EJERCICIOS
DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III
(Cálculo Vectorial)

Marzo de 2001.

EJERCICIOS DE CURVAS. (Courant vol 1, sección 4.1)

En los próximos ejercicios, el esbozo de las curvas será solo un croquis, sin necesidad de estudiar curvatura (concavidad) ni asíntotas, a menos que se pida expresamente.

1. Encontrar para cada una de las curvas planas paramétrizadas que se dan a continuación, una ecuación implícita y dibujar las curvas, orientadas cuando es posible, para t creciente:

   (a) $x = at + b$, $x = ct + d$, $t \in I\!\!R$, $a, c > 0$.

   (b) $x = a\mathrm{cosh}t$, $y = b\mathrm{senh}t$, $t \in I\!\!R$, $a, b > 0$.

   (c) $x = \cos t$, $y = 0$, $t \in I\!\!R$

   (d) $x = a\mathrm{sect}$, $y = b\mathrm{tant}$, $t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$, $a, b > 0$.

   Respuestas:

   (a) $ay - cx = ad - bc$. Una recta, recorrida en sentido de x e y crecientes.

   (b) $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1; x > 0$. La rama derecha de una hipérbola, recorrida en sentido creciente de y.

   (c) $y = 0; |x| \leq 1$. El segmento con extremos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, recorrido infinitas veces en un sentido y el opuesto alternadamente.

   (d) $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$. Son dos curvas, una en cada intervalo donde varía t: primero se recorre la rama derecha de una hipérbola, en sentido de y creciente, y luego su rama izquierda, recorrida en sentido decreciente de y.

2. Ver Blank 4.1 c ej. 3 (a),(b). En la parte (a) estudiar asíntotas. En la parte (b) tomar $a = 1$ y $b = 1/2$. Estudiar concavidad en la parte (b).

3. Ver Blank 4.1 d ej. 1 (a),(b),(d),(f).

4. Ver Blank 4.1 e ej. 1 (a),(b).

5. Croquizar la curva plana parametrizada por:

$$\begin{cases} x &= \cos^3 t & \text{si } 0 \le t \le \pi/2 \\ x &= sen(t-\pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \le \pi \\ y &= \operatorname{sen}^3 t & \text{si } 0 \le t \le \pi/2 \\ y &= cos(t-\pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \le \pi \end{cases}$$

Hallar su longitud. Resp: $(3+\pi)/2$

6. Ver Blank 4.1 f Probl. 1 Solo la parte que pide demostrar que la segunda curva dada no es rectificable (más precisamente, que la integral impropia que queda para calcular su longitud es divergente a $+\infty$, brevemente se dice que la longitud de la curva es ∞).

7. Ver Blank 4.1 g ej. 1 (a),(c).

8. Ver Blank 4.1 h ej. 1. La respuesta en el Blank está equivocada. Allí se expone la ecuación de la circunferencia osculatriz por el punto $x=0$. La que corresponde al punto $x=1$ es la circunferencia

$$\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+(x+4)^2=\frac{125}{4}$$

9. Ver Blank 4.1 h ej. 4.

10. Ver Blank 4.1 k ej. 1

11. Ver Blank 4.1 k ej. 3.

EJERCICIOS SOBRE INTEGRALES CURVILINEAS. (Courant volumen 2, secciones 1.9 y 1.10).

12. Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$ donde C es el arco de la parábola $y = x^2$ que va del punto $(1,1)$ al punto $(2,4)$.

    Resp.: 1219/30.

13. Calcular $\int_C (2a - y)\,dx + x\,dy$ donde C es el primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ recorrido en el sentido de los valores crecientes de t.

    Resp.: $-2\pi a^2$

14. Calcular $\int_C 2xy\,dx - x^2\,dy$ sobre los caminos que van del punto $O(0,0)$ al $A(2,1)$:

    a) Sobre el segmento de recta que une los dos puntos.

    b) Sobre la parábola cuyo eje de simetría es Oy.

    c) Sobre la parábola cuyo eje de simetría es Ox.

    d) Sobre la quebrada OBA siendo $B(2,0)$.

    e) Sobre la quebrada OCA siendo $C(0,1)$.

    Resp.: $4/3, 0, 12/5, -4, 4$.

15. Calcular $\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy$ sobre los caminos que se indican en el ejercicio anterior.

    Resp.: 4

16. EJERCICIO DEL VOLUMEN 2 DEL COURANT Y JOHN: Ver Courant y John, vol II, punto 1.9 b ej. 1.

    EJERCICIOS DE INTEGRALES CURVILÍNEAS, POTENCIALES ESCALARES, UNO-FORMAS EXACTAS O CAMPOS DE GRADIENTES. (Courant vol. 2, sec. 1.9 y 1.10).

17. Sea el campo vectorial $\bar{X} : U(\subset R^2) \mapsto R^2$ definido como

$$\bar{X} = \left(\frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

    donde $U = R^2 - \{(0,0)\}$

    a) Mostrar que $f(x,y) = (x+y)/(x^2+y^2)$ es un potencial escalar de $\bar{X}$ en el dominio U.

    b) Calcular la circulación de $\bar{X}$ a lo largo de la circunferencia de radio 1, centrada en el origen, orientada en sentido antihorario.

c) Calcular la circulación de $\bar{X}$ a lo largo de la elipse $\alpha(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Resp: a) Verificar que $\bar{X} = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$. b) cero c) cero.

18. En el plano xOy se consideran los puntos $A(1,0)$ y $B(0,1)$. Calcular $\int_C x^2\,dy - y^2\,dx$ sobre el segmento AB y sobre el arco AB de la circunferencia de centro O (cuarto de circunferencia).

    Resp.: 2/3, 4/3.

19. Calcular $\int_C y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$ sobre el arco AB del ejercicio anterior. Calcular dicha integral sobre la cuerda AB. La expresión $y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$, ¿es diferencial de una función $u(x,y)$? Hallar las funciones $h(x)$ tal que $h(x)y^2\,dx + h(x)(x^2 - 2xy)\,dy$ sea el diferencial de una función $u(x,y)$. Hallar las funciones $u(x,y)$.

    Resp.: -2/3, -1/3, No (si existiera, sería $u_{xy} = u_{yx}$), $h(x) = kx^{-2}$, $u(x,y) = ky - (ky^2/x) +$ cte..

20. Se considera la integral curvilínea $\int_C [y(1 - x^2 + y^2)\,dx + x(1 + x^2 - y^2)\,dy]/(1 + x^2 + y^2)^2$. Mostrar que esta integral no depende del camino, sólo de los puntos iniciales y finales. Hallar una función cuyo diferencial sea la forma correspondiente. Calcular la mencionada integral sobre una curva que une los puntos $(1,1)$ y $(3,2)$.

