REPARTIDO DE EJERCICIOS DE CALCULO III

Versión del año 2001.

Este repartido incluye:
Contenido del curso teórico y práctico.
Lista de Ejercicios.
Instrucciones para los parciales.
Ejemplos para los parciales.
Instrucciones para los exámenes.
Ejemplo de examen.

Contenido del curso teórico y práctico.

Los temas incluidos para el **primer parcial** de CALCULO III son:

- CURVAS PLANAS. Courant-John, vol. I, sección 4.1 literales a) hasta k) incluido, excepto i).
- CURVAS EN EL ESPACIO. Courant, vol II, sección 2.5 literal d).
- FORMAS DIFERENCIALES E INTEGRALES CURVILINEAS. Courant, vol. II, secciones 1.9 y 1.10 completas.
- CAMPOS VECTORIALES. Courant, vol II, sección 2.5 literales a), b) y c).
- TEOREMAS DE GAUSS, STOKES Y FORMULAS DE GREEN EN EL PLANO. Courant, vol II, secciones 5.1, 5.2, 5.3 y 5.6.
- SUPERFICIES. Courant, vol II, sección 3.4 literal a).

- Los ejercicios del repartido del curso que van para el primer parcial son del 1 hasta el 49. (También los 20 ejercicios de múltiple opción incluidos en los dos ejemplos de Primer Parcial).

Los temas incluidos para el **segundo parcial** de CALCULO III son:

- Area de superficie. Courant, vol. II, sección 4.8 c).
- Orientación de superficies. Courant, vol II, sección 5.7.
- Formas diferenciales alternadas, producto exterior y derivada exterior. Courant, vol. II, sección 3.6.
- Integración sobre superficies. Courant, vol II, sección 5.8.
- Teorema de Gauss y fórmulas de Green en el espacio. Courant, vol. II, sección 5.9.
- Teorema de Stokes en el espacio. Courant, vol. II, sección 5.10.
- Ecuación de Laplace. Courant, vol. II, sección 6.7 d) y e).
- Ecuación de ondas y ecuaciones de Maxwell. courant, vol II, sección 6.8.
- Los ejercicios del repartido que van para el segundo parcial son del 50 al final. (También los 20 ejercicios de múltiple opción incluidos en los dos ejemplos de Segundo Parcial).

EJERCICIOS DE CURVAS. (Courant vol 1, sección 4.1)

En los próximos ejercicios, el esbozo de las curvas será solo un croquis, sin necesidad de estudiar curvatura (concavidad) ni asíntotas, a menos que se pida expresamente.

1. Encontrar para cada una de las curvas planas paramétrizadas que se dan a continuación, una ecuación implícita y dibujar las curvas, orientadas cuando es posible, para t creciente:

    a) $x = at + b$, $x = ct + d$, $t \in I\!R$, $a, c > 0$.

    b) $x = a\mathrm{cosh}t$, $y = b\mathrm{senh}t$, $t \in I\!R$, $a, b > 0$.

    c) $x = \cos t$, $y = 0$, $t \in I\!R$

    d) $x = a\mathrm{sec}t$, $y = b\mathrm{tan}t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$, $a, b > 0$.

    Respuestas:

    a) $ay - cx = ad - bc$. Una recta, recorrida en sentido de x e y crecientes.

    b) $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1; x > 0$. La rama derecha de una hipérbola, recorrida en sentido creciente de y.

    c) $y = 0; |x| \leq 1$. El segmento con extremos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, recorrido infinitas veces en un sentido y el opuesto alternadamente.

    d) $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$. Son dos curvas, una en cada intervalo donde varía t: primero se recorre la rama derecha de una hipérbola, en sentido de y creciente, y luego su rama izquierda, recorrida en sentido decreciente de y.

2. Ver Blank 4.1 c ej. 3 (a),(b). En la parte (a) estudiar asíntotas. En la parte (b) tomar $a = 1$ y $b = 1/2$. Estudiar concavidad en la parte (b).

3. Ver Blank 4.1 d ej. 1 (a),(b),(d),(f).

4. Ver Blank 4.1 e ej. 1 (a),(b).

5. Croquizar la curva plana parametrizada por:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2 \\ x = sen(t - \pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \leq \pi \\ y = \mathrm{sen}^3 t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2 \\ y = cos(t - \pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \leq \pi \end{cases}$$

    Hallar su longitud. Resp: $(3 + \pi)/2$

6. Ver Blank 4.1 f Probl. 1 Solo la parte que pide demostrar que la segunda curva dada no es rectificable (más precisamente, que la integral impropia que queda para calcular su longitud es divergente a $+\infty$, brevemente se dice que la longitud de la curva es ∞).

7. Ver Blank 4.1 g ej. 1 (a),(c).

8. Ver Blank 4.1 h ej. 1. La respuesta en el Blank está equivocada. Allí se expone la ecuación de la circunferencia osculatriz por el punto $x = 0$. La que corresponde al punto $x = 1$ es la circunferencia
$$\left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + (x+4)^2 = \frac{125}{4}$$

9. Ver Blank 4.1 h ej. 4.

10. Ver Blank 4.1 k ej. 1

11. Ver Blank 4.1 k ej. 3.

EJERCICIOS SOBRE INTEGRALES CURVILINEAS. (Courant volumen 2, secciones 1.9 y 1.10).

12. Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$ donde C es el arco de la parábola $y = x^2$ que va del punto $(1,1)$ al punto $(2,4)$.

    Resp.: 1219/30.

13. Calcular $\int_C (2a - y)\,dx + x\,dy$ donde C es el primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ recorrido en el sentido de los valores crecientes de t.

    Resp.: $-2\pi a^2$

14. Calcular $\int_C 2xy\,dx - x^2\,dy$ sobre los caminos que van del punto $O(0,0)$ al $A(2,1)$:

    a) Sobre el segmento de recta que une los dos puntos.

    b) Sobre la parábola cuyo eje de simetría es Oy.

    c) Sobre la parábola cuyo eje de simetría es Ox.

    d) Sobre la quebrada OBA siendo $B(2,0)$.

    e) Sobre la quebrada OCA siendo $C(0,1)$.

    Resp.: $4/3, 0, 12/5, -4, 4$.

15. Calcular $\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy$ sobre los caminos que se indican en el ejercicio anterior.

    Resp.: 4

16. EJERCICIO DEL VOLUMEN 2 DEL COURANT Y JOHN: Ver Courant y John, vol II, punto 1.9 b ej. 1.

    EJERCICIOS DE INTEGRALES CURVILÍNEAS, POTENCIALES ESCALARES, UNO-FORMAS EXACTAS O CAMPOS DE GRADIENTES. (Courant vol. 2, sec. 1.9 y 1.10).

17. Sea el campo vectorial $\bar{X} : U(\subset R^2) \mapsto R^2$ definido como

$$\bar{X} = \left(\frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

    donde $U = R^2 - \{(0,0)\}$

    a) Mostrar que $f(x,y) = (x+y)/(x^2+y^2)$ es un potencial escalar de $\bar{X}$ en el dominio U.

    b) Calcular la circulación de $\bar{X}$ a lo largo de la circunferencia de radio 1, centrada en el origen, orientada en sentido antihorario.

c) Calcular la circulación de $\bar{X}$ a lo largo de la elipse $\alpha(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Resp: a) Verificar que $\bar{X} = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$. b) cero c) cero.

18. En el plano xOy se consideran los puntos $A(1,0)$ y $B(0,1)$. Calcular $\int_C x^2\,dy - y^2\,dx$ sobre el segmento AB y sobre el arco AB de la circunferencia de centro O (cuarto de circunferencia).

    Resp.: 2/3, 4/3.

19. Calcular $\int_C y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$ sobre el arco AB del ejercicio anterior. Calcular dicha integral sobre la cuerda AB. La expresión $y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$, ¿es diferencial de una función $u(x,y)$? Hallar las funciones $h(x)$ tal que $h(x)y^2\,dx + h(x)(x^2 - 2xy)\,dy$ sea el diferencial de una función $u(x,y)$. Hallar las funciones $u(x,y)$.

    Resp.: -2/3, -1/3, No (si existiera, sería $u_{xy} = u_{yx}$), $h(x) = kx^{-2}$, $u(x,y) = ky - (ky^2/x)$+cte..

20. Se considera la integral curvilínea $\int_C [y(1 - x^2 + y^2)\,dx + x(1 + x^2 - y^2)\,dy]/(1 + x^2 + y^2)^2$. Mostrar que esta integral no depende del camino, sólo de los puntos iniciales y finales. Hallar una función cuyo diferencial sea la forma correspondiente. Calcular la mencionada integral sobre una curva que une los puntos $(1,1)$ y $(3,2)$.

    Resp.: La forma es el diferencial de $xy/(1 + x^2 + y^2)$. (Para hallarla, calcular la integral de la forma sobre p. ej. una curva adecuada que una el punto $(0,0)$ y un punto genérico (a,b).

21. Hallar una función cuyo diferencial sea $[(1-y^2)\,dx + (1-x^2)\,dy]/(1+xy)^2$. Calcular $\int_C [(1-y^2)\,dx + (1-x^2)\,dy]/(1+xy)^2$ sobre una curva como la del ejercicio anterior, supuesto que está en el primer cuadrante.

