INTRODUCCIÓN

Temas que desarrollaremos:

- ✓ Sucesiones.
- ✓ Funciones por recurrencia.
- ✓ Teoría combinatoria.

Comenzaremos con el tema sucesiones del programa de 5º Científico.
Motivaremos con un problema de Matemática Financiera, tema que dan en 3º de liceo, y que nos consta, les resulta muy interesante ya que es aplicable a la vida real.
Luego continuamos con funciones definidas por recurrencia, dando ejemplos y aprovechando a repasar definiciones como por ejemplo, potencia de exponente natural, sucesiones aritméticas y geométricas, conocidas por ellos de cursos anteriores.
También definimos la función factorial, ya que es otro ejemplo de sucesión definible por recurrencia y además lo utilizaremos en el siguiente tema a abordar que es Teoría Combinatoria.

La introducción del lenguaje ISETL lo haremos dando unas pocas directivas y fundamentalmente proponiéndoles que del análisis de un programa propuesto por nosotros deduzcan los demás. Ejemplo: “¿que crees que significa:=?”
No pretendemos enseñarles a programar sino que luego de realizadas las definiciones matemáticamente las implementen en ISETL para verificar, evaluar, etc.
De manera que con mínimos conocimientos de la sintáxis del lenguaje puedan trabajar.
Es interesante que vean que los algoritmos recursivos que en Matemática son trabajosos para calcular, en ISETL por el contrario son muy fáciles de implementar y en consecuencia evaluar.

No creemos que el idioma inglés sea un impedimento para ellos, ya que el lenguaje ISETL tiene la virtud de ser muy sencillo y el alumnado en 5º año maneja la mayoría de los términos necesarios.
Sí creemos necesario hacerles saber que el lenguaje ISETL trabaja con conjuntos finitos de números y que hay cierta cantidad de objetos que están definidos y otros por supuesto, que pueden definir.

En algunos casos les pedimos que incluyan un archivo con algunas funciones definidas para no perder de vista el “foco” del tema.

Los ejercicios se van planteando paulatinamente, durante el desarrollo de los temas.

Conclusión: si bien el sistema educativo no ha incorporado aún la computadora a sus cursos curriculares de Matemática, se está observando un cambio en los objetivos de los programas nuevos. Se trata de que haya más tiempo para pensar, razonar, analizar y es ahí donde la computadora cumple con una función fundamental que es facilitar los cálculos y a la vez reflexionar sobre el lenguaje al momento de programar, tan formal éste como el lenguaje matemático.

SUCESIONES

PROBLEMA 1

Estudiaremos la variación de un capital de dinero que genera intereses. Los intereses producidos por un capital pueden calcularse de dos maneras diferentes:

- Sobre el capital inicialmente invertido (interés simple);
- Sobre el monto al final del período anterior, o sea, sobre el capital formado por la suma inicial depositada, más los intereses que produjo dicha suma (interés compuesto).

A continuación haremos la deducción de la fórmula fundamental de interés compuesto.

Supondremos:

1. Capital inicial : $1,
2. Interés del primer período por $1: i

Periodo	**Capital al inicio del periodo**	**Interés del periodo**	*Capital al final del periodo o monto (c_n)*
1	1	i	$1+i$
2	$1+i$	$(1+i)\cdot i$	$(1+i)+(1+i)\cdot i=(1+i)\cdot(1+i)=(1+i)^2$
3	$(1+i)^2$	$(1+i)^2\cdot i$	$(1+i)^2+(1+i)^2\cdot i=(1+i)^2\cdot(1+i)=(1+i)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(1+i)^{n-1}$	$(1+i)^{n-1}\cdot i$	$(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-1}\cdot i=(1+i)^{n-1}\cdot(1+i)=(1+i)^n$

Por lo tanto, el monto a interés compuesto de $1 en “$n$ ” períodos a la tasa “i ” es :

$$\boxed{c_n=(1+i)^n}$$

Y si el capital, en lugar de ser de $1 resulta ser de $$M$, nos queda:

$$\boxed{c_n = C \times (1+i)^n}$$

Hemos generado una sucesión de valores: $(c_n) = (c_1, c_2, c_3, \ldots .. c_n)$

DEFINICIÓN

Llamamos sucesión de números reales a toda función cuyo dominio está incluído en IN y el conjunto de llegada es IR.