    Resp.: La forma es el diferencial de $xy/(1 + x^2 + y^2)$. (Para hallarla, calcular la integral de la forma sobre p. ej. una curva adecuada que una el punto $(0,0)$ y un punto genérico (a,b).

21. Hallar una función cuyo diferencial sea $[(1-y^2)\,dx + (1-x^2)\,dy]/(1+xy)^2$. Calcular $\int_C [(1-y^2)\,dx + (1-x^2)\,dy]/(1+xy)^2$ sobre una curva como la del ejercicio anterior, supuesto que está en el primer cuadrante.

    Resp.: $(x+y)/(1+xy)$, -2/7

22. Sea $\vec{X}$ un campo irrotacional en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$ y sea I su circulación a lo largo de la circunferencia de centro $\{(x_0, y_0)\}$ y radio 1, orientada en sentido antihorario.

    a) Demostrar que es cero la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de cualquier curva cerrada que no dé ninguna vuelta alrededor del punto $\{(x_0, y_0)\}$. (Sugerencia: La curva está contenida en algún subconjunto abierto simplemente conexo, donde X es irrotacional).

    b) Demostrar que es igual a I la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de cualquier curva cerrada que dé una sola vuelta alrededor del punto $\{(x_0, y_0)\}$ en sentido antihorario. (Sugerencia: Cortar la curva dada y la circunferencia con una recta r que pase por $\{(x_0, y_0)\}$, y agregar segmentos de esta recta que vayan de la curva a la circunferencia, recorridos dos veces, primero en un sentido y luego en el otro. La circulación en la curva dada menos la de la circunferencia es igual a la suma de las circulaciones en dos curvas cerradas que no dan vuelta alrededor del origen. Cada curva cerrada está formada por un arco de la curva dada, un arco de circunferencia y dos o más segmentos, de forma de quedar totalmente contenida en uno de los dos semiespacios determinados por la recta r. Aplicar la parte a)).

c) Demostrar que si $I = 0$ (sabiendo que $\vec{X}$ es irrotacional en $\mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$) entonces $\vec{X}$ es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$. (Sugerencia: Demostrar, usando las partes a) y b), que es cero la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de toda curva cerrada que no pase por (x_0, y_0)).

23. a) Calcular $\int_C [(x+y)\,dx - (x-y)\,dy]/(x^2+y^2)$ sobre la circunferencia $x^2+y^2 = a^2$ recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Resp.: -2π.

b) Demostrar que la integral $\int_C [(x+y)\,dx - (x-y)\,dy]/(x^2+y^2)$ a lo largo de cualquier curva cerrada que no pase por el origen y que no encierre al origen en su interior es cero.

c) Demostrar que la integral $\int_C [(x+y)\,dx - (x-y)\,dy]/(x^2+y^2)$ a lo largo de cualquier curva $\mathcal{C}$ cerrada simple, que no pase por $(0,0)$, orientada en sentido antihorario, y que dé una sola vuelta alrededor de $(0,0)$, es igual a -2π.

d) Calcular la integral $\int_C (x+y)/(x^2+y^2)\,dx + (y-x)/(x^2+y^2)\,dy$ sobre las curvas que se indican en la figura 1.

Resp.: 0, $-2\pi + \log 2$, $-4\pi + \log 2$.

24. Calcular $\int_C [x\,dy - y\,dx]/(x^2+y^2)$ sobre la curva que se indica en la figura 2. 2.

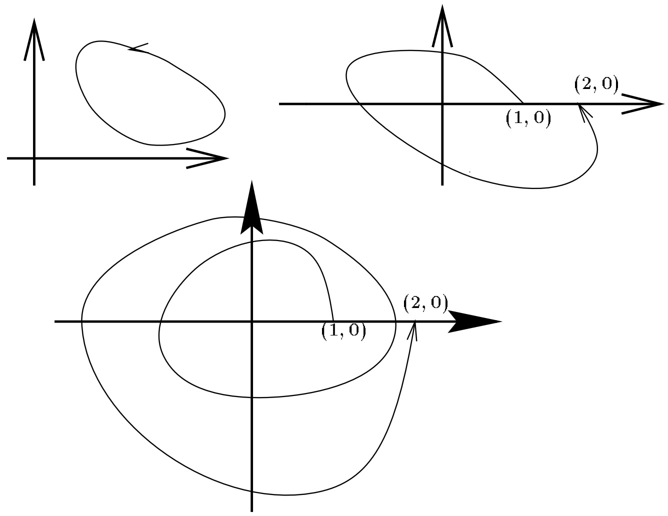

Figura 1:

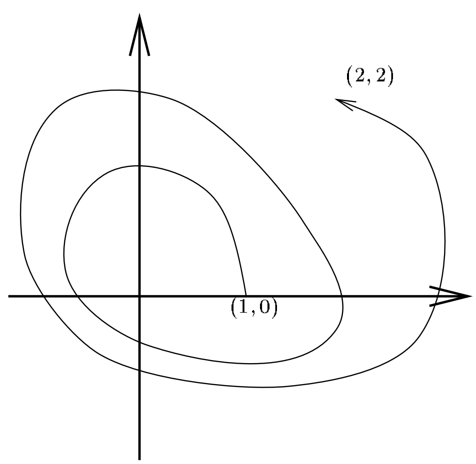

Figura 2:

Resp.: $17\pi/4$.

25. a) Probar que a lo largo de cualquier curva C cerrada, se cumple $\int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$.

b) Probar que el campo

$$\vec{X} = \frac{1}{r^3}(x, y, z)$$

definido en $\Omega = I\!R^3 - \{(0,0,0\}$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es de gradientes en Ω.

26. Sea $\vec{X} = \vec{Y} + \vec{Z}$ un campo definido en $I\!R^2$ excepto en dos puntos P y Q. Se sabe que $\vec{Y}$ es irrotacional en $I\!R^2 - \{P\}$ y $\vec{Z}$ es irrotacional en $I\!R^2 - \{Q\}$.

a) Demostrar que la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de cualquier curva cerrada simple que no pase por P ni por Q, orientada en sentido antihorario, es:

Cero, si la curva deja a P y a Q en su exterior.

Igual a la circulación p de $\vec{Y}$ a lo largo de cualquier circunferencia que rodee a P dejando solo a Q en el exterior, si la curva dada también lo hace.

Igual a la circulación q de $\vec{Z}$ a lo largo de cualquier circunferencia que rodee a Q dejando solo a P en el exterior, si la curva dada también lo hace.

Igual a la suma $p+q$ de los dos casos anteriores, si la curva dada deja a P y a Q en su interior.