    Resp.: $(x+y)/(1+xy)$, -2/7

22. Sea $\vec{X}$ un campo irrotacional en $\Omega = I\!R^2 - \{(x_0, y_0)\}$ y sea I su circulación a lo largo de la circunferencia de centro $\{(x_0, y_0)\}$ y radio 1, orientada en sentido antihorario.

    a) Demostrar que es cero la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de cualquier curva cerrada que no dé ninguna vuelta alrededor del punto $\{(x_0, y_0)\}$. (Sugerencia: La curva está contenida en algún subconjunto abierto simplemente conexo, donde X es irrotacional).

    b) Demostrar que es igual a I la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de cualquier curva cerrada que dé una sola vuelta alrededor del punto $\{(x_0, y_0)\}$ en sentido antihorario. (Sugerencia: Cortar la curva dada y la circunferencia con una recta r que pase por $\{(x_0, y_0)\}$, y agregar segmentos de esta recta que vayan de la curva a la circunferencia, recorridos dos veces, primero en un sentido y luego en el otro. La circulación en la curva dada menos la de la circunferencia es igual a la suma de las circulaciones en dos curvas cerradas que no dan vuelta alrededor del origen. Cada curva cerrada está formada por un arco de la curva dada, un arco de circunferencia y dos o más segmentos, de forma de quedar totalmente contenida en uno de los dos semiespacios determinados por la recta r. Aplicar la parte a)).

c) Demostrar que si $I = 0$ (sabiendo que $\vec{X}$ es irrotacional en $\mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$) entonces $\vec{X}$ es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$. (Sugerencia: Demostrar, usando las partes a) y b), que es cero la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de toda curva cerrada que no pase por (x_0, y_0)).

23. a) Calcular $\int_C [(x+y)\,dx - (x-y)\,dy]/(x^2+y^2)$ sobre la circunferencia $x^2+y^2 = a^2$ recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Resp.: -2π.

b) Demostrar que la integral $\int_C [(x+y)\,dx - (x-y)\,dy]/(x^2+y^2)$ a lo largo de cualquier curva cerrada que no pase por el origen y que no encierre al origen en su interior es cero.

c) Demostrar que la integral $\int_C [(x+y)\,dx - (x-y)\,dy]/(x^2+y^2)$ a lo largo de cualquier curva $\mathcal{C}$ cerrada simple, que no pase por $(0,0)$, orientada en sentido antihorario, y que dé una sola vuelta alrededor de $(0,0)$, es igual a -2π.

d) Calcular la integral $\int_C (x+y)/(x^2+y^2)\,dx + (y-x)/(x^2+y^2)\,dy$ sobre las curvas que se indican en la figura 1.

Resp.: 0, $-2\pi + \log 2$, $-4\pi + \log 2$.

24. Calcular $\int_C [x\,dy - y\,dx]/(x^2+y^2)$ sobre la curva que se indica en la figura 2. 2.

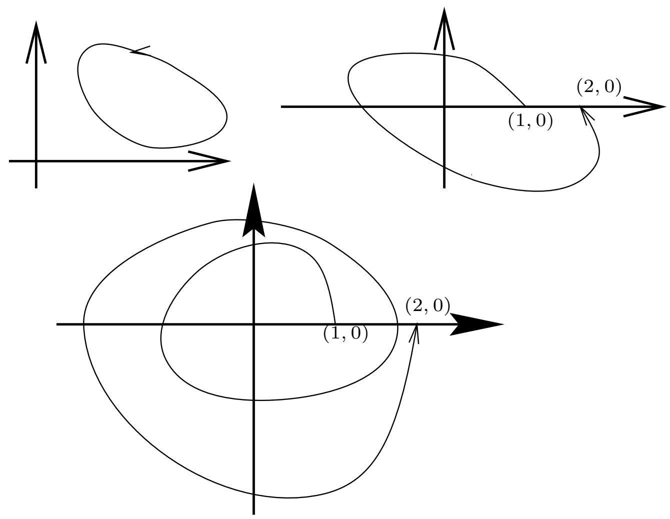

Figura 1:

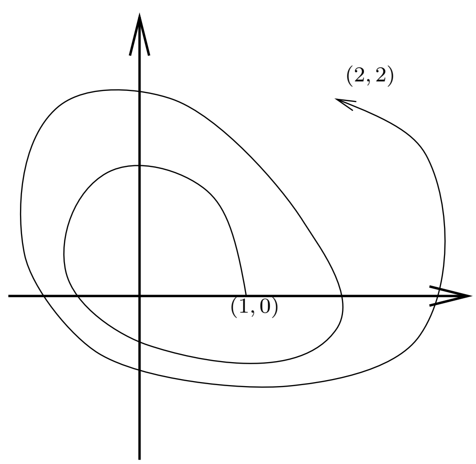

Figura 2:

Resp.: $17\pi/4$.

25. a) Probar que a lo largo de cualquier curva C cerrada, se cumple $\int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$.

    b) Probar que el campo
$$\vec{X} = \frac{1}{r^3}(x, y, z)$$
    definido en $\Omega = I\!R^3 - \{(0,0,0\}$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es de gradientes en Ω.

26. Sea $\vec{X} = \vec{Y} + \vec{Z}$ un campo definido en $I\!R^2$ excepto en dos puntos P y Q. Se sabe que $\vec{Y}$ es irrotacional en $I\!R^2 - \{P\}$ y $\vec{Z}$ es irrotacional en $I\!R^2 - \{Q\}$.

    a) Demostrar que la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de cualquier curva cerrada simple que no pase por P ni por Q, orientada en sentido antihorario, es:

    Cero, si la curva deja a P y a Q en su exterior.

    Igual a la circulación p de $\vec{Y}$ a lo largo de cualquier circunferencia que rodee a P dejando solo a Q en el exterior, si la curva dada también lo hace.

    Igual a la circulación q de $\vec{Z}$ a lo largo de cualquier circunferencia que rodee a Q dejando solo a P en el exterior, si la curva dada también lo hace.

    Igual a la suma $p + q$ de los dos casos anteriores, si la curva dada deja a P y a Q en su interior.

    (Las circunferencias se consideran orientadas en sentido antihorario).

    b) Hallar la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de una curva cerrada, no simple, que da tres vueltas en sentido antihorario alrededor de P, y luego dos vueltas en sentido horario alrededor de Q. Resp: $3p - 2q$.

    c) Demostrar que si $p = q = 0$ entonces $\vec{X}$ es campo de gradientes.

    d) Hallar la circulación de
$$\vec{X} = \left(\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2},\ \frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2} - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\right)$$
    a lo largo de una curva cerrada que no pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ y das tres vueltas en sentido antihorario alrededor de $(-1,0)$ y dos vueltas en sentido horario alrededor de $(1,0)$. Resp: -24π.

27. (Ejemplos parecidos a los de parciales y exámenes de 1998 y 1999). Se dan los campos:
$$\vec{X} = \left(\frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2},\ \frac{2(1-x)y}{((x-1)^2+y^2)^2}\right)$$

$$\vec{Y} = \left(\frac{(y-4)^2}{8} + \frac{y}{(x-1)^2+y^2},\ \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2} \right)$$

$$\vec{Z} = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2},\ \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \right)$$

definidos en $\Omega = I\!\!R^2 - \{(1,0)\}$.

Sean las circunferencias:

$\mathcal{C}_0 = \{x^2 + y^2 = 2\}$,

$\mathcal{C}_1 = \{(x-1)^2 + y^2 = 2\}$,

$\mathcal{C}_2 = \{x^2 + (y-4)^2 = 2\}$,

recorridas una sola vez en sentido antihorario.

a) Hallar, las circulaciones de X, Y y Z a lo largo de las tres circunferencias dadas. (Sugerencia: Estudiar los rotores de los campos. Calcular las circulaciones directamente sólo a lo largo de $\mathcal{C}_1$ y además calcular las circulaciones del campo $(y-4)/8,\ 0)$ en las tres circunferencias. Los valores de todas las integrales pedidas pueden deducirse a partir de esos cálculos).

Resp: Las tres integrales de X dan cero; las de Y también; y las de Z son 2π, 2π y 0.

b) Uno de los tres campos dados es de gradientes en Ω. Otro no es de gradientes en Ω pero lo es en el abierto $I\!\!R^2 - \{x \leq 22\}$. Otro no es de gradientes en Ω ni en ningún subconjunto abierto de Ω. Distinguir cuál es cual y demostrar las afirmaciones anteriores.

Resp: X, Z e Y en ese orden.

28. Demostrar que si un campo es irrotacional en todo $I\!\!R^3$ excepto en una recta r, entonces la circulación del campo a lo largo de cualquier curva cerrada que dé una vuelta alrededor de la recta r (con alguna orientación), es igual (en valor absoluto) a la circulación a lo largo de cualquier circunferencia que dé una vuelta alrededor de la recta r. (Sugerencia: Tomar un plano Π que contenga r, y considerar dos curvas cerradas: una, formada por los arcos de la curva dada y de la circunferencia que quedan en uno de los semiespacios de $I\!\!R^3 - r$, agregando segmentos apropiados en el plano Π para cerrar la curva; la otra análoga, pero en el otro semiespacio. La suma de las integrales en ambas curvas cerradas, orientadas apropiadamente, es igual a la diferencia de la integral en la curva dada menos en la circunferencia. Basta demostrar que las integrales en cada una de las curvas cerradas es nula. Para ello observar que ellas están contenidas en sendos subconjuntos abiertos simplemente conexos, contenidos estrictamente en $I\!\!R^3 - r$.)

29. Sean las formas diferenciales lineales:

$$L_1 = \frac{-x^2+y^2-2xz}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y(x+z)}{x^2+y^2}\,dy - \frac{1}{x^2+y^2}\,dz$$

$$L_2 = \left(\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy + \frac{-1}{x^2+y^2}\,dz$$

$$L_3 = \frac{-x^2+y^2+2x(y-z)}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{-x^2+y^2-2y(x+z)}{(x^2+y^2)^2}\,dy + \frac{1}{x^2+y^2}\,dz$$

definidas en $\Omega = I\!R^3 - \{x=0, y=0\}$.

