede saber si mi padre fue o no a trabajar?

Ejercicio 3)

a) Determinar, en cada caso, si la información que se tiene sobre la variable propocional alcanza para saber la veracidad de la proposición:

1) r es V $(p \to q) \to r$

2) q es V $(p \lor q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$
3) q es V $q \land (p \rightarrow q)$
4) q es V $q \lor (p \rightarrow q)$

b) Obtener el archivo adjunto M3.txt que contiene el segmento de código correspondiente a cada una de las proposiciones anteriores, incluirlo en ISETL y, verificar los resultados de la parte anterior.

Ejercicio 4)

a) Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\neg p \lor q$
2. $p \rightarrow q$
3. $\neg(p \land q)$
4. $\neg p \lor \neg q$
5. $p \lor q$
6. $\neg p \land \neg q$
7. $\neg(p \land \neg q)$
8. $\neg q \rightarrow \neg p$

b) ¿ Qué se puede afirmar de 1), 2), 7) y 8) ?

c) Verificar usando ISETL la equivalencia de 2) y 8).

d) Si al condicional $p \rightarrow q$ le llamamos directo, entonces $\neg q \rightarrow \neg p$ es el contra reciproco. ¿Cuál sería el reciproco y el contrario?

Ejercicio 5)

a) Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   1) El resto de dividir 125 entre 2 es 1.
   2) El cociente de dividir 125 entre 2 es 63.
   3) x+3=5
   4) x es un número par.

b) Utilizando las funciones **mod** y **div** predefinidas en ISETL escribir nuevamente 1) y 2). Evaluarlas en ISETL.

c) ¿Qué resultados se obtuvieron en 3) y en 4)?
   ¿Qué se puede hacer para evaluar 3) y 4)?

Ejercicio 6)

Como se vio en el Ejercicio 8) de la actividad anterior, una sentencia una sentencia, como **odd(x),** no puede ser evaluada a menos que se le dé algún valor a x, o se introduzca algún cuantificador (para todo o existe). Al cuantificar una sentencia se transforma en un predicado y su valor puede ser evaluado en verdadero o falso.

a) Determinar el valor de verdad de: 1) $(\forall x), x \in N \mid odd(x)$.
   2) $(\exists x), x \in N \mid x+3=5$.

b) Si queremos evaluar los predicados 1) y 2) en ISETL surge el inconveniente de que en el programa sólo se pueden representar conjuntos finitos (es una debilidad del lenguaje).
   Tomar el conjunto [1..1000] y evaluar 1) y 2) en ISETL.

Ejercicio 7)

a) Escribir los siguientes predicados en lenguaje matemático e investigar su valor de verdad:
   1) Todos los números naturales son positivos.
   2) Existen números naturales que no son positivos.

3) No existen números naturales que no sean positivos.

b) ¿Qué se puede decir de los predicados 1) y 3)?

c) ¿Qué vínculo hay entre los predicados 2) y 3)?

Ejercicio 8)

Sea A=[1..1000] y las proposiciones:

p(x): x es divisible entre 4

q(x): x es un número par

a) Expresar en palabras cada uno de los siguientes predicados e investigar su valor de verdad en ISETL.

1) $(\forall x): x \in A \mid (\neg p(x) \vee q(x))$

2) $(\forall x): x \in A \mid (p(x) \wedge q(x))$

3) $(\exists x): x \in A \mid (p(x) \wedge \neg q(x))$

b) Escribir un predicado equivalente a 1) usando implica.

c) Sabiendo el valor de verdad de 1) se puede deducir el de 3). ¿Por qué?

d) Escribir un predicado que sea la negación de 2).

Ejercicio 9)

Sea A=[1..1000] y las proposiciones:

p(x): $x+1=5$

q(x): $x^2=9$

r(x) : $x^2=16$

a) Averiguar el valor de verdad de los siguientes predicados:

1) $(\exists x): x \in A \mid (p(x) \wedge q(x))$

2) $[(\exists x): x \in A \mid p(x)] \wedge [(\exists x): x \in A \mid q(x)]$

3) $(\exists x): x \in A \mid (p(x) \wedge r(x))$

4) $[(\exists x): x \in A \mid p(x)] \wedge [(\exists x): x \in A \mid r(x)]$

b) ¿Qué resultados se obtuvieron en 1) y 2)? ¿Cuál es la diferencia de dichos predicados?

c) ¿Sabiendo el valor de verdad de 4) puedo asegurar el de 3)? ¿Y al revés?

Ejercicio 10)

a) Dado un conjunto A y dos proposiciones p y q. Encontrar, para cada caso, un predicado equivalente:

1) $(\exists x): x \in A \mid (p(x) \vee q(x))$

2) $(\forall x): x \in A \mid (p(x) \wedge q(x))$

b) Si conozco el valor de verdad de: $[(\forall x): x \in A \mid p(x)] \vee [(\forall x): x \in A \mid q(x)]$, puedo asegurar que conozco el valor de verdad de: $(\forall x): x \in A \mid (p(x) \vee q(x))$.

c) Verificar los resultados obtenidos en ISETL usando el conjunto A = [1..1000] y las proposiciones p(x): $x+1=5$ y q(x): $x^2=9$

Anexos:

1.- Archivo_M3:

```
for r in [true, true], p, q in [true, false]do
writeln (p impl q) impl r;

for q in [true, true], p in [true, false]do
writeln (p or q)=(not p and not q);
end;

for q in [true, true], p in [true, false]do
writeln q and (p impl q);
end;

for q in [true, true], p in [true, false]do
writeln q or (p impl q);
end;
```

2.- Archivo_M5:

```
A:={x: x in [0..10] | x mod 2 = 0};
d:=func(x);
if is_integer(x) then
return {y: y in [1..abs(x)]| x mod y = 0};
end;
end;
B:={y: y in [0..10] | #d(y) =2};
```

3.- Archivo_M8:

```
A:={1,2,4,6,8};
p:=forall x in A | ((x+x) mod 3 = 0);
q:=forall x,y in A | ((x+y) mod 3 = 0)impl((y+x) mod 3 =0);
r:=forall x, y, z in A | ((x+y) mod 3 = 0 and  (y+z) mod 3= 0) impl ((x+z) mod 3 = 0);
```

Conclusiones:

1. Los alumnos son capaces de manejar el programa y las sentencias programadas, así como de comprender la lógica de programación, reforzando los elementos conceptuales manejados en Matemática.
2. La utilización del programa confronta los elementos conceptuales con las sentencias y pone de manifiesto errores en la realización de los ejercicios.
3. Se ve incrementado el proceso de retroalimentación que favorece el aprendizaje.
4. Los alumnos se manifiestan con naturalidad frente a la propuesta.
5. Creemos que se refuerza el proceso de transposición didáctica con el empleo de la programación en ISETL, teniendo en cuenta aspectos propios del programa y su similitud con el desarrollo de conceptos de Matemática.