A pesar de que una sucesión es una función, no se usa la notación estándar. En vez de escribir *c* (*n*), escribimos c_n . La introducción de una letra (en éste caso “ *c* ”) , seguida de un subíndice para nombrar a los distintos términos de la sucesión es muy útil. Si nos queremos referir al saldo al finalizar el 6[to] período, por ejemplo, ponemos simplemente c_6 . En definitiva lo que hicimos fue generar una sucesión de números: a cada natural ”*n* ” le hicimos corresponder el número real c_n .

EJERCICIO

Calcula el monto que se obtiene al depositar $10.000 al 10% de interés semestral, sabiendo que permanece depositada 2 años.

OTROS EJEMPLOS DE SUCESIONES

$$(b_n): b_n = 5n^3 + 8n$$
$$(e_n): e_n = \frac{n+15}{2n}$$
$$(f_n): f_n = 2^n - 4$$

EJERCICIO

Halla en cada caso los términos 3; 5 y 10.

ACTIVIDAD

Comencemos a trabajar en ISETL.

Ten en cuenta que:

- ISETL trabaja con conjuntos finitos.
- Como todo lenguaje formal es fundamental respetar las reglas para la elaboración de los programas.

▪

Matemática	ISETL
+	+
-	-
x	*
:	/
x^y	*x****y*

Incluye el archivo AR1y
observa atentamente la implementación de la sucesión b_n :

Definición en Matemática	**Implementación en ISETL**

$b_n : IN \rightarrow IN \;\diagup\; b_n = 5n^3 + 8n$	`b:=func(n);`
	`if is_nat(n) then return 5*n**3+8*n;`
	`end;`
	`end;`

Hallar
b_3, b_5, b_{10}
	Evaluar
	`b(3);`
	`b(5);`
	`b(10);`

EJERCICIO

¿Que crees que significa ":="?

Define las sucesiones (e_n) y (f_n) en Matemática e ISETL y halla en cada caso los términos 2; 7 y 14.

EJERCICIO

El siguiente cuadro, es el programa en ISETL del problema 1. Complétalo e impleméntalo en la computadora. Halla el saldo en un período de 6 años a una tasa del 4% anual y con un capital inicial de $3800.

```
int:=_ _ _ _ _ _ (M,i,n);
     if is_number(M) and_ _ _ _ _ _and_ _ _ _ _ _and i>=0 and
     is_nat(n) then_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _;
     end;
end;

int(3800, _ _ _ , _ _ _ );
```

DEFINICIONES POR RECURRENCIA

Otra forma posible de definir una sucesión es por recurrencia. Como lo sugiere el nombre, consiste en definir un término recurriendo a uno o más términos anteriores. Necesariamente, se definirá uno o más términos bases por sí mismos.
Observa que es posible definir por recurrencia porque el dominio es IN y por lo tanto podemos hablar de "términos anteriores"

Ejemplo: $(a_n)/\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 4 \end{cases}$

Hallar a_3, a_6

ACTIVIDAD

Define en Matemática e ISETL la sucesión e implementa el programa hallando los términos a_3, a_6

CÓDIGO DA VINCI DE DAN BROWN

Ésta obra, trata sobre Jacques Sauniere, el último Gran Maestre de una sociedad secreta, quien antes de morir asesinado, trasmite a su nieta Sophie una misteriosa clave.

Entre los mensajes ocultos que ella debe descifrar se encuentra la "secuencia de Fibonacci". Es una sucesión numérica en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores.

"…Langdon no lograba apartar la vista de aquellas letras que brillaban sobre el suelo de madera. Le parecía totalmente inverosímil que aquellas fueran las últimas palabras de Jacques Saunière.El mensaje rezaba así:
13-3-2-21-1-1-8-5
¡Diavole in Dracon!
Límala, asno… Langdon no tenía ni la más remota idea de qué significaba aquello…"

"…—Este código —insistió Sophie, es simple hasta el absurdo. Jacques Saunière debe de haber sido consciente de que lo descifraríamos al momento. —Se sacó un trozo de papel del bolsillo del suéter y se lo dio al capitán.
—Aquí lo tiene descifrado.
Fache lo estudió.
1-1-2-3-5-8-13-21
—¿Qué es esto? —exclamó—. ¡Pero si lo único que ha hecho ha sido colocar los números en orden ascendente!
Sophie se atrevió a esbozar una sonrisa satisfecha.
—Exacto…"

"…—Que la Secuencia de Fibonacci esté desordenada es una pista — dijo Langdon cogiéndole la foto—. Los números nos dan la pauta para descifrar lo que viene a continuación. Ha escrito los números desordenados para pedirnos que apliquemos el mismo criterio al texto «¿Diavole in Dracon? ¿Límala, asno?» Esas frases no significan nada.Son sólo letras desordenadas.
A Sophie sólo le hizo falta un instante para asimilar lo que aquello implicaba, y le pareció de una simplicidad irrisoria.
—¿Me está diciendo que cree que se trata de... anagramas? ¿Cómo los de los pasatiempos de los periódicos?..."