Sean las circunferencias:

$\mathcal{C}_0 = \{z=0,\ x^2+y^2=1\}$,

$\mathcal{C}_1 = \{z=1,\ (x-1)^2+y^2=4\}$,

$\mathcal{C}_2 = \{z=3,\ (x-2)^2+y^2=1\}$,

recorridas una sola vez con alguna orientación que se elegirá.

a) Hallar, (en valor absoluto) las integrales de L_1, L_2 y L_3 a lo largo de las tres circunferencias dadas. (Sugerencia: Estudiar los rotores de los campos asociados a las uno-formas dadas, y para ahorrarse algunos cálculos, usar los resultados del ejercicio 28).

Resp: Las tres integrales de L_1 dan cero; las de L_2 son 2π, 2π y 0; y las de L_3 son cero.

b) Una de las tres formas diferenciales dadas es exacta en Ω. Otra no es exacta en Ω pero es exacta en el abierto $I\!R^3 - \{x \geq 0,\ y=0\}$. Otra no es exacta en Ω ni en ningún subconjunto abierto de Ω. Distinguir cuál es cual y demostrar las afirmaciones anteriores.

Resp: L_3, L_2 y L_1 en ese orden.

EJERCICIOS DE NOCIONES VECTORIALES (Courant vol 2, sección 2.5)

30. Ver Courant y John, vol II, punto 2.5 ej. 2.

31. Ver Courant y John, vol II, punto 2.5 ej. 3, con la siguiente aclaración y corrección: $U = (U_1, U_2, U_3)$ y $V = (V_1, V_2, V_3)$ son campos vectoriales. El símbolo diferencial $\partial/\partial x$ cuando se aplica a un campo V, da como resultado otro campo:

$$\frac{\partial}{\partial x}V = \left(\frac{\partial}{\partial x}V_1, \frac{\partial}{\partial x}V_2, \frac{\partial}{\partial x}V_3\right)$$

El operador

$$U \cdot \nabla = U_1\frac{\partial}{\partial x} + U_2\frac{\partial}{\partial y} + U_3\frac{\partial}{\partial z}$$

se aplica a un campo vectorial V y da como resultado otro campo:

$$U \cdot \nabla V = U_1 \frac{\partial}{\partial x} V + U_2 \frac{\partial}{\partial y} V + U_3 \frac{\partial}{\partial z} V$$

Se pide demostrar las igualdades de la sección 2.5, ejercicio 3, partes a) y b), sin modificaciones.

32. Ver Courant y John, vol II, punto 2.5 ej. 4.

33. Calcular $\nabla \wedge (P - O)$.

    Calcular $\nabla \wedge \vec{v}$ siendo $\vec{v} = (xyz, x^2y^2z, yz^3)$.

    Calcular $\nabla \wedge \nabla f$ siendo $f : I\!R^3 \mapsto I\!R$ con derivadas segundas continuas.

    Calcular $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{v})$ siendo $\vec{v} : I\!R^3 \mapsto I\!R^3$ con derivadas segundas continuas.

    Resp.: (0,0,0), $(z^3 - x^2y^2, xy, 2xy^2z - xz)$, (0,0,0), 0.

    EJERCICIOS SOBRE INTEGRALES MULTIPLES.

34. Al calcular por medio de integrales iteradas el volumen V limitado por encima por la superficie $z = f(x, y)$ y por la parte inferior por una cierta región S del plano xy, se ha llegado a la siguiente suma de integrales iteradas: $V = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} f(x, y)\, dy + \int_2^8 dx \int_x^8 f(x, y)\, dy$. Dibujar la región S y expresar el volumen V mediante una integral iterada en la que el orden de integración esté invertido.

    Resp.: $\int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^y f(x, y)\, dx + \int_4^8 dy \int_2^y f(x, y)\, dx$.

35. Transformar la siguiente integral doble a coordenadas polares, y calcular su valor.
    $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\, dy$

    Resp.: $3\pi a^4/4$.

36. Utilizar una transformación lineal para calcular la siguiente integral doble: $\iint_S (x - y)^2 \operatorname{sen}^2(x + y)\, dx\, dy$, donde S es el paralelogramo de vértices $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi), (0, \pi)$.

    Resp.: $\pi^4/3$.

    EJERCICIOS SOBRE LOS TEOREMAS DE GAUSS, DE STOKES Y FORMULAS DE GREEN EN EL PLANO (Courant vol 2, secciones 5.1, 5.2, 5.3 y 5.6).

37. Usando el teorema de Gauss en el plano:

Si R es una región abierta acotada del plano, cuyo borde es una curva $\mathcal{C}$ cerrada orientada de forma que deja a R siempre del lado izquierdo, entonces:

$$\int\int_R (f_x + g_y)\, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}} f\, dy - g\, 372dx$$

calcular

$$\int_{\mathcal{C}_1} e^y dx + xe^y dy$$

a lo largo de la semicircunferencia $\mathcal{C}_1$: $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq \pi$, orientada según t creciente.

Respuesta: -2

38. Usando el teorema de Stokes en el plano:

    Si R es una región abierta acotada del plano, cuyo borde es una curva $\mathcal{C}$ cerrada orientada de forma que deja a R siempre del lado izquierdo, entonces:

    $$\int\int_R (B_x - A_y)\, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}} A\, dx + B\, dy$$

    calcular

    $$\int\int_R (1 - x)\, dx\, dy$$

    en la región R del plano, encerrada por la curva: $x = \cos t, y = \operatorname{sen} 2t, -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

    Respuesta: $-\pi/4 + 4 - 8/3$.

39. Usando el teorema de Stokes en el plano, hacer de nuevo el ejercicio 22 y la parte a) del ejercicio 26.

40. a) Sean $\vec{X}$ y $\vec{W}$ dos campos definidos en $\Omega = I\!R^2 - \{(x_0, y_0)\}$ tales que sus rotores coinciden en Ω. Probar que son iguales las circulaciones de $\vec{X}$ y de $\vec{W}$ a lo largo de cualquier curva cerrada simple contenida en Ω que no deje al punto (x_0, y_0) en su interior.

    Probar que la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ cerrada, simple que da una vuelta en sentido antihorario alrededor de (x_0, y_0) es igual a la circulación de $\vec{W}$ a lo largo de $\mathcal{S}$ más la circulación de $\vec{X} - \vec{W}$ a lo largo de la circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio 1, orientada en sentido antihorario.

    b) Calcular las circulaciones del campo

    $$\vec{X} = \left(\frac{2 - y}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \; , \; 4x^2 + \frac{x}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right)$$

a lo largo de la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ y de las elipses $x^2+16y^2=1$ y $(x-1)^2+16(y-2)^2=1$, orientadas en sentido antihorario. (Sugerencia: aplicar la parte a) con $\vec{W}=(0,4x^2)$)

Resp: 6π, cero y 3π.

41. Sean las funciones escalares $u=xy$, $w=x^2+y^2$, definidas en todo $\mathbb{R}^2$. Sea R el interior del cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1), (0,1). Sea $\mathcal{C}$ el borde de R, orientado en sentido antihorario.

   a) Calcular

$$I_1=\iint_R u\Delta w\,dx\,dy$$

$$I_2=\iint_R w\Delta u\,dx\,dy$$

$$I_3=\iint_R(\nabla u)\cdot(\nabla w)\,dx\,dy$$

   b) Usando la primera fórmula de Green, calcular:

$$I_4=\int_{\mathcal{C}}(u\nabla w)\cdot\vec{n}\,ds$$

$$I_5=\int_{\mathcal{C}}(w\nabla u)\cdot\vec{n}\,ds$$

   c) Verificar la segunda fórmula de Green, es decir:

$$\iint_R(u\Delta w-w\Delta u)dxdy=\int_{\mathcal{C}}(u\nabla w-w\nabla u)\cdot\vec{n}\,ds$$

   Respuestas: $I_1=1, I_2=0, I_3=1, I_4=2, I_5=1, I_1-I_2=I_4-I_5$.

42. Ver Courant y John, vol. II, punto 5.2 ej. 1 (a),(b).

43. Ver Courant y John, vol. II, punto 5.2 ej. 2

   EJERCICIOS DE SUPERFICIES (Courant vol. 2, sección 3.4 a)).

44. Ver Courant y John, vol II, punto 3.4 a ej. 1 (a),(b).

45. Ver Courant y John, vol II, punto 3.4 a ej. 2.

46. Ver Courant y John, vol II, punto 3.4 a ej. 3.

47. Ver Courant y John, vol II, punto 3.4 a ej. 4.

48. Sea la superficie parametrizada por:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u^2+e^v \\ & & \qquad\qquad -1<u<1 \\ y & = & ue^v \\ & & \qquad\qquad -1<v<1 \\ z & = & ue^v+v^2 \end{array}\right.$$

Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (1,0,0).

Resp: $y-z=0$

49. a) Calcular la primera forma fundamental en los puntos regulares de la superficie parametrizada por:

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & u & -2\le u\le 2 \\ y & = & (2-|u|)\cos v & 0\le v\le 2\pi \\ z & = & (2-|u|)\operatorname{sen} v & \end{array}\right.$$

Resp: $(ds)^2=\sqrt{2}(du)^2+(2-|u|)^2(dv)^2$ si $u\neq 0$. En los puntos de S donde se anula x (o sea $u=0$) la superficie no es diferenciable, y por lo tanto esos puntos no son regulares. Los demás puntos son regulares.

b) Dibujar un bosquejo de la superficie dada en la parte anterior.

Hasta aquí son los ejercicios cuyos temas están incluidos en el primer parcial.