(Las circunferencias se consideran orientadas en sentido antihorario).

b) Hallar la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de una curva cerrada, no simple, que da tres vueltas en sentido antihorario alrededor de P, y luego dos vueltas en sentido horario alrededor de Q. Resp: $3p - 2q$.

c) Demostrar que si $p = q = 0$ entonces $\vec{X}$ es campo de gradientes.

d) Hallar la circulación de

$$\vec{X} = \left(\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2},\ \frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2} - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\right)$$

a lo largo de una curva cerrada que no pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ y das tres vueltas en sentido antihorario alrededor de $(-1,0)$ y dos vueltas en sentido horario alrededor de $(1,0)$. Resp: -24π.

27. (Ejemplos parecidos a los de parciales y exámenes de 1998 y 1999). Se dan los campos:

$$\vec{X} = \left(\frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2},\ \frac{2(1-x)y}{((x-1)^2+y^2)^2}\right)$$

$$\vec{Y} = \left(\frac{(y-4)^2}{8} + \frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \ \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2} \right)$$

$$\vec{Z} = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \ \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \right)$$

definidos en $\Omega = I\!\!R^2 - \{(1,0)\}$.

Sean las circunferencias:

$\mathcal{C}_0 = \{x^2 + y^2 = 2\}$,

$\mathcal{C}_1 = \{(x-1)^2 + y^2 = 2\}$,

$\mathcal{C}_2 = \{x^2 + (y-4)^2 = 2\}$,

recorridas una sola vez en sentido antihorario.

a) Hallar, las circulaciones de X, Y y Z a lo largo de las tres circunferencias dadas. (Sugerencia: Estudiar los rotores de los campos. Calcular las circulaciones directamente sólo a lo largo de $\mathcal{C}_1$ y además calcular las circulaciones del campo $(y-4)/8, \ 0)$ en las tres circunferencias. Los valores de todas las integrales pedidas pueden deducirse a partir de esos cálculos).

Resp: Las tres integrales de X dan cero; las de Y también; y las de Z son 2π, 2π y 0.

b) Uno de los tres campos dados es de gradientes en Ω. Otro no es de gradientes en Ω pero lo es en el abierto $I\!\!R^2 - \{x \leq 22\}$. Otro no es de gradientes en Ω ni en ningún subconjunto abierto de Ω. Distinguir cuál es cual y demostrar las afirmaciones anteriores.

Resp: X, Z e Y en ese orden.

28. Demostrar que si un campo es irrotacional en todo $I\!\!R^3$ excepto en una recta r, entonces la circulación del campo a lo largo de cualquier curva cerrada que dé una vuelta alrededor de la recta r (con alguna orientación), es igual (en valor absoluto) a la circulación a lo largo de cualquier circunferencia que dé una vuelta alrededor de la recta r. (Sugerencia: Tomar un plano Π que contenga r, y considerar dos curvas cerradas: una, formada por los arcos de la curva dada y de la circunferencia que quedan en uno de los semiespacios de $I\!\!R^3 - r$, agregando segmentos apropiados en el plano Π para cerrar la curva; la otra análoga, pero en el otro semiespacio. La suma de las integrales en ambas curvas cerradas, orientadas apropiadamente, es igual a la diferencia de la integral en la curva dada menos en la circunferencia. Basta demostrar que las integrales en cada una de las curvas cerradas es nula. Para ello observar que ellas están contenidas en sendos subconjuntos abiertos simplemente conexos, contenidos estrictamente en $I\!\!R^3 - r$.)

29. Sean las formas diferenciales lineales:

$$L_1 = \frac{-x^2+y^2-2xz}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y(x+z)}{x^2+y^2}\,dy - \frac{1}{x^2+y^2}\,dz$$

$$L_2 = \left(\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy + \frac{-1}{x^2+y^2}\,dz$$

$$L_3 = \frac{-x^2+y^2+2x(y-z)}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{-x^2+y^2-2y(x+z)}{(x^2+y^2)^2}\,dy + \frac{1}{x^2+y^2}\,dz$$

definidas en $\Omega = I\!R^3 - \{x=0, y=0\}$.

Sean las circunferencias:

$\mathcal{C}_0 = \{z=0,\ x^2+y^2=1\}$,

$\mathcal{C}_1 = \{z=1,\ (x-1)^2+y^2=4\}$,

$\mathcal{C}_2 = \{z=3,\ (x-2)^2+y^2=1\}$,

recorridas una sola vez con alguna orientación que se elegirá.

a) Hallar, (en valor absoluto) las integrales de L_1, L_2 y L_3 a lo largo de las tres circunferencias dadas. (Sugerencia: Estudiar los rotores de los campos asociados a las uno-formas dadas, y para ahorrarse algunos cálculos, usar los resultados del ejercicio 28).

Resp: Las tres integrales de L_1 dan cero; las de L_2 son 2π, 2π y 0; y las de L_3 son cero.

b) Una de las tres formas diferenciales dadas es exacta en Ω. Otra no es exacta en Ω pero es exacta en el abierto $I\!R^3 - \{x \geq 0,\ y=0\}$. Otra no es exacta en Ω ni en ningún subconjunto abierto de Ω. Distinguir cuál es cual y demostrar las afirmaciones anteriores.

Resp: L_3, L_2 y L_1 en ese orden.

EJERCICIOS DE NOCIONES VECTORIALES (Courant vol 2, sección 2.5)

30. Ver Courant y John, vol II, punto 2.5 ej. 2.

31. Ver Courant y John, vol II, punto 2.5 ej. 3, con la siguiente aclaración y corrección: $U = (U_1, U_2, U_3)$ y $V = (V_1, V_2, V_3)$ son campos vectoriales. El símbolo diferencial $\partial/\partial x$ cuando se aplica a un campo V, da como resultado otro campo:

$$\frac{\partial}{\partial x}V = \left(\frac{\partial}{\partial x}V_1, \frac{\partial}{\partial x}V_2, \frac{\partial}{\partial x}V_3\right)$$

El operador

$$U \cdot \nabla = U_1\frac{\partial}{\partial x} + U_2\frac{\partial}{\partial y} + U_3\frac{\partial}{\partial z}$$

se aplica a un campo vectorial V y da como resultado otro campo:

$$U \cdot \nabla V = U_1 \frac{\partial}{\partial x} V + U_2 \frac{\partial}{\partial y} V + U_3 \frac{\partial}{\partial z} V$$

Se pide demostrar las igualdades de la sección 2.5, ejercicio 3, partes a) y b), sin modificaciones.

32. Ver Courant y John, vol II, punto 2.5 ej. 4.

33. Calcular $\nabla \wedge (P - O)$.

    Calcular $\nabla \wedge \vec{v}$ siendo $\vec{v} = (xyz, x^2y^2z, yz^3)$.

