De las Definiciones por Recurrencia a las Demostraciones por Inducción Completa.

Punteo de temas

Introducción.

El método de inducción completa es dado a los alumnos de 5to año de secundaria de modo tal que en la mayoría de los casos no queda claro, como método en sí mismo. Y es raro que terminen por entender cuando se puede aplicar este método de demostración y cuando no. Esto se debe a que se enseña en forma exclusiva a partir de reiterados ejercicios de demostración de fórmulas sustitutivas de una suma de términos.

El estudiante asocia sumatoria con inducción completa y muchas veces supone que sumatoria es una unidad del programa de estudios y que inducción completa no lo es. Por esta, y otras razones, al intentar aplicar el método de inducción completa a casos distintos al mencionado, el estudiante por lo general fracasa, (y si lo aplica el profesor se muestran incrédulos) dejando en evidencia que no se incorporó el método en general, sino sólo a un caso particular.

Planteo del tema

Si el alumno comprende que la construcción de un conjunto por inducción[1], permite definir funciones recursivamente, le será natural aceptar al método de Inducción Estructural (para N Inducción Completa) para demostrar propiedades sobre los conjuntos así definidos, ya que este principio también se basa en la construcción inductiva del conjunto. La construcción de los números naturales inductivamente (posiblemente a partir de los axiomas de Peano) debe hacerse algunas clases antes de comenzar con las actividades propuestas en este artículo, no creo recomendable destacar muchas consecuencias de los axiomas en esta etapa. Pero es importante hacer referencia a la definición durante la implementación de las mismas, ya sea para lograr un mayor

[1] A partir de un caso (o casos) base y de una (o unas) funciones constructoras aplicada a un elemento menor.

conocimiento de las actividades como también para que se conozca la propia definición de número natural.

Propongo entonces, para los alumnos de orientación científica, hacer un cambio en la forma de dar este tema incorporando la programación por recursión de pequeños programas. Se llevará a cabo a través de Isetl.

Cabe destacar, que por medio de las actividades planteadas en este artículo no se pretende que el alumno exprese lo antedicho sobre los conjuntos inductivos, pero si que tenga interiorizados los conceptos, es decir, que a partir de una reflexión (personal o guiada) pueda hacerlos conscientes.

Según la teoría de que los estudiantes adquieren un concepto después de verlo en varias representaciones (y traducirlos de una a otra), y considerando a la programación, no sólo como una ayuda para la definición de las funciones, sino también como una representación más de los entes matemáticos, pienso que será un gran apoyo para la comprensión del tema.

Observaciones de la presentación de las actividades.

Se presentan a continuación una serie de actividades separadas por clase, la secuenciación de actividades sería en forma lineal, pero se debe destacar que la separación por clases es simplemente una guía para el lector, muchas veces se supone que hay clases en el medio explicando determinados conceptos. Además creo que la implementación práctica puede variar mucho según el grupo.

Clase 1

Actividad 1

Objetivo:

- Introducir el concepto de recurrencia como una forma de definir una función en donde ella misma se aplica a argumentos menores hasta un determinado caso para el cual está definida la función.

Un individuo viajó seis días, recorriendo cada día 5 km más que el anterior, el último día recorrió 26 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrió en total?

Planta la suma que hiciste:

Si el mismo individuo caminaba sólo 5 días ¿Cuántos kilómetros recorría? ¿Y si eran 7?

Tenemos pues una función que si le damos la cantidad de días que camina, dice cuantos kilómetros camina, podemos llamarla función camina.

Así camina (5) =….Km.
camina (6) =…..Km.
camina (7) =…..Km.

Para saber cuanto camina en 8 días ¿qué sumás?:

Comentarios: Es importante mencionar que se hará hincapié en la importancia de saber un dato específico a partir del cual se pueden calcular todos los demás, y que eso es una parte esencial de la definición por recurrencia. La actividad será complementada con un trabajo del docente apuntando a formalizar una definición general de la función camina. De la definición formal de la función camina se verá la importancia de que ese dato sea: camina(1).

Poner camina con otra letra por ejemplo *camina* o **camina**

No sé si es original, pero el hecho de llamarle camina a una función y no f, me parece importante para el compromiso del estudiante con el ejercicio.

Clase 2

Actividad 2

Objetivos:

- Reconocer los elementos del lenguaje Isetl.
- Observar el parecido entre la notación en matemática y la de Isetl.

Consigna:

En 1783 a un maestro de primaria se le ocurrió proponer el siguiente ejercicio a sus pequeños alumnos:

Sumar todos los números del 1 al 100.

Hoy en día un estudiante de 5to científico puede programar lo siguiente para solucionar el problema:

```
sumarhasta:=func(n);
        if n=1 then
                return 1;
        else
                return n + sumarhasta(n-1);
        end;
end;
```

y luego escribir

```
sumarhasta(100);
```

para saber el resultado

<u>Responde</u>: ¿Qué rol crees que cumple la palabra "return" en el programa?