¿Recuerdas que palabras encontraba Langdon luego de ordenar las letras?

EJERCICIO

Escribe los 15 primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

DEFINICIÓN

En Matemática

$$fib : IN \to IN \Big/ \begin{cases} fib_1 = 1 \\ fib_2 = 1 \\ fib_n = fib_{n-2} + fib_{n-1} \end{cases}$$

En ISETL

```
fib:=func(n);
     if is_nat(n) then
          if n=1 then return 1;
          else
               if n=2 then return 1;
               else return fib(n-1)+fib(n-2);
               end;
          end;
     end;
end;
```

OTRAS DEFINICIONES DE FUNCIONES POR RECURRENCIA

POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL

$$a \in R; \quad n \in N; \begin{cases} a^0 = 1 \quad a \neq 0 \\ a^1 = a \\ a^n = \underbrace{a.a.a. \ldots .a}_{n \ factores}; \quad n \rangle 1 \end{cases}$$

FACTORIAL DE UN NATURAL

n ! se lee factorial de *n*

$$n \in IN \; \diagup \begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \_\_\_\_\_ \times 3 \times 2 \times 1 \end{cases}$$

SUCESIÓN ARITMÉTICA

Una sucesión es aritmética cuando cada término (excepto el primero), es igual al anterior más una constante llamada diferencia.

SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Una sucesión es geométrica cuando cada término (excepto el primero), es igual al anterior por una constante llamada razón.

EJERCICIO

Define matemáticamente por recurrencia cada una de las funciones anteriores, prestando especial atención en el conjunto de llegada.

Define luego en ISETL, implementa los programas y halla algún caso particular como ejemplo.

> Sintetizando: una sucesión es una función cuyo dominio está incluido en N y el conjunto de llegada es cualquier conjunto (como lo has observado en los ejemplos). Las sucesiones de números reales que introdujimos al principio (problema 1) solo son un caso particular de sucesiones.

TEORÍA COMBINATORIA

ARREGLOS

Se disputa un cuadrangular de básquetbol entre los liceos: 6,9,11 y 23. El primer puesto se lleva de premio el paseo a Piriápolis para todo el grupo, y el segundo, el paseo al Parque Lecocq. ¿De cuántas formas pueden distribuirse éstos premios?

1er puesto	**2do puesto**
L6	L9
	L11
	L23
L9	L6
	L11
	L23
L11	L6
	L9
	L23
L23	L6
	L9
	L11

$4 \times 3 = 12$
12 formas posibles

A éstas configuraciones formadas por dos elementos distintos elegidos de un conjunto de cuatro elementos {L6,L9,L11,L23}, tales que dos configuraciones cualquiera difieren por lo menos en un elemento o en el orden de estos, les llamaremos: arreglos .

Al número de configuraciones que pueden formarse se anota: A_2^4 y se lee arreglos de 4 en 2. Por lo tanto: $A_2^4 = 12$.

DEFINICIÓN

> Llamamos arreglos de m elementos distintos tomados de a n , a las configuraciones de n elementos distintos elegidos entre los m disponibles, tales que dos configuraciones cualesquiera difieren en por lo menos un elemento o en el orden en que se los coloca.

$$A_{n \to \text{numero de elementos de cada arreglo}}^{m \to \text{numero de elementos disponibles}} \; ; \qquad m \geq n$$

Cálculo del número de arreglos: está dado por la expresión:

$$A_0^m = 1$$

$$A_n^m = \underbrace{m.(m-1).(m-2).\ldots.(m-n+1)}_{n \text{ factores decrecientes}}$$

Con los números del 1 al 9 , ¿cuántos números naturales de 3 cifras distintas se pueden formar?

Fórmula con factoriales:

$A_n^m = m.(m-1).(m-2)........(m-n+1)$

Multiplico y divido el segundo miembro por $(m-n)!$

$$A_n^m = \frac{m.(m-1).(m-2).......(m-n+1).(m-n).(m-n-1)......2.1}{(m-n)!}$$

El numerador equivale a $m!$

$$A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Trabajemos como ya lo hemos hecho en Matemática e ISETL. Incluye AR1 antes de implementar los trabajos en la PC.