    Calcular $\nabla \wedge \nabla f$ siendo $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ con derivadas segundas continuas.

    Calcular $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{v})$ siendo $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ con derivadas segundas continuas.

    Resp.: (0,0,0), $(z^3 - x^2y^2, xy, 2xy^2z - xz)$, (0,0,0), 0.

    EJERCICIOS SOBRE INTEGRALES MULTIPLES.

34. Al calcular por medio de integrales iteradas el volumen V limitado por encima por la superficie $z = f(x,y)$ y por la parte inferior por una cierta región S del plano xy, se ha llegado a la siguiente suma de integrales iteradas: $V = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} f(x,y)\, dy + \int_2^8 dx \int_x^8 f(x,y)\, dy$. Dibujar la región S y expresar el volumen V mediante una integral iterada en la que el orden de integración esté invertido.

    Resp.: $\int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\, dx + \int_4^8 dy \int_2^y f(x,y)\, dx$.

35. Transformar la siguiente integral doble a coordenadas polares, y calcular su valor.
    $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\, dy$

    Resp.: $3\pi a^4/4$.

36. Utilizar una transformación lineal para calcular la siguiente integral doble: $\iint_S (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\, dx\, dy$, donde S es el paralelogramo de vértices $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi), (0, \pi)$.

    Resp.: $\pi^4/3$.

    EJERCICIOS SOBRE LOS TEOREMAS DE GAUSS, DE STOKES Y FORMULAS DE GREEN EN EL PLANO (Courant vol 2, secciones 5.1, 5.2, 5.3 y 5.6).

37. Usando el teorema de Gauss en el plano:

Si R es una región abierta acotada del plano, cuyo borde es una curva $\mathcal{C}$ cerrada orientada de forma que deja a R siempre del lado izquierdo, entonces:

$$\int\!\!\int_R (f_x + g_y)\, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}} f\, dy - g\, 372dx$$

calcular

$$\int_{\mathcal{C}_1} e^y dx + x e^y dy$$

a lo largo de la semicircunferencia $\mathcal{C}_1$: $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq \pi$, orientada según t creciente.

Respuesta: -2

38. Usando el teorema de Stokes en el plano:

    Si R es una región abierta acotada del plano, cuyo borde es una curva $\mathcal{C}$ cerrada orientada de forma que deja a R siempre del lado izquierdo, entonces:

    $$\int\!\!\int_R (B_x - A_y)\, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}} A\, dx + B\, dy$$

    calcular

    $$\int\!\!\int_R (1 - x)\, dx\, dy$$

    en la región R del plano, encerrada por la curva: $x = \cos t, y = \operatorname{sen} 2t, -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

    Respuesta: $-\pi/4 + 4 - 8/3$.

39. Usando el teorema de Stokes en el plano, hacer de nuevo el ejercicio 22 y la parte a) del ejercicio 26.

40. a) Sean $\vec{X}$ y $\vec{W}$ dos campos definidos en $\Omega = I\!R^2 - \{(x_0, y_0)\}$ tales que sus rotores coinciden en Ω. Probar que son iguales las circulaciones de $\vec{X}$ y de $\vec{W}$ a lo largo de cualquier curva cerrada simple contenida en Ω que no deje al punto (x_0, y_0) en su interior.

    Probar que la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ cerrada, simple que da una vuelta en sentido antihorario alrededor de (x_0, y_0) es igual a la circulación de $\vec{W}$ a lo largo de $\mathcal{S}$ más la circulación de $\vec{X} - \vec{W}$ a lo largo de la circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio 1, orientada en sentido antihorario.

    b) Calcular las circulaciones del campo

    $$\vec{X} = \left(\frac{2 - y}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \,,\; 4x^2 + \frac{x}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right)$$

a lo largo de la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ y de las elipses $x^2+16y^2=1$ y $(x-1)^2+16(y-2)^2=1$, orientadas en sentido antihorario. (Sugerencia: aplicar la parte a) con $\vec{W}=(0,4x^2)$)

Resp: 6π, cero y 3π.

41. Sean las funciones escalares $u=xy$, $w=x^2+y^2$, definidas en todo $\mathbb{R}^2$. Sea R el interior del cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1), (0,1). Sea $\mathcal{C}$ el borde de R, orientado en sentido antihorario.

   a) Calcular

$$I_1=\iint_R u\Delta w\,dx\,dy$$

$$I_2=\iint_R w\Delta u\,dx\,dy$$

$$I_3=\iint_R(\nabla u)\cdot(\nabla w)\,dx\,dy$$

   b) Usando la primera fórmula de Green, calcular:

$$I_4=\int_{\mathcal{C}}(u\nabla w)\cdot\vec{n}\,ds$$

$$I_5=\int_{\mathcal{C}}(w\nabla u)\cdot\vec{n}\,ds$$

   c) Verificar la segunda fórmula de Green, es decir:

$$\iint_R(u\Delta w-w\Delta u)dxdy=\int_{\mathcal{C}}(u\nabla w-w\nabla u)\cdot\vec{n}\,ds$$

Respuestas: $I_1=1, I_2=0, I_3=1, I_4=2, I_5=1, I_1-I_2=I_4-I_5$.

42. Ver Courant y John, vol. II, punto 5.2 ej. 1 (a),(b).

43. Ver Courant y John, vol. II, punto 5.2 ej. 2

EJERCICIOS DE SUPERFICIES (Courant vol. 2, sección 3.4 a)).

44. Ver Courant y John, vol II, punto 3.4 a ej. 1 (a),(b).

45. Ver Courant y John, vol II, punto 3.4 a ej. 2.

46. Ver Courant y John, vol II, punto 3.4 a ej. 3.

47. Ver Courant y John, vol II, punto 3.4 a ej. 4.

48. Sea la superficie parametrizada por:

$$\begin{cases} x = u^2 + e^v & \\ & -1 < u < 1 \\ y = ue^v & \\ & -1 < v < 1 \\ z = ue^v + v^2 & \end{cases}$$

Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (1,0,0).

Resp: $y - z = 0$

49. a) Calcular la primera forma fundamental en los puntos regulares de la superficie parametrizada por:

$$\begin{cases} x = u & -2 \leq u \leq 2 \\ y = (2 - |u|)\cos v & 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = (2 - |u|)\operatorname{sen} v & \end{cases}$$

Resp: $(ds)^2 = \sqrt{2}(du)^2 + (2 - |u|)^2(dv)^2$ si $u \neq 0$. En los puntos de S donde se anula x (o sea $u = 0$) la superficie no es diferenciable, y por lo tanto esos puntos no son regulares. Los demás puntos son regulares.

b) Dibujar un bosquejo de la superficie dada en la parte anterior.