EJERCICIOS SOBRE INTEGRALES DE SUPERFICIE. (Sección 5.8 Courant vol. 2)

50. Hallar el área de la superficie

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & 2u\operatorname{sen} v & 0\le v\le \pi/2 \\ y & = & 2u\cos v & 0\le u\le 1 \\ z & = & e^{-u}+e^{u} & \end{array}\right.$$

Resp: $2\pi(1-e^{-1})$

51. Se da la superficie $\mathcal{S}$ parametrizada por

$$\begin{array}{lcl} x & = & x_0+r\operatorname{sen}\theta \\ y & = & y_0+(a+r\cos\theta)\cos\phi \\ z & = & z_0+(a+r\cos\theta)\operatorname{sen}\phi \end{array}$$

con los parámetros ϕ, θ variando en el triángulo:

$$\{0 \leq \theta \leq \pi, \theta \leq \phi \leq 2\theta\}$$

Calcular el área de $\mathcal{S}$.

Resp: $r(a\pi^2/2 - 2r)$

52. Calcular la integral $\iint_{\mathcal{S}} f\, dS$ de la función escalar $f(x, y, z) = 2y(x^2+1)^{-1}(1+4z)^{-1/2}$ sobre la superficie

$$\mathcal{S} = \{z = x^2 + y^2, |y| < 1\}$$

Resp: cero

53. Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada en $I\!R^3$, simétrica respecto al plano $z = 0$. Sea $\mathcal{S}_1$ la intersección de $\mathcal{S}$ con el semiespacio $z \geq 0$ y sea $\mathcal{S}_2$ su simétrica respecto al plano $z = 0$.

   a. f es una función escalar tal que $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$. Probar que $\iint_{\mathcal{S}} f\, dS = 0$.
   (Sugerencia: La integral en S es la suma de las integrales en S_1 y en S_2. Parametrizada S_1 con ecuaciones $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ con $(u, v) \in D$, se puede parametrizar S_2 con las ecuaciones $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = -\chi(u, v)$ en función de las mismas variables $(u, v) \in D$. La integral de f en S_1 se calcula como una integral doble con (u, v) variando en el dominio D. La integral en S_2 también se calcula como integral doble en el mismo dominio D, pero la función integrando, que depende de (u, v), es f compuesta con la parametrización de S_2, y resulta la opuesta de f compuesta con la parametrización de S_1. Entonces la integral de f en S_2 es opuesta a la integral de f en S_1, y su suma da cero.)

   b. g es una función escalar tal que $g(x, y, z) = g(x, y, -z)$. Probar que $\iint_{\mathcal{S}} g\, dS = 2 \iint_{\mathcal{S}_1} g\, dS$.

   c. $\vec{X} = (a, b, c)$ es un campo tal que

$$\begin{aligned} a(x, y, -z) &= -a(x, y, z) \\ b(x, y, -z) &= -b(x, y, z) \\ c(x, y, -z) &= c(x, y, z) \end{aligned}$$

   Probar que el flujo de $\vec{X}$ a través de $\mathcal{S}$ es cero.
   (Sugerencia: Llamar $f(x, y, z)$ al producto escalar de $\vec{X}$ por el versor normal N a la superficie en el punto (x, y, z). Observar que al simetrizar el punto (x, y, z) respecto al plano $z = 0$, el versor normal también se simetriza, es decir, sus dos primeras componentes no cambian pero la tercera cambia de signo. Deducir que $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ y aplicar la parte [a.].)

d. $\vec{Y} = (a, b, c)$ es un campo tal que

$$\begin{aligned} a(x, y, -z) &= a(x, y, z) \\ b(x, y, -z) &= b(x, y, z) \\ c(x, y, -z) &= -c(x, y, z) \end{aligned}$$

Probar que el flujo de $\vec{Y}$ a través de $\mathcal{S}$ es el doble del flujo de $\vec{Y}$ a través de $\mathcal{S}_1$.

e. Hallar el flujo del campo

$$\vec{X} = (x^2 z^5, y^6 + z, x^3)$$

a través de la esfera de centro en el origen y radio 1, con la normal saliente. (Sugerencia: usar simetría respecto al eje de las z, es decir observar que cambiando el signo de x e y y dejando igual a z, las primeras dos componentes del campo $\vec{X}$ no cambian, pero la tercera componente cambia de signo. En cambio, si N es el versor normal a la superficie en el punto (x, y, z), al simetrizar el punto respecto al eje de las z, el versor N se simetriza también respecto a ese eje, es decir, sus dos primeras componentes cambian de signo y su tercera componente queda igual. Usar ahora un razonamiento análogo al de las partes [c.] y [a.].)

Resp: parte e.) cero.

54. Sea $\mathcal{S}$ una superficie cerrada acotada en $I\!R^3$ orientada con la normal $\vec{n}$ saliente. Se demostrará más adelante, como aplicación del Teorema de Gauss en el espacio, que el VOLUMEN de la región del espacio encerrada por $\mathcal{S}$ es igual a un tercio del flujo del campo $\vec{X} = (x, y, z)$ a través de $\mathcal{S}$. Calcular el volumen de la esfera sólida de radio r. Calcular el volumen del toro sólido que se obtiene haciendo girar en el espacio un círculo de radio r alrededor de un eje coplanar con él, que dista $a > r$ del centro del círculo.

Resp: $\frac{4}{3}\pi r^3, 2\pi^2 r^2 a$.

55. El campo vectorial (ax, by, cz) con a, b y c reales, determina la forma $ax\,dy\,dz + by\,dz\,dx + cz\,dx\,dy$. Hallar la integral de esa forma sobre la esfera de radio unidad y centro el origen, con la normal orientada positivamente al exterior (flujo del campo vectorial a través de la esfera). Resp.: $4\pi(a + b + c)/3$.

56. Hallar el flujo del campo vectorial $q\vec{X}/r^3$, siendo q una constante, $\vec{X} = (x, y, z)$, y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a través de la esfera de centro el origen y radio a, con la normal orientada positivamente al exterior. Resp.: $4\pi q$

57. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{X} = (x + y, y^2, y + z)$ sobre el cubo de centro el origen y arista a. Resp.: $2a^3$.

58. Calcular el flujo del vector $xz\vec{i} - y^2\vec{j} + xz\vec{k}$ a través de la superficie lateral del cilindro $x = R\cos u$, $y = R \operatorname{sen} u$, $z = v$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 < v < 3$ normal orientada al exterior. Resp.: $9\pi R^2/2$.

EJERCICIOS DE FORMAS DIFERENCIALES. (Courant vol 2, sección 3.6).

59. Ver Courant, vol II, punto 3.6 a ej. 1 (a),(b). La solución de la parte b) en el libro debería decir $(a^3 + b^3 + c^3)(u - v) + 3abc(v - u)$.

60. Ver Courant, vol II, punto 3.6 b ej. 1 (a),(b). La solución de la parte b) en el libro debería decir $(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)\, dx\, dy$.

61. Ver Courant, vol II, punto 3.6 b ej. 2.

62. Ver Courant, vol II, punto 3.6 b ej. 3.

63. Ver Courant, vol II, punto 3.6 b ej. 4.

64. Ver Courant, vol II, punto 3.6 c ej. 1 (a),(b). La solución de la parte b) en el libro debería decir $-2\, dx\, dy$.

65. Ver Courant, vol II, punto 3.6 c ej. 2. El enunciado en el libro debería decir: $d(\omega_1\omega_2) = -\omega_1(d\omega_2) + (d\omega_1)\omega_2$.

EJERCICIO SOBRE POTENCIAL VECTOR. EXACTITUD DE FORMAS DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN. Courant 3.6 c)

66. Probar que toda uno-forma diferencial exacta es cerrada. Probar que toda dos-forma diferencial exacta es cerrada. Probar que no toda uno-forma diferencial cerrada es exacta. (Sugerencia: Ejemplo del ejercicio 23). Más adelante se probará que no toda dos-forma diferencial cerrada es exacta. (Ejercicio 86).

67. i.) Probar que cada uno de los campos siguientes es solenoidal (o sea, de divergencia nula) y hallar un potencial vector. a) $\vec{v} = (x^2y, -xy^2 - y, z)$

    b) $\vec{v} = (-\operatorname{sen} x, y\cos x - y^2, 2yz)$

    c) $\vec{v} = (2x + y + z, -y, -z)$.

Se recuerda que si $\tau = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, si $\omega = d\tau = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy$, entonces el campo $X = (a, b, c)$ es el rotor del campo $Y = (A, B, C)$, y en ese caso se llama a X campo de rotores, y a Y potencial vector de X.

ii.) Para el campo vectorial dado en a) hallar un potencial vector con la tercera componente 0, y otro con la primera componente 0. Comprobar que los potenciales hallados difieren en un gradiente.

iii.) Para el campo dado en c), hallar el flujo de $\vec{v}$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, con la normal orientada tal que su segunda componente es mayor o igual a 0. (Se sugiere aplicar el teorema de Stokes en el espacio).

Resp. i.) Hay infinitos potenciales vectores de cada uno de los campos. Una respuesta es a) $(-xy^2z - yz, -x^2yz, 0)$, b) $(zy\cos x - zy^2, z\operatorname{sen} x, 0)$, c) $(-yz, -2xz - yz - z^2/2, 0)$.

ii.) Hay infinitas respuestas. Una respuesta es $(-xy^2z - yz, -x^2yz, 0)$ y $(0, xz, x^2y^2/2 + yx)$ que difieren en el gradiente de $f = x^2y^2z/2 + xyz$.

iii.) cero.

a. Si existe, hallar algún potencial vector del campo

$$\vec{X} = (y^2 - 2e^x z, 4xy, e^x z^2 - 4xz)$$

que sea de la forma $(0, B, C)$ con $B(0, y, 0) = y^2$, $C(0, y, z)y^3 + 2yz + 4$ y $B(0, 1, 1) = 5$.