¿Cuál es el rol de "if"? ¿Y el de "else"?

Comentarios: Esta actividad promueve el acercamiento al programa, sirve para que se entienda la notación de Isetl. Espero que a los alumnos no les resulte difícil realizarlo.

Actividad 3
Objetivos:

- Incorporar elementos de programación a la resolución de problemas
- Generalizar resultados obtenidos
- Repasar el concepto de dominio e incorporarlo en la definición de la función.

Consigna:

1) Modifica la función anterior, escribe una función sumardesde5hasta que sume todos los números empezando en el 5 y terminando en n.

Así, por ejemplo,
>sumardesde5hasta(8);
26

2) Escribe la función camina de la actividad de la clase pasada.

3) ¿Cuál es el dominio de la función camina? ¿Qué pasará si escribimos: camina(12.5)? No lo hagas

Comentarios: La primer y segunda parte intentan que el estudiante se familiarice con el programa y que experimente con el, sería deseable que se introduzca la notación sumatoria de matemática para el planteo de algunos problemas que puedan surgir espontáneamente en la clase, tipo: sumen del 30 al 1013. La tercera parte intenta hacer notar que la computadora hace exactamente lo que se le ordena y que no tiene sentido común. Se intentará en la puesta en común que surja que se debe escribir siempre algo como:

```
funcion:=func(n);
        if is_nat(n) then
                cuerpo de la función
        else
        writeln n," no es un natural"
        end;
end;
```

La función is_nat que devuelve true si es n es un número natural y devuelve false en otro caso, estaría incluida a la hora que ellos programen.

```
is_nat:=func(n);
        return is_integer(n) and n>=0;
end;
```

Por otro lado, debo decir que, en este punto puede trabajarse en la clase el método de demostración por inducción completa sobre la función sumarhasta (ya que la referencia histórica es al año en que Gauss tenía 6 años) aprovechar el conocimiento sobre la recursión que incorporaron los alumnos para la fundamentación de la demostración.

Clase 3

Actividad 4
Objetivos:

- Seguir una secuencia lógica
- Establecer relaciones entre números.
- Implementar en Isetl una función más compleja de programar.
- Trabajar sobre la importancia de una relación “bien fundada” para la aplicación del método.
- Notar la importancia de trabajar primero en matemática y luego en Isetl.
- Evaluar el conocimiento de los alumnos de los temas anteriores

Consigna:
Sucesión de Fibonachi.

En 1202 Leonardo de Pisa (Fibonachi) publicó el libro “Liber abaci” (Libro del ábaco). En él aparece uno de los problemas que más perduró en el tiempo y que aún hoy matemáticos siguen trabajando sobre el.

El problema de los conejos:

¿Cuántas parejas de conejos tendremos a fin de año si, comenzando con una, produce cada mes una pareja que procrea a los dos meses de vida?

Completa la tabla según los requerimientos del problema:

	Generación						
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	Total
1º mes	1						1
2º mes	1						1
3º mes	1	1					2
4º mes	1	2					3
5º mes	1	3	1				5
6º mes	1						
7º mes	1						
8º mes	1						
9º mes	1						
10º mes	1						
11º mes	1						
12º mes	1						

Observa la columna del total de parejas de conejos
A estos números se le llaman números de fibonachi
¿Qué relación hay entre ellos?

A partir de la relación que encuentres escribe en notación matemática una definición de la función fibonachi que dado un mes cualquiera devuelva la cantidad de parejas de conejos que hay ese mes.

Escribe en Isetl una implementación de la definición de la función fibonachi a la que llegaste arriba que dado un mes cualquiera devuelva la cantidad de parejas de conejos que hay ese mes.

Comentarios: Según el grado de entendimiento del tema que demuestren los alumnos hasta este punto se realizará una nueva serie de actividades avocadas a reafirmar lo aprendido o se pasará a trabajar otros temas de matemática utilizando como herramienta la recurrencia.

A continuación se dará entonces una serie de actividades tendientes a reafirmar el tema, estos pueden implementarse como tarea domiciliaria en algún caso o como tarea en clase si la evaluación dio muestras de que no está incorporado el tema efectivamente o como tareas introductorias de la demostración por Inducción Completa.

Clase 4

Actividad 5

Objetivos:

- Reafirmar el tema recursividad a partir de varios ejercicios.

Consigna:

Un reloj toca las campanadas en el sistema de 24h es decir que toca 1 campanada a la una de la mañana, 13 a la una de la tarde, cada hora toca las capanadas correspondientes. Cuantas campanadas da al cabo del día

Actividad 6

Consigna:

Progresiones geométricas

Un peón de campo se ofreció a trabajar para un agricultor por un $0.1 por dia, siempre que este le pagara $0.2 por el segundo día $0.4 por el tercero, $0.8 por el cuarto, $1.6 por el quito, y así sucesivamente duplicando la paga día tras día. El agricultor después de calcular rápidamente que los 10 primeros días le costarían alrededor de $10. Acepta contratarlo por un mes. ¿Hizo el agricultor un contrato prudente? ¿Si lo cumple cuanto le costó durante todo el período?