En Matemática	En ISETL

$A: IN \times IN \rightarrow IN$ /
 $A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}; \quad m \geq n$
 $A_3^7 = \frac{7!}{4!} = 210$
	`A:=func(m,n);`
	 `if is_nat(m) and is_nat(n) and m>=n then return`
	 `m! div (m-n)!;`
	 `end; end;`
	 `A(7,3);`
	 `210`

Definición de arreglos por recurrencia

Recuerda que en éste caso recurriré a un término anterior, es decir definimos

A_n^m basándonos en A_{n-1}^m

$$A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Multiplico y divido el segundo miembro por $(m-n+1)$

$$A_n^m = \frac{m!.(m-n+1)}{\underbrace{(m-n)!.(m-n+1)}_{(m-n+1)!}}$$

$$A_n^m = \frac{m!.(m-n+1)}{(m-n+1)!}$$

Pero $\dfrac{m!}{(m-n+1)!} = A_{n-1}^m$

Entonces $A_n^m = A_{n-1}^m.(m-n+1)$

<u>Conclusión</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l} A : IN \times IN \to IN \;/ \\ A_n^m = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ A_{n-1}^m \times (m-n+1) \end{cases} \\ m \geq n \end{array}}$$

Implementa arreglos de *m* en *n* en ISETL y evalúa para algunos valores de las variables.

<u>PERMUTACIONES</u>

Tres nadadores disputan un torneo. ¿De cuántas formas pueden ocupar el podio?
(1º-2º y 3er puesto).

Observa que todas las configuraciones posibles son de tres elementos de un conjunto de tres elementos. Dos configuraciones distintas difieren solo en el orden. Éste es un caso particular de arreglos: arreglos de tres en tres. Éste caso particular (m=n) se denomina permutaciones de orden 3.

$$A_3^3 = P_3$$

En general: $A_m^m = P_m$

Cálculo del número de permutaciones:

$$A_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = \frac{m!}{1} = m!$$

$$P_m = m!$$

Definición

Llamamos permutaciones de orden m, a las configuraciones de m elementos distintos, tales que dos configuraciones cualesquiera difieren solo en el orden de colocación de los elementos.

EJERCICIOS

Define en Matemática e ISETL permutaciones.
Impleméntalo en la PC y evalúa algunos casos.

Define permutaciones por recurrencia y realiza las acciones que se te pidieron
anteriormente.

COMBINACIONES

En la playa de Bella Vista se instaló un puesto de venta de licuados.
Venden licuados mixtos por $30. Hay 5 frutas disponibles: A (ananá), F (frutilla), U (uva),
B (banana), D (durazno). ¿Cuántos licuados diferentes se pueden ofrecer?

$$\left.\begin{array}{l} A-F \\ A-B \\ A-D \\ A-U \\ F-B \\ F-D \\ F-U \\ B-D \\ B-U \\ D-U \end{array}\right\} 10\, licuados\ diferentes$$

Observa que A-F y F-A son el mismo licuado.
En éste caso una configuración es distinta de otra cuando tienen distintos elementos. A éstas configuraciones llamaremos combinaciones y a su número combinaciones de 5 tomadas de a dos: C_2^5. De manera que C_2^5 =10.

DEFINICIÓN

Llamamos combinaciones de m elementos distintos tomados de a n , a las configuraciones de n elementos distintos elegidos entre los m disponibles, tales que dos configuraciones cualesquiera difieren en por lo menos un elemento.

$$C_{n \,\rightarrow \text{numero de elementos de cada } combinacion}^{m \,\rightarrow \text{numero de elementos disponibles}} \; ; \qquad m \geq n$$

Cálculo del número de combinaciones: está dado por la expresión:

$$C_0^m = 1$$

$$C_n^m = \frac{\overbrace{m.(m-1)..............(m-n+1)}^{n \text{ factores decrecientes}}}{n!}$$

Con los números del 1 al 9 , ¿cuántos productos de 3 factores distintos se pueden formar?

EJERCICIOS . Trabaja en forma análoga a arreglos y realiza las siguientes deducciones y trabajos con combinaciones:

- Fórmula con factoriales
- Implementación en ISETL.
- Definición de combinaciones por recurrencia.
- Implementación en ISETL