Hasta aquí son los ejercicios cuyos temas están incluidos en el primer parcial.

EJERCICIOS SOBRE INTEGRALES DE SUPERFICIE. (Sección 5.8 Courant vol. 2)

50. Hallar el área de la superficie

$$\begin{cases} x = 2u \operatorname{sen} v & 0 \leq v \leq \pi/2 \\ y = 2u \cos v & 0 \leq u \leq 1 \\ z = e^{-u} + e^{u} & \end{cases}$$

Resp: $2\pi(1 - e^{-1})$

51. Se da la superficie $\mathcal{S}$ parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \operatorname{sen}\theta \\ y &= y_0 + (a + r\cos\theta)\cos\phi \\ z &= z_0 + (a + r\cos\theta)\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

con los parámetros ϕ, θ variando en el triángulo:

$$\{0 \leq \theta \leq \pi, \theta \leq \phi \leq 2\theta\}$$

Calcular el área de $\mathcal{S}$.

Resp: $r(a\pi^2/2 - 2r)$

52. Calcular la integral $\iint_{\mathcal{S}} f\, dS$ de la función escalar $f(x, y, z) = 2y(x^2+1)^{-1}(1+4z)^{-1/2}$ sobre la superficie

$$\mathcal{S} = \{z = x^2 + y^2, |y| < 1\}$$

Resp: cero

53. Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada en $\mathbb{R}^3$, simétrica respecto al plano $z = 0$. Sea $\mathcal{S}_1$ la intersección de $\mathcal{S}$ con el semiespacio $z \geq 0$ y sea $\mathcal{S}_2$ su simétrica respecto al plano $z = 0$.

   a. f es una función escalar tal que $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$. Probar que $\iint_{\mathcal{S}} f\, dS = 0$.

   (Sugerencia: La integral en S es la suma de las integrales en S_1 y en S_2. Parametrizada S_1 con ecuaciones $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ con $(u, v) \in D$, se puede parametrizar S_2 con las ecuaciones $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = -\chi(u, v)$ en función de las mismas variables $(u, v) \in D$. La integral de f en S_1 se calcula como una integral doble con (u, v) variando en el dominio D. La integral en S_2 también se calcula como integral doble en el mismo dominio D, pero la función integrando, que depende de (u, v), es f compuesta con la parametrización de S_2, y resulta la opuesta de f compuesta con la parametrización de S_1. Entonces la integral de f en S_2 es opuesta a la integral de f en S_1, y su suma da cero.)

   b. g es una función escalar tal que $g(x, y, z) = g(x, y, -z)$. Probar que $\iint_{\mathcal{S}} g\, dS = 2\iint_{\mathcal{S}_1} g\, dS$.

   c. $\vec{X} = (a, b, c)$ es un campo tal que

$$\begin{array}{rcl} a(x, y, -z) & = & -a(x, y, z) \\ b(x, y, -z) & = & -b(x, y, z) \\ c(x, y, -z) & = & c(x, y, z) \end{array}$$

   Probar que el flujo de $\vec{X}$ a través de $\mathcal{S}$ es cero.

   (Sugerencia: Llamar $f(x, y, z)$ al producto escalar de $\vec{X}$ por el versor normal N a la superficie en el punto (x, y, z). Observar que al simetrizar el punto (x, y, z) respecto al plano $z = 0$, el versor normal también se simetriza, es decir, sus dos primeras componentes no cambian pero la tercera cambia de signo. Deducir que $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ y aplicar la parte [a.].)

d. $\vec{Y} = (a, b, c)$ es un campo tal que

$$\begin{aligned} a(x, y, -z) &= a(x, y, z) \\ b(x, y, -z) &= b(x, y, z) \\ c(x, y, -z) &= -c(x, y, z) \end{aligned}$$

Probar que el flujo de $\vec{Y}$ a través de $\mathcal{S}$ es el doble del flujo de $\vec{Y}$ a través de $\mathcal{S}_1$.

e. Hallar el flujo del campo

$$\vec{X} = (x^2 z^5, y^6 + z, x^3)$$

a través de la esfera de centro en el origen y radio 1, con la normal saliente. (Sugerencia: usar simetría respecto al eje de las z, es decir observar que cambiando el signo de x e y y dejando igual a z, las primeras dos componentes del campo $\vec{X}$ no cambian, pero la tercera componente cambia de signo. En cambio, si N es el versor normal a la superficie en el punto (x, y, z), al simetrizar el punto respecto al eje de las z, el versor N se simetriza también respecto a ese eje, es decir, sus dos primeras componentes cambian de signo y su tercera componente queda igual. Usar ahora un razonamiento análogo al de las partes [c.] y [a.].)

Resp: parte e.) cero.

54. Sea $\mathcal{S}$ una superficie cerrada acotada en $\mathbb{R}^3$ orientada con la normal $\vec{n}$ saliente. Se demostrará más adelante, como aplicación del Teorema de Gauss en el espacio, que el VOLUMEN de la región del espacio encerrada por $\mathcal{S}$ es igual a un tercio del flujo del campo $\vec{X} = (x, y, z)$ a través de $\mathcal{S}$. Calcular el volumen de la esfera sólida de radio r. Calcular el volumen del toro sólido que se obtiene haciendo girar en el espacio un círculo de radio r alrededor de un eje coplanar con él, que dista $a > r$ del centro del círculo.

Resp: $\frac{4}{3}\pi r^3, 2\pi^2 r^2 a$.

55. El campo vectorial (ax, by, cz) con a, b y c reales, determina la forma $ax\, dy\, dz + by\, dz\, dx + cz\, dx\, dy$. Hallar la integral de esa forma sobre la esfera de radio unidad y centro el origen, con la normal orientada positivamente al exterior (flujo del campo vectorial a través de la esfera). Resp.: $4\pi(a + b + c)/3$.

56. Hallar el flujo del campo vectorial $q\vec{X}/r^3$, siendo q una constante, $\vec{X} = (x, y, z)$, y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a través de la esfera de centro el origen y radio a, con la normal orientada positivamente al exterior. Resp.: $4\pi q$

57. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{X} = (x + y, y^2, y + z)$ sobre el cubo de centro el origen y arista a. Resp.: $2a^3$.

58. Calcular el flujo del vector $xz\vec{i} - y^2\vec{j} + xz\vec{k}$ a través de la superficie lateral del cilindro $x = R\cos u$, $y = R\,\mathrm{sen}\,u$, $z = v$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 < v < 3$ normal orientada al exterior. Resp.: $9\pi R^2/2$.

EJERCICIOS DE FORMAS DIFERENCIALES. (Courant vol 2, sección 3.6).