Realiza la función correspondiente en matemática e impleméntala en Isetl para dar la respuesta.

Actividad 7

Consigna:

Un experimento revela que el número de bacterias en una muestra de leche en determinadas condiciones se duplica cada tres horas. Si las condiciones se mantienen, ¿cuál será el porcentaje aumento en 1 día?

Realiza la función correspondiente en matemática e impleméntala en Isetl para dar la respuesta.

Observa que para la pregunta que se te hace no es necesario saber la cantidad de bacterias que había al comienzo del día. Razona que se te pide al escribir el valor para el caso base.

Actividad 8

Consigna:

Escribe una función en matemática e impleméntala en Isetl que sume los números de la forma:

- $2n+3$ desde $n=1$ hasta n = el número que se le da.
- n^2 desde $n=1$ hasta n = el número que se le da.
- 2^n+1 desde $n=1$ hasta n = el número que se le da.

Comentarios para las actividades 5 a 8: Estos ejercicios no es necesario un tratamiento lineal del tema y tampoco que se trabajen todos. Incluso la letra puede variarse para crear mayor o menor dificultad en uno u otro aspecto de la resolución.

Clase 5

Actividad 9

Objetivo:

- Interpretar una función por recurrencia que realice la traducción de un número en base 3 a un número en base 10.

Consigna:

Supongamos que nos dan un número en base 3 como un conjunto de n cifras ordenadas; en Isetl esto se llama tupla y se representa cada cifra separada por comas y la tupla entre corchetes

Por lo tanto, esta es la representación de un número de cuatro cifras en base 3 que tiene Istel.

```
> A:= [1,2,0,0]
```

La siguiente función toma una tupla de un número en base 3 y devuelve el número correspondiente en base 10 (es decir la forma en que habitualmente lo escribimos)

```
base3:=func(t);
    if is_tuple(t) and is_base3(t) then
        if #t=1 then
            return t(1);
        else
            return t(1)*3**(#t-1) + base3(l(2..#t))
        end;
    end;
end;
```

1) ¿Es recursiva esta función?

2) Escribe en Isetl:
>A:=[1,2,0,0,1];
>A;
>A(1);
>A(3);
>3**2;
>2**4;
¿Qué devuelve A(2)?
¿Qué operación se realiza al efectuar 3**3?

4) Interpreta el significado de:
t(1)*3**(#t-1) + base3(l(2..#t))

Comentarios: Se supone a la hora de implementar esta actividad se trabajó en clase anteriormente otra actividad para la comprensión del concepto de base de numeración y el algoritmo de interpretación de un número en base 3. La función is_base3 verifica si una tupla tiene todos los elementos naturales y entre 0 y 2, sería incluida para que el grupo la pueda usar.

Este tema se encuentra en el plan T.E.M.S para 5to Científico.

Actividad 10

Objetivo:

- Escribir una función por recurrencia que realice la traducción de un número en base 2 a un número en base 10.

Consigna:

Leibnitz, gran matemático, en 1703 escribió: “En vez de la progresión de diez en diez he empleado la progresión más simple de todas la que va de dos en dos. Así pues sólo empleo los caracteres 0 y 1, y luego al llegar a dos, vuelvo a empezar: Por eso “dos” se escribe aquí como “1 0” y dos veces dos, o sea 4 como “1 0 0” etc.”

La numeración binaria a la que hace referencia Leibnitz tiene gran actualidad ya que toda la aritmética de los computadores se sostiene sobre la representación en base 2.

Escribe una función base2 que tome una tupla de ceros y unos y lo traduzca al número correspondiente en base 2.

Comentarios: Espero que la actividad tenga cierta motivación por sí misma y tal vez si se trabajó en clase motive a los alumnos a preguntarse como realizar la función inversa que traduzca cualquier número a una tupla de ceros y unos.

Implementación:

La implementación no se pudo realizar en este año 2006 porque al momento de crear este trabajo los temas aquí tratados no estaban pendientes en ninguno de los grupos a mi cargo, pero tengo serias intenciones de implementarlo el siguiente año.

Bibliografía:

S. da Rosa; Material del curso Matemática discreta usando Isetl, 2006

J. Rey Pastor, Puig Adam; “Metodología matemática” Ibero-Americana, 1948

R. Moreno Castillo “Fibonacci, el primer matemático medieval” Nivola, 2004

W. Dunham “Euler, el maestro de todos los matemáticos” Nivola, 1999

D. Guedj “El imperio de las cifras y los números” Grupo Zeta, 1998

J. E. Thompson “Aritmética para todos” Hispanoamericana de México, 1949