[b.] Si existe, hallar algún otro potencial vector del mismo campo $\vec{X}$ que cumpla todas las condiciones anteriores excepto la última.

Resp. [a.] Hay uno solo, que es $(0, e^x z^2 - 2x^2z + z^2 + 2y^2z + y^2, -2yx^2 + y^3 + 2yz + 4)$. [b.] No existe.

EJERCICIOS SOBRE EL TEOREMA DE GAUSS Y GREEN EN EL ESPACIO (Courant, sección 5.9).

En los ejercicios que siguen, las superficies cerradas y acotadas están orientadas con la normal hacia el exterior, siempre que no se indique lo contrario.

68. El teorema de Gauss en el espacio afirma que

$$\iiint_V f_x + g_y + h_z\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathcal{S}} f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy$$

siendo V una región abierta acotada del espacio cuya frontera es la superficie cerrada $\mathcal{S}$ orientada con la normal *saliente* de V.

Probar que el volumen de la región V es igual a las siguientes integrales de superficie:

$$\int\!\!\int_{\mathcal{S}} x\,dy\,dz = \int\!\!\int_{\mathcal{S}} y\,dz\,dx = \int\!\!\int_{\mathcal{S}} z\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int\!\!\int_{\mathcal{S}} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

69. Calcular el volumen encerrado por la superficie cerrada, acotada, parametrizada por

$$\begin{cases} x = u & -2 \leq u \leq 2 \\ y = 3(2-|u|)\cos v & 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = (2-|u|)\operatorname{sen} v & \end{cases}$$

Respuesta: 16π

70. Calcular el volumen encerrado por un elipsoide de semiejes con longitudes a, b y c.

Resp: $4\pi abc/3$.

71. Calcular, primero directamente, y luego usando el teorema de Gauss en el espacio, la integral

$$\int\!\!\int_{\mathcal{S}} (y-z)\,dy\,dz + (x+2y+z)\,dz\,dx + (x-z)\,dx\,dy$$

sobre la superficie del cubo de centro en el origen, de lados de longitud 2, paralelos a los ejes coordenados, y orientado con la normal saliente.

Resp: 8.

72. a) Demostrar que si $\vec{X}$ es un campo solenoidal en $\mathbb{R}^3 - (0,0,0)$ entonces el flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier esfera que deje a $(0,0,0)$ en su interior es igual al flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier superficie cerrada, acotada, sin borde que deje a $(0,0,0)$ en su interior (es decir cualquier superficie que sea frontera de un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $(0,0,0)$).

b) Hallar el flujo del campo vectorial $q\vec{X}/r^3$, siendo q una constante, $\vec{X} = (x,y,z)$, y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a través del cubo de centro el origen y arista a, con la normal orientada positivamente al exterior. Se sugiere usar que el flujo de ese campo a través de la esfera de radio a centrada en el origen es $4\pi q$.

Resp.: $4\pi q$

73. Aplicando la fórmula de Gauss, hallar el flujo del vector $(3x, -2y, 5z)$ a través de una esfera cualquiera de radio 2, normal orientada al exterior. Resp.: 64π.

74. Sea $\vec{X}$ un campo solenoidal definido en todo $I\!R^3$. Se sabe que

$$\vec{X}(x,y,1) = (\sqrt{1+x^2+y^2}\cos x,\ \ e^x,\ \ 0)$$

$$\vec{X}(x,y,0) = (\sqrt{1+x^2+y^2}\cos x,\ \ e^x,\ \ y-1)$$

Calcular el flujo de $\vec{X}$ a través de la superficie lateral del cilindro $x = \cos u,\ y = \operatorname{sen} u,\ z = v,\quad 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 1$ con la normal que apunta hacia el eje del cilindro.

Resp: π

75. Sea $\vec{X}$ un campo solenoidal en $\Omega = I\!R^3 - \{(0,0,0)\}$.

Su primera componente $A(x,y,z)$ verifica $A(1,y,z) = 3(y^2+z^2)$, $A(-1,y,z) = -3(y^2+z^2)$.

En los planos $|y| = 1$ se anula la segunda componente del campo $\vec{X}$, y en los planos $|z| = 1$ se anula la tercera componente.

Hallar el flujo de $\vec{X}$ a través de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 5. Hallar el flujo de $\vec{X}$ a través de la esfera $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

(Sugerencia: Considerar la superficie de un cubo con centro en el origen, y lados paralelos a los ejes de longitud 2 y aplicar el ejercicio 72.)

Respuesta: 8.

76. Sean $U = x + y + z, \quad V = e^x + y,$ funciones escalares, y sea $\mathcal{S}$ la superficie del cubo con vértices (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1), orientada con la normal n saliente. Sea R la región encerrada por $\mathcal{S}$.

Calcular

$$I_1 = \iiint_R U\Delta V\, dx\, dy\, dz \tag{1}$$

$$I_2 = \iint_{\mathcal{S}} U\frac{dV}{dn}\, dS \tag{2}$$

$$I_3 = \iiint_R V\Delta U\, dx\, dy\, dz \tag{3}$$

Aplicando las identidades de Green, hallar:

$$I_4 = \iiint_R \nabla U \cdot \nabla V\, dx\, dy\, dz \tag{4}$$

$$I_5 = \iint_{\mathcal{S}} V\frac{dU}{dn}\, dS \tag{5}$$

Resp: $I_1 = e,\ \ I_2 = 2e,\ \ I_3 = 0,\ \ I_4 = e,\ \ I_5 = e.$

77. a) Sean $\vec{X}$ y $\vec{W}$ dos campos definidos en $\Omega = I\!R^3 - \{(x_0, y_0, z_0)\}$, tales que div $\vec{X}$ = div $\vec{W}$ en Ω. Probar que son iguales los flujos de $\vec{X}$ y de $\vec{W}$ a través de cualquier superficie cerrada y acotada, contenida en Ω que no encierre al punto (x_0, y_0, z_0) (es decir que la superficie sea la frontera de un abierto acotado de $I\!R^3$ que no contiene al punto (x_0, y_0, z_0)).

    Probar que el flujo de $\vec{X}$ a través de una superficie $\mathcal{S}$ cerrada y acotada, contenida en Ω que encierra al punto (x_0, y_0, z_0) es igual al flujo de $\vec{W}$ a través de $\mathcal{S}$ más el flujo de $\vec{X} - \vec{W}$ a través de la esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y radio 1.

    b) Sea $r^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$. Sea

    $$\vec{X} = \left(\frac{y}{r^2}, \frac{1-x}{r^2}, 3z\right)$$

    Hallar el flujo de $\vec{X}$ a través del elipsoide $(x-1)^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ y a través del elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sugerencia: aplicar la parte a) con $\vec{W} = (0, 0, 3z)$.

    Resp: $2\pi/3$, 2π

78. Probar la fórmula $\iiint_V (\vec{A} \cdot \nabla\varphi + \varphi\nabla \cdot \vec{A})dx\,dy\,dz = \iint_S \varphi\vec{A} \cdot \vec{n}\,dS$, donde V es un volumen limitado por la superficie S, φ es una función escalar, y A un campo vectorial. Resp.: Aplicar el teorema de Gauss al vector $\varphi\vec{A}$.

79. Probar que si φ verifica la ecuación de Laplace (o sea, si $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$), el flujo de $\varphi\nabla\varphi$ a través de una superficie S es igual a la integral de $(\nabla\varphi)^2$ en el volumen V limitado por S. Sugerencia: aplicar el ejercicio anterior.

80. Buscar la condición que deben cumplir las constantes a, b, c para que el flujo del vector $(ax \cos y \cos z, b \operatorname{sen} y \cos z, c \cos y \operatorname{sen} z)$ sea nulo a través de la esfera de centro el origen y radio unidad. Resp.: $a + b + c = 0$.

81. Calcular primero directamente, y luego aplicando el teorema de Gauss, el flujo del vector $(0, 0, 5)$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z > 0$. Resp.: $5\pi R^2$ o su opuesto, según la orientación que se haya dado a la superficie.

    EJERCICIOS SOBRE EL TEOREMA DE STOKES EN EL ESPACIO (Courant: sección 5.10) Y CAMPOS DE ROTORES.

82. Aplicando el teorema de Stokes, calcular la circulación de $(y, 2x, -1)$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$, $z = 1$. Resp.: 3π o su opuesto, según la orientación que se haya dado a la circunferencia.

83. Calcular la circulación de $(3x^2y - 3z + e^x \operatorname{sen} z, x^3, e^x \cos z - 3x)$ a lo largo de la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp.: 0 Sugerencia: calcular el rotor del campo.

84. Sea $\vec{X}$ un campo de clase C^1 definido en todo $\mathbb{R}^3$, tal que su primera componente es idénticamente nula, y su segunda componente $B(x, y, z)$ verifica $B(0, y, 0) = 3y^2$, $B(1, y, 0) = 8y^3$.

    Hallar el flujo del rotor de X a través de la superficie con borde, parametrizada por:

$$\begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq 1 \\ y = v & 0 \leq v \leq 1 \\ z = uv(1-u)(1-v) & \end{cases}$$

    orientada con la normal con tercera componente positiva.

    Respuesta: 1

85. Siendo $\vec{A}$ un vector constante, y $\vec{X} = (x, y, z)$, probar que la circulación de $\vec{A} \wedge X$ a lo largo de una curva cerrada es igual a dos veces el flujo de $\vec{A}$ a través de un casquete de superficie limitado por la curva.