59. Ver Courant, vol II, punto 3.6 a ej. 1 (a),(b). La solución de la parte b) en el libro debería decir $(a^3 + b^3 + c^3)(u - v) + 3abc(v - u)$.

60. Ver Courant, vol II, punto 3.6 b ej. 1 (a),(b). La solución de la parte b) en el libro debería decir $(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)\,dx\,dy$.

61. Ver Courant, vol II, punto 3.6 b ej. 2.

62. Ver Courant, vol II, punto 3.6 b ej. 3.

63. Ver Courant, vol II, punto 3.6 b ej. 4.

64. Ver Courant, vol II, punto 3.6 c ej. 1 (a),(b). La solución de la parte b) en el libro debería decir $-2\,dx\,dy$.

65. Ver Courant, vol II, punto 3.6 c ej. 2. El enunciado en el libro debería decir: $d(\omega_1\omega_2) = -\omega_1(d\omega_2) + (d\omega_1)\omega_2$.

EJERCICIO SOBRE POTENCIAL VECTOR. EXACTITUD DE FORMAS DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN. Courant 3.6 c)

66. Probar que toda uno-forma diferencial exacta es cerrada. Probar que toda dos-forma diferencial exacta es cerrada. Probar que no toda uno-forma diferencial cerrada es exacta. (Sugerencia: Ejemplo del ejercicio 23). Más adelante se probará que no toda dos-forma diferencial cerrada es exacta. (Ejercicio 86).

67. i.) Probar que cada uno de los campos siguientes es solenoidal (o sea, de divergencia nula) y hallar un potencial vector. a) $\vec{v} = (x^2y, -xy^2 - y, z)$

b) $\vec{v} = (-\operatorname{sen} x, y\cos x - y^2, 2yz)$

c) $\vec{v} = (2x + y + z, -y, -z)$.

Se recuerda que si $\tau = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, si $\omega = d\tau = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy$, entonces el campo $X = (a, b, c)$ es el rotor del campo $Y = (A, B, C)$, y en ese caso se llama a X campo de rotores, y a Y potencial vector de X.

ii.) Para el campo vectorial dado en a) hallar un potencial vector con la tercera componente 0, y otro con la primera componente 0. Comprobar que los potenciales hallados difieren en un gradiente.

iii.) Para el campo dado en c), hallar el flujo de $\vec{v}$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, con la normal orientada tal que su segunda componente es mayor o igual a 0. (Se sugiere aplicar el teorema de Stokes en el espacio).

Resp. i.) Hay infinitos potenciales vectores de cada uno de los campos. Una respuesta es a) $(-xy^2z - yz, -x^2yz, 0)$, b) $(zy\cos x - zy^2, z\operatorname{sen} x, 0)$, c) $(-yz, -2xz - yz - z^2/2, 0)$.

ii.) Hay infinitas respuestas. Una respuesta es $(-xy^2z - yz, -x^2yz, 0)$ y $(0, xz, x^2y^2/2 + yx)$ que difieren en el gradiente de $f = x^2y^2z/2 + xyz$.

iii.) cero.

a. Si existe, hallar algún potencial vector del campo

$$\vec{X} = (y^2 - 2e^x z, 4xy, e^x z^2 - 4xz)$$

que sea de la forma $(0, B, C)$ con $B(0, y, 0) = y^2$, $C(0, y, z)y^3 + 2yz + 4$ y $B(0, 1, 1) = 5$.

[b.] Si existe, hallar algún otro potencial vector del mismo campo $\vec{X}$ que cumpla todas las condiciones anteriores excepto la última.

Resp. [a.] Hay uno solo, que es $(0, e^x z^2 - 2x^2z + z^2 + 2y^2z + y^2, -2yx^2 + y^3 + 2yz + 4)$. [b.] No existe.

EJERCICIOS SOBRE EL TEOREMA DE GAUSS Y GREEN EN EL ESPACIO (Courant, sección 5.9).

En los ejercicios que siguen, las superficies cerradas y acotadas están orientadas con la normal hacia el exterior, siempre que no se indique lo contrario.

68. El teorema de Gauss en el espacio afirma que

$$\iiint_V f_x + g_y + h_z \, dx\, dy\, dz = \iint_{\mathcal{S}} f \, dy\, dz + g \, dz\, dx + h \, dx\, dy$$

siendo V una región abierta acotada del espacio cuya frontera es la superficie cerrada $\mathcal{S}$ orientada con la normal *saliente* de V.

Probar que el volumen de la región V es igual a las siguientes integrales de superficie:

$$\iint_{\mathcal{S}} x \, dy\, dz = \iint_{\mathcal{S}} y \, dz\, dx = \iint_{\mathcal{S}} z \, dx\, dy = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} x \, dy\, dz + y \, dz\, dx + z \, dx\, dy$$

69. Calcular el volumen encerrado por la superficie cerrada, acotada, parametrizada por

$$\begin{cases} x = u & -2 \leq u \leq 2 \\ y = 3(2 - |u|) \cos v & 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = (2 - |u|) \operatorname{sen} v & \end{cases}$$

Respuesta: 16π

70. Calcular el volumen encerrado por un elipsoide de semiejes con longitudes a, b y c.

Resp: $4\pi abc/3$.

71. Calcular, primero directamente, y luego usando el teorema de Gauss en el espacio, la integral

$$\iint_{\mathcal{S}} (y - z) \, dy\, dz + (x + 2y + z) \, dz\, dx + (x - z) \, dx\, dy$$

sobre la superficie del cubo de centro en el origen, de lados de longitud 2, paralelos a los ejes coordenados, y orientado con la normal saliente.

Resp: 8.

72. a) Demostrar que si $\vec{X}$ es un campo solenoidal en $\mathbb{R}^3 - (0,0,0)$ entonces el flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier esfera que deje a $(0,0,0)$ en su interior es igual al flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier superficie cerrada, acotada, sin borde que deje a $(0,0,0)$ en su interior (es decir cualquier superficie que sea frontera de un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $(0,0,0)$).

b) Hallar el flujo del campo vectorial $q\vec{X}/r^3$, siendo q una constante, $\vec{X} = (x,y,z)$, y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a través del cubo de centro el origen y arista a, con la normal orientada positivamente al exterior. Se sugiere usar que el flujo de ese campo a través de la esfera de radio a centrada en el origen es $4\pi q$.

Resp.: $4\pi q$

73. Aplicando la fórmula de Gauss, hallar el flujo del vector $(3x, -2y, 5z)$ a través de una esfera cualquiera de radio 2, normal orientada al exterior. Resp.: 64π.