86. a) Probar que cualquiera que sea el campo vectorial $\vec{A}$ definido en un abierto cualquiera $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, es nulo el flujo de $\nabla \wedge \vec{A}$ a través de cualquier superficie acotada, cerrada y orientable, sin borde, contenida en Ω (aunque el interior de la superficie no esté totalmente contenido en Ω, y no pueda aplicarse el teorema de Gauss). Sugerencia: descomponer la superficie en casquetes con borde, limitados por curvas cerradas. Aplicando el teorema de Stokes a cada casquete, el flujo del rotor de $\vec{A}$ en cada uno es igual a la circulación de $\vec{A}$ a lo largo de su curva borde, con orientación apropiada, de forma que la suma de las circulaciones en esas curvas se cancelan.

    b) Aplicar la parte anterior para deducir que si $\vec{X}$ es un campo de rotores en $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, entonces es nulo el flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier esfera contenida en Ω, aunque deje $(0, 0, 0)$ en su interior.

    c) Demostrar que todo campo de rotores es solenoidal.

    d) Demostrar que no todo campo solenoidal es de rotores. (Sugerencia: Sirve como ejemplo el campo $q\vec{X}/r^3$ del ejercicio 56). Demostrar que no toda dos-forma cerrada es exacta (en una abierto cualquiera). (Sin embargo, toda dos-forma cerrada en todo $\mathbb{R}^3$ es exacta en $\mathbb{R}^3$, porque todo campo solenoidal en todo $\mathbb{R}^3$ es de rotores en $\mathbb{R}^3$).

87. Sea $\vec{X}$ el campo del ejercicio 75. Demostrar que $\vec{X}$ no es un campo de rotores en Ω

    (Sugerencia: Aplicar los ejercicios 75 y 86).

88. Demostrar que no existe ningún campo solenoidal en $I\!R^3-\{(0,0,0)\}$ con primera componente igual a $3x$, segunda componente que se anula en los planos $|y|=1$ y tercera componente que se anula en los planos $|z|=1$. (Sugerencia: Si existiera $\vec{X}$, entonces calcular su flujo a través de un cubo como en el ejercicio 75, y a través de la superficie frontera del prisma $\{|x|\leq 2,\ |y|\leq 1,\ |z|\leq 1\}$. Aplicar el ejercicio 72).

89. a) Se da el campo

$$\vec{X}=\left(\frac{x(1-4x^2-4y^2)}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2},\ 4z\right)$$

Verificar que es solenoidal en $\Omega=I\!R^3-\{x=0,\ y=0\}$. Calcular el flujo de $\vec{X}$ a través de la superficie cilíndrica $\{x^2+y^2=1,\quad -1\leq z\leq 1\}$ y a través de la parte de la superficie esférica $\{x^2+y^2+z^2=1,\ -1\leq z\leq 1\}$.

Resp: -4π y -4π.

b) Demostrar que el flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier superficie cerrada, acotada y sin borde contenida en Ω, es cero. (Sugerencia: Toda superficie cerrada, acotada, sin borde, contenida en Ω tiene todo su interior contenido en Ω, porque Ω es todo el espacio menos una recta. (Esta propiedad no vale si Ω fuera por ejemplo todo el espacio menos un punto). Entonces, aplicando el teorema de Gauss, el flujo es cero.

c) Demostrar que $\vec{X}$ es un campo de rotores en Ω. Sugerencia: Hallar el rotor de $(yz/(x^2+y^2),\ \ 4xz-[xz/(x^2+y^2)],\ \ 0)$.

EJERCICIOS SOBRE ECUACION DE LAPLACE Y ECUACIONES DE MAXWELL.

90. Sea la función escalar

$$\phi(x,y,z)=2\log\sqrt{x^2+y^2}$$

definida en el abierto $\Omega=I\!R^3-\{x=0,\ y=0\}$.

a) Verificar que Φ es armónica.

b) Hallar la integral de ϕ sobre la esfera de radio 1 y centro en (2,0,0).

c) Calcular el flujo de $\nabla\phi$ a través de la superficie lateral del cilindro circular $x^2+y^2=1,\quad -1\leq z\leq 1$, con la normal en el sentido opuesto al que apunta al eje de las z.

d) Hallar el flujo de $\nabla\phi$ a través de una superficie cerrada y acotada del espacio que no intersecta al eje de las z.

e) Hallar el flujo de $\nabla\phi$ a través de la superficie lateral del "barril" generado por la curva $\{x = 0, \;\; y = 2 - z^2, \;\; -1 \leq z \leq 1\}$ al girar alrededor del eje de las z, orientada con la normal en el sentido opuesto al que apunta al eje de las z.

Resp: b)$8\pi \log 2$, c) 8π, d) 0, e) 8π.

91. a) Encontrar una función armónica u definida en el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ tal que sobre la circunferencia del borde $x = \cos\alpha, \;\; y = \operatorname{sen}\alpha$, toma el valor

$$u(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \operatorname{sen}\alpha + \cos 2\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

b) Demostrar que la función hallada u es la única que verifica las condiciones pedidas.

Resp: a) $u = y + x^2 - y^2$. b) Si hubiese dos funciones u_1 y u_2, aplicar la primera identidad de Green a $U = V = u_1 - u_2$ para deducir que $u_1 - u_2$ es idénticamente nula en el círculo, sabiendo que lo es en su borde.

92. a. Sean E y H dos campos definidos en todo $\mathbb{R}^3$. Verificar que

$$\nabla \cdot (E \wedge H) = H \cdot \nabla \wedge E - E \cdot \nabla \wedge H$$

b. Los campos E y H (campo eléctrico y de inducción magnética respectivamente), dependen diferenciablemente de t y verifican las siguientes ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\operatorname{rot} E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{6}$$
$$\operatorname{rot} H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

donde c es constante.

Probar que

$$\operatorname{div}(E \wedge H) = -\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(H \cdot H + E \cdot E)$$

c. Siendo el campo eléctrico

$$E(x, y, z, t) = (\operatorname{sen} 4\pi u, \cos 4\pi u, 0), \quad \text{donde } u = z - ct$$

hallar el campo de inducción magnética H sabiendo que en el instante $t = 0$ tiene tercera componente nula y es ortogonal al campo eléctrico E.

d. Dibujar el campo H hallado en los puntos del eje de las z, para

$$t = 0, \;\; t = \frac{1}{16c}, \;\; t = \frac{1}{8c}, \;\; t = \frac{3}{16c}$$

Observar que la proyección del dibujo, sobre el plano $x0z$ es una onda sinusoidal.

e. Encontrar para cada instante t los puntos $(0,0,z)$ tales que $H(0,0,z,t) = (1,0,0)$. Se determinarán funciones diferenciables $z_1(t),\; z_2(t),\; \ldots z_n(t),\; \ldots$, para cada punto $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ encontrado. (Estos puntos corresponden a las "crestas"de la onda). Calcular la velocidad de propagación $\dot{z}(t)$, y la longitud de onda (distancia entre dos crestas consecutivas).

Resp:c) $H = (-\cos 4\pi u, \operatorname{sen} 4\pi u, 0)$

e) $z_n(t) = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} + ct$, $\qquad \dot{z}(t) = c$, $\qquad z_{n+1} - z_n = \frac{1}{2}$ (longitud de onda).

.

Instrucciones generales para los dos parciales de CÁLCULO III y contenido de cada uno.

- Al finalizar el parcial deberán entregarse todas las hojas impresas con los enunciados. En la primera página deben llenarse todos los datos identificatorios (Apellido, Nombre, Número de cédula de identidad, y número de parcial).
- Teniendo en cuenta que para cada pregunta sólo existe una opción correcta, colocar el número de la opción (i, ii, iii, iv, o v) que considere correcta en el casillero correspondiente ubicado en la parte superior de la primera página del parcial. Anotaciones fuera de los casilleros no serán consideradas. Por favor, escriba con claridad; respuestas dudosas se considerarán como no contestadas.
- En el primer parcial cada pregunta tiene un valor de 4 puntos si está bien contestada, sumando un total de 40 puntos para todo el parcial. Las preguntas mal contestadas serán penalizadas con -1 punto y las no contestadas valdrán 0 punto. De no saber alguna respuesta deje en blanco el casillero correspondiente.
- En el segundo parcial cada pregunta tiene un valor de 6 puntos si está bien contestada, sumando un total de 60 puntos para todo el parcial. Las preguntas mal contestadas serán penalizadas con $-1{,}5$ punto y las no contestadas valdrán 0 punto.
- La duración de cada parcial es de tres horas.
- No se permite el uso de ningún tipo de material ni calculadoras. Se solicita apagar los celulares durante el parcial.
- Se deben traer los útiles para escribir (excepto el papel) y una tabla o cartón de apoyo, porque, dependiendo del local donde se tome el parcial, puede no haber bancos con mesas sino sólo sillas.
- Una semana antes del parcial se tomarán inscripciones para el mismo en Bedelía.

- Media hora antes del parcial se publicará a la entrada la lista de estudiantes habilitados para darlo, con los correspondientes números de parcial de cada uno y la distribución de salones. Deben recordar el número de parcial.
- Deben dirigirse al salón correspondiente y, a la hora marcada de inicio ubicarse en la silla numerada según el número de parcial que les haya correspondido. No se podrá entrar al salón después de comenzada la prueba.
- Deberán presentar cédula de identidad. No se tomará el parcial a quienes no exhiban su documento.
- Durante el parcial no se responderá ningún tipo de consulta, la comprensión de la letra es parte de la prueba.
- No se permitirá salir del salón una vez inciada la prueba; el estudiante sólo se levantará del banco para entregar el parcial y retirarse del salón.
- Las respuestas correctas (opciones en números romanos) serán publicadas en la puerta de la Facultad o en la cartelera del IMERL, media hora después de terminado el parcial.
- Antes de entregar el parcial se recomienda a los estudiantes anotar, para fines de autocontrol, las opciones dadas a las diez preguntas, y la versión del parcial que le correspondió, que se distingue por algún código que se dará a conocer durante el parcial. Esta anotación no tiene valor de documento, pero es necesaria para quienes deseen comparar sus respuestas con las correctas, y eventualmente reclamar sobre la corrección de su prueba, ya que no hay instancia de muestra de los parciales.
- LOS RESULTADOS SE PUBLICARAN ANTES DEL SEXTO DIA HABIL posterior al parcial. NO SE DAN DATOS NI INFORMACION DE NINGUN TIPO POR TELEFONO NI EN EL IMERL. La información que requieran y no encuentren en las carteleras, deberán solicitarla a su docente en horario de clase o de consulta en los salones indicados para ello.
- Una vez publicados los resultados, los estudiantes que tengan reclamos deben anotarse, solo durante los 4 siguientes días hábiles después de publicados los resultados, depositando en la urna de Calculo III, que se encontrará en la puerta del IMERL, una hoja con el número de cédula de identidad, nombre y apellido, la lista de las opciones marcadas por el estudiante, y el reclamo correspondiente. No se recibirán reclamos vencido ese plazo, o si no tiene la lista de las opciones marcadas. Se publicará la respuesta a los reclamos antes de transcurrida una semana de vencido el plazo de reclamos.

- Los estudiantes que precisen constancia de asistencia al parcial para fines laborales, deben solicitar en la Bedelía, con anterioridad al parcial, el formulario correspondiente, llenarlo con birome, y presentarlo al docente de su salón durante el parcial, para que lo firme. No se firmarán constancias después del parcial. Si requiere el sello del IMERL, puede pedirse su sellado en la Secretaría del IMERL, en el horario de 9 a 12 horas, y de 13 a 15, de lunes a viernes.

- El puntaje final del curso será la suma de los puntos obtenidos en los dos parciales, con un máximo de 100. (40 máximo del primero, y 60 máximo del segundo). Exoneran del examen y aprueban la materia con nota entre 6 (B.B.B) y 12 (S.S.S), los estudiantes que en total hayan obtenido 60 puntos o más como suma de los dos parciales. Pueden rendir examen hasta tres veces en seis oportunidades consecutivas quienes hayan obtenido entre 25 y 59.9 puntos como suma de los dos parciales. Deben repetir el curso, y para ello deben reinscribirse a partir del año que viene, quienes obtengan menos de 25 puntos en total como suma de los dos parciales. Quienes hayan pasado a examen y no lo aprueben en los seis períodos consecutivos mencionados, o tengan tres reprobaciones, también deben repetir el curso.

CONTENIDO DE LOS PARCIALES:

- Las preguntas teóricas de múltiple opción en los parciales, estarán basadas en las demostraciones del libro Courant-John. Cuando se den opciones de demostración, la correcta será un esquema de las ideas usadas en la demostración del libro, aunque pueda ser diferente de las que se dan en las clases de los distintos grupos del curso teórico. Las restantes cuatro opciones serán incorrectas.

- Para los exámenes, en cambio, las preguntas de demostraciones teóricas no serán de múltiple opción, sino de exposición escrita, y podrán responderse siguiendo cualquier otra bibliografía o fuente.

- También pueden incluirse en parciales y exámenes preguntas de teoremas que, aunque no estén en el libro de Courant, se obtienen como consecuencias de aplicación del contenido teórico del libro, que fueron usados al resolver algún ejercicio del repartido del curso.

- Los temas incluidos para cada parcial de CALCULO III están enumerados al principio de este repartido.

EJEMPLOS PARA EL PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO III

23 de abril de 1998

RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	ii	iv	ii	i	iv	ii	iii	i	v

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva plana dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = e^{(t+1)(5-t)} \\ \\ y = (t-1)^2(7-t) - 32 \end{cases} \quad -\infty < t+ < \infty$$

orientada en el sentido de t creciente.

Véanse las figuras 1 y 2 en la hoja adjunta al final.

El croquis de $\mathcal{C}$ en el plano xy es aproximadamente el de:

I) La figura 1 con la orientación en el sentido de las flechas.
II) La figura 1 con la orientación opuesta a la de las flechas.
III) La figura 2 con la orientación en el sentido de las flechas.
IV) La figura 2 con la orientación opuesta a la de las flechas.
V) Como la curva $\mathcal{C}$ no pasa dos veces por el punto $(1,0)$, ninguna de las opciones anteriores es correcta.

2. Sea $I = \int_{\mathcal{C}} Adx + Bdy$ donde

$$A(x,y) = \frac{(y-1)^2 - x^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2}, \qquad B(x,y) = \frac{2x(1-y)}{(x^2 + (y-1)^2)^2}$$

son funciones definidas para $(x,y) \in \Omega = I\!R^2 - \{(0,1)\}$, y $\mathcal{C}$ es la circunferencia

$$\begin{cases} x = \cos t \\ \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

orientada según t creciente.

Entonces, se cumple:

I) $I = 2\pi$ y $Adx + Bdy$ no es exacta en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ e $I = 2\pi$.

II) $A\,dx + B\,dy$ es exacta en Ω y además $I = 0$.

III) $I = 2\pi$ y $A\,dx + B\,dy$ no es exacta en Ω, pero es exacta en $\mathbb{R}^2 - \{y = 0, x \geq 1\}$.

IV) $I = 2\pi$ y $A\,dx + B\,dy$ es exacta en Ω.

V) $I = 0$ y $A\,dx + B\,dy$ no es exacta en Ω porque Ω no es simplemente conexo.

3. Sean los dos campos siguientes:

$$\vec{X} = \left(\frac{y-3}{x^2 + (y-3)^2} \ , \ (x+1)^2 + \frac{-x}{x^2 + (y-3)^2} \right) \quad , \quad \vec{W} = (0 \ , \ (x+1)^2$$

definidos en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,3)\}$.

Sea I_1 la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de la elipse $x^2 + 4(y-3)^2 = 1$, orientada en sentido antihorario.

Sea I_2 la circulación de $\vec{W}$ a lo largo de la misma elipse.

Sea I_3 la circulación de $\vec{X} - \vec{W}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + (y-3)^2 = 1$, orientada en sentido antihorario.

Entonces:

I) $I_1 = I_2 + I_3 = 3\pi, \ I_2 = \pi, \ I_3 = 2\pi$

II) $I_1 = I_3 - I_2 = -4\pi, \ I_2 = 2\pi, \ I_3 = -2\pi$

III) $I_1 = I_2 - I_3 = 3\pi, \ I_2 = \pi, \ I_3 = -2\pi$

IV) $I_1 = I_2 + I_3 = -\pi, \ I_2 = \pi, \ I_3 = -2\pi$

V) Ninguna de las opciones anteriores es correcta

(Sugerencia: Observar que $\vec{X} - \vec{W}$ es irrotacional en Ω).

4. El área encerrada por la curva cerrada simple

$$\begin{cases} x = 7 - 5 \operatorname{sen} 4t + t(2t - \pi) \\ y = 4 + 8\cos 4t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi/2$$

es

I) 80π

II) 40π

III) 20π

IV) $20\pi - 5$

V) $40\pi - 28$

5. Hipótesis:

   Sea $f(x, y, z)$ una función escalar definida y de clase C^2 en todo el espacio $I\!R^3$, y sea $\vec{X} = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$ un campo vectorial, definido y de clase C^2 en todo el espacio $I\!R^3$.

   Se plantean las siguientes tres afirmaciones como candidatas a Tesis:

   1. $\text{div}(\text{rot}\vec{X}) = 0$ en todo punto de $I\!R^3$.
   2. $\text{rot}(\text{grad}f) = 0$ en todo punto de $I\!R^3$.
   3. $\text{rot}(f\vec{X}) = f\text{rot}\vec{X} + \text{grad}f \wedge \vec{X}$ en todo punto de $I\!R^3$.
      (El símbolo $\wedge$ indica producto vectorial en $I\!R^3$).

   Distinguir cuáles de las tres afirmaciones se deducen necesariamente de la hipótesis.

   I) Las tres afirmaciones se deducen necesariamente de la hipótesis.
   II) Se deducen solo las afirmaciones 1 y 2, pero, a partir únicamente de la hipótesis expuesta, la afirmación 3 no tiene necesariamente que ser cierta.
   III) Se deducen solo las afirmaciones 1 y 3, pero, a partir únicamente de la hipótesis expuesta la afirmación 2 no tiene necesariamente que ser cierta.
   IV) Se deducen solo las afirmaciones 2 y 3, pero, a partir únicamente de la hipótesis expuesta, la afirmación 1 no tiene necesariamente que ser cierta.
   V) Se deduce únicamente la afirmación 3.

6. **TEOREMA**

   Sea la forma diferencial lineal $A\,dx + B\,dy$ definida y de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset I\!R^2$, tal que $A_y = B_x$ en todo punto de Ω. Si Ω es simplemente conexo, entonces la forma diferencial es exacta.

   Un esbozo de demostración de este teorema es:

   Se toman dos curvas infinitamente diferenciables $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ con los mismos extremos inicial P y final Q. Existe una homotopía $P(t, \lambda)$ de clase C^2:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x(t,\lambda) \\ y & = & y(t,\lambda) \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} a \le t \le b \\ 0 \le \lambda \le 1 \end{array}$$

   tal que, cuando $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, da parametrizaciones de las curvas $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ respectivamente, y cuando $t = a$ y $t = b$, deja fijos los puntos P y Q respectivamente.

   La tesis se puede escribir como $I = \int_a^b (Ax_t + By_t)|_{\lambda=0}^{\lambda=1}\, dt = 0$.

   Se observa que I es igual a la integral doble en el rectángulo $D = \{a \le t \le b, 0 \le \lambda \le 1\}$ de la función $F(t, \lambda) = (Ax_t + By_t)_\lambda$.