74. Sea $\vec{X}$ un campo solenoidal definido en todo $I\!R^3$. Se sabe que

$$\vec{X}(x, y, 1) = (\sqrt{1+x^2+y^2}\cos x, \quad e^x, \quad 0)$$

$$\vec{X}(x, y, 0) = (\sqrt{1+x^2+y^2}\cos x, \quad e^x, \quad y-1)$$

Calcular el flujo de $\vec{X}$ a través de la superficie lateral del cilindro $x = \cos u,\ y = \operatorname{sen} u,\ z = v, \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 1$ con la normal que apunta hacia el eje del cilindro.

Resp: π

75. Sea $\vec{X}$ un campo solenoidal en $\Omega = I\!R^3 - \{(0,0,0)\}$.

Su primera componente $A(x, y, z)$ verifica $A(1, y, z) = 3(y^2+z^2)$, $A(-1, y, z) = -3(y^2+z^2)$.

En los planos $|y| = 1$ se anula la segunda componente del campo $\vec{X}$, y en los planos $|z| = 1$ se anula la tercera componente.

Hallar el flujo de $\vec{X}$ a través de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 5. Hallar el flujo de $\vec{X}$ a través de la esfera $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

(Sugerencia: Considerar la superficie de un cubo con centro en el origen, y lados paralelos a los ejes de longitud 2 y aplicar el ejercicio 72.)

Respuesta: 8.

76. Sean $U = x + y + z, \qquad V = e^x + y,$ funciones escalares, y sea $\mathcal{S}$ la superficie del cubo con vértices (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1), orientada con la normal n saliente. Sea R la región encerrada por $\mathcal{S}$.

Calcular

$$I_1 = \iiint_R U \Delta V \, dx\, dy\, dz \tag{1}$$

$$I_2 = \iint_{\mathcal{S}} U \frac{dV}{dn} \, dS \tag{2}$$

$$I_3 = \iiint_R V \Delta U \, dx\, dy\, dz \tag{3}$$

Aplicando las identidades de Green, hallar:

$$I_4 = \iiint_R \nabla U \cdot \nabla V \, dx\, dy\, dz \tag{4}$$

$$I_5 = \iint_{\mathcal{S}} V \frac{dU}{dn} \, dS \tag{5}$$

Resp: $I_1 = e$, $I_2 = 2e$, $I_3 = 0$, $I_4 = e$, $I_5 = e$.

77. a) Sean $\vec{X}$ y $\vec{W}$ dos campos definidos en $\Omega = I\!R^3 - \{(x_0, y_0, z_0)\}$, tales que div $\vec{X} =$ div $\vec{W}$ en Ω. Probar que son iguales los flujos de $\vec{X}$ y de $\vec{W}$ a través de cualquier superficie cerrada y acotada, contenida en Ω que no encierre al punto (x_0, y_0, z_0) (es decir que la superficie sea la frontera de un abierto acotado de $I\!R^3$ que no contiene al punto (x_0, y_0, z_0)).

Probar que el flujo de $\vec{X}$ a través de una superficie $\mathcal{S}$ cerrada y acotada, contenida en Ω que encierra al punto (x_0, y_0, z_0) es igual al flujo de $\vec{W}$ a través de $\mathcal{S}$ más el flujo de $\vec{X} - \vec{W}$ a través de la esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y radio 1.

b) Sea $r^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$. Sea

$$\vec{X} = \left(\frac{y}{r^2}, \frac{1-x}{r^2}, 3z\right)$$

Hallar el flujo de $\vec{X}$ a través del elipsoide $(x-1)^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ y a través del elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sugerencia: aplicar la parte a) con $\vec{W} = (0, 0, 3z)$.

Resp: $2\pi/3$, 2π

78. Probar la fórmula $\iiint_V (\vec{A} \cdot \nabla\varphi + \varphi\nabla \cdot \vec{A})dx\, dy\, dz = \iint_S \varphi\vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$, donde V es un volumen limitado por la superficie S, φ es una función escalar, y A un campo vectorial. Resp.: Aplicar el teorema de Gauss al vector $\varphi\vec{A}$.

79. Probar que si φ verifica la ecuación de Laplace (o sea, si $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$), el flujo de $\varphi\nabla\varphi$ a través de una superficie S es igual a la integral de $(\nabla\varphi)^2$ en el volumen V limitado por S. Sugerencia: aplicar el ejercicio anterior.

80. Buscar la condición que deben cumplir las constantes a, b, c para que el flujo del vector $(ax \cos y \cos z, b \operatorname{sen} y \cos z, c \cos y \operatorname{sen} z)$ sea nulo a través de la esfera de centro el origen y radio unidad. Resp.: $a + b + c = 0$.

81. Calcular primero directamente, y luego aplicando el teorema de Gauss, el flujo del vector $(0, 0, 5)$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z > 0$. Resp.: $5\pi R^2$ o su opuesto, según la orientación que se haya dado a la superficie.

EJERCICIOS SOBRE EL TEOREMA DE STOKES EN EL ESPACIO (Courant: sección 5.10) Y CAMPOS DE ROTORES.

82. Aplicando el teorema de Stokes, calcular la circulación de $(y, 2x, -1)$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$, $z = 1$. Resp.: 3π o su opuesto, según la orientación que se haya dado a la circunferencia.

83. Calcular la circulación de $(3x^2y - 3z + e^x \operatorname{sen} z, x^3, e^x \cos z - 3x)$ a lo largo de la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp.: 0 Sugerencia: calcular el rotor del campo.

84. Sea $\vec{X}$ un campo de clase C^1 definido en todo $\mathbb{R}^3$, tal que su primera componente es idénticamente nula, y su segunda componente $B(x, y, z)$ verifica $B(0, y, 0) = 3y^2$, $B(1, y, 0) = 8y^3$.

Hallar el flujo del rotor de X a través de la superficie con borde, parametrizada por:

$$\begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq 1 \\ y = v & 0 \leq v \leq 1 \\ z = uv(1-u)(1-v) & \end{cases}$$

orientada con la normal con tercera componente positiva.

Respuesta: 1

85. Siendo $\vec{A}$ un vector constante, y $\vec{X} = (x, y, z)$, probar que la circulación de $\vec{A} \wedge X$ a lo largo de una curva cerrada es igual a dos veces el flujo de $\vec{A}$ a través de un casquete de superficie limitado por la curva.

86. a) Probar que cualquiera que sea el campo vectorial $\vec{A}$ definido en un abierto cualquiera $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, es nulo el flujo de $\nabla \wedge \vec{A}$ a través de cualquier superficie acotada, cerrada y orientable, sin borde, contenida en Ω (aunque el interior de la superficie no esté totalmente contenido en Ω, y no pueda aplicarse el teorema de Gauss). Sugerencia: descomponer la superficie en casquetes con borde, limitados por curvas cerradas. Aplicando el teorema de Stokes a cada casquete, el flujo del rotor de $\vec{A}$ en cada uno es igual a la circulación de $\vec{A}$ a lo largo de su curva borde, con orientación apropiada, de forma que la suma de las circulaciones en esas curvas se cancelan.

b) Aplicar la parte anterior para deducir que si $\vec{X}$ es un campo de rotores en $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, entonces es nulo el flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier esfera contenida en Ω, aunque deje $(0, 0, 0)$ en su interior.

c) Demostrar que todo campo de rotores es solenoidal.

d) Demostrar que no todo campo solenoidal es de rotores. (Sugerencia: Sirve como ejemplo el campo $q\vec{X}/r^3$ del ejercicio 56). Demostrar que no toda dos-forma cerrada es exacta (en una abierto cualquiera). (Sin embargo, toda dos-forma cerrada en todo $\mathbb{R}^3$ es exacta en $\mathbb{R}^3$, porque todo campo solenoidal en todo $\mathbb{R}^3$ es de rotores en $\mathbb{R}^3$).

87. Sea $\vec{X}$ el campo del ejercicio 75. Demostrar que $\vec{X}$ no es un campo de rotores en Ω (Sugerencia: Aplicar los ejercicios 75 y 86).

88. Demostrar que no existe ningún campo solenoidal en $I\!R^3 - \{(0,0,0)\}$ con primera componente igual a $3x$, segunda componente que se anula en los planos $|y| = 1$ y tercera componente que se anula en los planos $|z| = 1$. (Sugerencia: Si existiera $\vec{X}$, entonces calcular su flujo a través de un cubo como en el ejercicio 75, y a través de la superficie frontera del prisma $\{|x| \leq 2,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1\}$. Aplicar el ejercicio 72).

89. a) Se da el campo

$$\vec{X} = \left(\frac{x(1 - 4x^2 - 4y^2)}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2},\ 4z \right)$$

Verificar que es solenoidal en $\Omega = I\!R^3 - \{x = 0,\ y = 0\}$. Calcular el flujo de $\vec{X}$ a través de la superficie cilíndrica $\{x^2 + y^2 = 1,\quad -1 \leq z \leq 1\}$ y a través de la parte de la superficie esférica $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$.

Resp: -4π y -4π.

b) Demostrar que el flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier superficie cerrada, acotada y sin borde contenida en Ω, es cero. (Sugerencia: Toda superficie cerrada, acotada, sin borde, contenida en Ω tiene todo su interior contenido en Ω, porque Ω es todo el espacio menos una recta. (Esta propiedad no vale si Ω fuera por ejemplo todo el espacio menos un punto). Entonces, aplicando el teorema de Gauss, el flujo es cero.

c) Demostrar que $\vec{X}$ es un campo de rotores en Ω. Sugerencia: Hallar el rotor de $(yz/(x^2 + y^2),\ \ 4xz - [xz/(x^2 + y^2)],\ \ 0)$.

EJERCICIOS SOBRE ECUACION DE LAPLACE Y ECUACIONES DE MAXWELL.

90. Sea la función escalar

$$\phi(x, y, z) = 2 \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

definida en el abierto $\Omega = I\!R^3 - \{x = 0,\ y = 0\}$.

a) Verificar que Φ es armónica.

b) Hallar la integral de ϕ sobre la esfera de radio 1 y centro en (2,0,0).

c) Calcular el flujo de $\nabla\phi$ a través de la superficie lateral del cilindro circular $x^2 + y^2 = 1,\quad -1 \leq z \leq 1$, con la normal en el sentido opuesto al que apunta al eje de las z.

d) Hallar el flujo de $\nabla\phi$ a través de una superficie cerrada y acotada del espacio que no intersecta al eje de las z.

e) Hallar el flujo de $\nabla\phi$ a través de la superficie lateral del "barril"generado por la curva $\{x = 0, \quad y = 2 - z^2, \quad -1 \leq z \leq 1\}$ al girar alrededor del eje de las z, orientada con la normal en el sentido opuesto al que apunta al eje de las z.

Resp: b)$8\pi \log 2$, c) 8π, d) 0, e) 8π.

91. a) Encontrar una función armónica u definida en el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ tal que sobre la circunferencia del borde $x = \cos\alpha, \quad y = \operatorname{sen}\alpha$, toma el valor

$$u(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \operatorname{sen}\alpha + \cos 2\alpha, \qquad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

b) Demostrar que la función hallada u es la única que verifica las condiciones pedidas.

Resp: a) $u = y + x^2 - y^2$. b) Si hubiese dos funciones u_1 y u_2, aplicar la primera identidad de Green a $U = V = u_1 - u_2$ para deducir que $u_1 - u_2$ es idénticamente nula en el círculo, sabiendo que lo es en su borde.

92. a. Sean E y H dos campos definidos en todo $I\!R^3$. Verificar que

$$\nabla \cdot (E \wedge H) = H \cdot \nabla \wedge E - E \cdot \nabla \wedge H$$

b. Los campos E y H (campo eléctrico y de inducción magnética respectivamente), dependen diferenciablemente de t y verifican las siguientes ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\operatorname{rot}E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

$$\operatorname{rot}H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \qquad (7)$$

donde c es constante.

Probar que

$$\operatorname{div}(E \wedge H) = -\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(H \cdot H + E \cdot E)$$

c. Siendo el campo eléctrico

$$E(x, y, z, t) = (\operatorname{sen} 4\pi u, \cos 4\pi u, 0), \quad \text{donde } u = z - ct$$

hallar el campo de inducción magnética H sabiendo que en el instante $t = 0$ tiene tercera componente nula y es ortogonal al campo eléctrico E.

d. Dibujar el campo H hallado en los puntos del eje de las z, para

$$t = 0, \;\; t = \frac{1}{16c}, \;\; t = \frac{1}{8c}, \;\; t = \frac{3}{16c}$$

Observar que la proyección del dibujo, sobre el plano $x0z$ es una onda sinusoidal.

e. Encontrar para cada instante t los puntos $(0,0,z)$ tales que $H(0,0,z,t) = (1,0,0)$. Se determinarán funciones diferenciables $z_1(t)$, $z_2(t)$, $\ldots z_n(t)$, $\ldots$, para cada punto $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ encontrado. (Estos puntos corresponden a las "crestas"de la onda). Calcular la velocidad de propagación $\dot{z}(t)$, y la longitud de onda (distancia entre dos crestas consecutivas).

Resp:c) $H = (-\cos 4\pi u, \operatorname{sen} 4\pi u, 0)$

e) $z_n(t) = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} + ct$, $\qquad \dot{z}(t) = c$, $\qquad z_{n+1} - z_n = \frac{1}{2}$ (longitud de onda).