I) Por la regla de la cadena se tiene $A_\lambda = A_x x_\lambda + A_y y_\lambda$, $B_\lambda = B_x x_\lambda + B_y y_\lambda$. Usando que $A_y = B_x$ se obtiene $I = \int_0^1 (Ax_t + By_t)|_{\lambda=0}^{\lambda=1}\, d\lambda$. Como P y Q son puntos fijos por la homotopía, se tiene $x_t = 0$ e $y_t = 0$ para todo t, cuando $\lambda = 0$ y cuando $\lambda = 1$. Entonces $I = 0$ como se quería demostrar.

II) Por la regla de la cadena se tiene $A_\lambda = A_x x_\lambda + A_y y_{t\lambda}$, $B_\lambda = B_x x_\lambda + B_y y_\lambda$. Usando que $A_y = B_x$ y sustituyendo en $F(t,\lambda)$ se obtiene $F(t,\lambda) = 0$. Entonces $I = \iint_D F(t,\lambda)\, dt\, d\lambda = 0$, como se quería demostrar.

III) Por la regla de la cadena se tiene $A_\lambda = A_t t_\lambda$, $B_\lambda = B_t t_\lambda$. Sustituyendo en $F(t,\lambda)$ se obtiene $F(t,\lambda) = A_t x_\lambda + B_t y_\lambda$.

Luego $I = \int_a^b (A_t x_\lambda + B_t y_\lambda)\, dt$. Como P y Q son puntos fijos por la homotopía, se tiene $x_\lambda = 0$ e $y_\lambda = 0$ para todo λ y para todo t . Entonces $I = 0$ como se quería demostrar.

IV) Por la regla de la cadena se tiene $A_\lambda = A_x x_\lambda + A_y y_\lambda$, $B_\lambda = B_x x_\lambda + B_y y_\lambda$. Usando que $A_y = B_x$ se obtiene $F(t,\lambda) = (Ax_\lambda + By_\lambda)_t$.

Luego $I = \int_0^1 (Ax_\lambda + By_\lambda)|_{t=a}^{t=b}\, d\lambda$. Como P y Q son puntos fijos por la homotopía, se tiene $x_\lambda = 0$ e $y_\lambda = 0$ para todo λ, cuando $t = a$ y cuando $t = b$. Entonces $I = 0$ como se quería demostrar.

V) Por la regla de la cadena se tiene $F_\lambda = F_x x_\lambda + F_y y_\lambda$. Como P y Q son puntos fijos por la homotopía, se tiene $x_\lambda = 0$ e $y_\lambda = 0$ para todo λ y para todo t. Entonces $F_\lambda = 0$. Luego $I = \int_a^b F_\lambda(t,\lambda)\, dt = 0$, como se quería demostrar.

7. Sea $\vec{X}$ el campo

$$\vec{X} = (12x^2y, 4x^3 + 5e^y z, 5e^y - 2z)$$

definido en todo el espacio $I\!R^3$.

Sea $\mathcal{C}$ una curva cualquiera en $I\!R^3$ que une el punto $A = (1,0,1)$ con el punto $B = (2,1,3)$ orientada desde A hacia B.

Sea I la circulación del campo $\bar{X}$ a lo largo de $\mathcal{C}$, es decir:

$$I = \int_{\mathcal{C}} (12x^2y)\, dx + (4x^3 + 5e^y z)\, dy + (5e^y - 2z)\, dz$$

Entonces:

I) $\vec{X}$ es un campo de gradientes en $I\!R^3$ y $I = -19 - 15e$.

II) $\vec{X}$ es un campo de gradientes en $I\!R^3$ y $I = 19 + 15e$.

III) $\vec{X}$ es un campo de gradientes en $I\!R^3$ y $I = 0$.

IV) $\vec{X}$ es un campo de gradientes en $I\!R^3$ y $I = 19 - 15e$.

V) $\vec{X}$ no es un campo de gradientes en $I\!R^3$ y I depende del camino elegido que une A con B.

8. Se tiene la forma diferencial lineal

$$f\,dy - g\,dx$$

tal que $f_x + g_y = 0$ para todo $(x,y) \in I\!R^2$. Se sabe que sobre la recta $x = y$ la función f toma valores $f(x,x) = 9x^2$ y la función g toma valores $g(x,x) = 4x$.

Aplicando el teorema de Gauss en el plano, calcular

$$I = \int_{\mathcal{C}} f\,dy - g\,dx$$

siendo $\mathcal{C}$ un arco orientado de curva con extremo inicial $(0,0)$ y extremo final $(1,1)$, contenido en una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados y centro en el punto $(\alpha, 0)$, siendo α un número real dado, mayor que 1.

I) $I = 0$

II) $I = 3\sqrt{\alpha^2 - 1}/\sqrt{2\alpha - 1}$

III) $I = 1$

IV) $I = 2(1 + \alpha)$

V) I cambia al variar α pero ninguna de las restantes respuestas es correcta.

9. **TEOREMA** Hipótesis: *Sea $\vec{X}$ un campo vectorial $\vec{X} = (A, B)$ que está definido y es de clase C^1 en $\Omega = I\!R^2 - \{(0,0)\}$. Se sabe que $A_y = B_x$ en todo punto de Ω.*

Sea $\mathcal{E}$ la elipse $(x^2/a^2)+(y^2/b^2) = 1$, con $0 < a < b < 1$, y sea $\mathcal{C}$ la circunferencia $x^2+y^2 = 1$; ambas curvas orientadas en sentido antihorario.

Tesis: $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{t}\,ds = \int_{\mathcal{E}} \vec{X} \cdot \vec{t}\,ds$.

Para dar las opciones de demostración de este teorema se definen los cuatro puntos $A = (a, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (-1, 0)$ y $D = (-a, 0)$, y las dos curvas γ_1 y γ_2 cerradas, orientadas en sentido *antihorario* como sigue:

La curva γ_1 está formada por los arcos de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{C}$ que quedan en el semiplano superior $y \geq 0$, y por los segmentos AB y CD, todos apropiadamente reorientados.

La curva γ_2 está formada por los arcos de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{C}$ que quedan en el semiplano inferior $y \leq 0$, y por los segmentos BA y DC, todos apropiadamente reorientados.

Un esbozo de demostración del teorema anterior es:

I) Se verifica $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds - \int_{\mathcal{E}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = \int_{\gamma_1} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds + \int_{\gamma_2} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds$.

Como el interior de γ_1 no contiene a $(0,0)$ puede elegirse algún conjunto $\Gamma_i \subset \Omega$, que sea abierto, simplemente conexo y contenga a la curva γ_1. Como γ_1 es una curva cerrada en Γ_1, y el campo es irrotacional en el conjunto simplemente conexo Γ_1, se deduce que la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de γ_1 es cero.

Análogamente, la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de γ_2 también es cero.

Sustituyendo en la igualdad del principio, se tiene la tesis.

II) Se verifica $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = \int_{\gamma_1} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds$ y $\int_{\mathcal{E}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = \int_{\gamma_2} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds$.

Como el interior de γ_1 no contiene a $(0,0)$ puede elegirse algún conjunto $\Gamma_i \subset \Omega$, que sea abierto, simplemente conexo y contenga a la curva γ_1. Como γ_1 es una curva cerrada en Γ_1 y el campo es irrotacional, se deduce que la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de γ_1 es cero.

Análogamente, la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de γ_2 también es cero.

Sustituyendo en las igualdades del principio, se tiene la tesis.

III) Como $\vec{X}$ es irrotacional en el semiplano $y \geq 0$, y este semiplano es simplemente conexo, se deduce que existe potencial escalar $u_1(x,y)$ del campo $\vec{X}$ definido en el semiplano $y \geq 0$. Análogamente, existe potencial escalar $u_2(x,y)$ del campo $\vec{X}$ definido en el semiplano $y \leq 0$. Construyendo la función $u(x,y)$ igual a u_1 si $y \geq 0$, e igual a u_2 si $y \leq 0$, se obtiene un potencial escalar de $\vec{X}$ en Ω. Por lo tanto $\vec{X}$ es un campo de gradientes, y su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en Ω es cero. Como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ son curvas cerradas, $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = 0$ y $\int_{\mathcal{E}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = 0$. Luego $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = \int_{\mathcal{E}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds$, como se quería demostrar.

IV) Como $A_y = B_x$ en Ω, aplicando el teorema de Stokes se obtiene: $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = \int_{\mathcal{C}} A\, dx + B\, dy = \iint_D (A_y - B_x) dx dy = 0$

Análogamente $\int_{\mathcal{E}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = 0$

Luego $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds = \int_{\mathcal{E}} \vec{X} \cdot \vec{t}\, ds$, como se quería demostrar.

V) Integrando $A(x,y)$ respecto de x con y constante se obtiene una función $u(x,y) = \int A(x,y)\, dx$. Por construcción $u_x = A$. Derivando ahora u respecto a y, se obtiene $u_y = \int A_y(x,y)\, dx$. Como $A_y = B_x$ se cumple $u_y = \int B_x(x,y)\, dx = B(x,y)$. Entonces $u_x = A$, $u_y = B$, lo que quiere decir que $\operatorname{grad}(u) = \vec{X}$. Siendo $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ curvas cerradas, y siendo $\vec{X}$ un campo de gradientes, la circulación de $\vec{X}$ a lo largo tanto de $\mathcal{C}$ como de $\mathcal{E}$ es cero, y por lo tanto es igual en ambas curvas, como se quería demostrar.

10. Sea la superficie parametrizada

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & v^2 + e^u \cos v \\ & & \\ y & = & 1 + e^v \cos u \\ & & \\ z & = & u^2 + e^u \cos v \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} -\pi < u < +\pi \\ \\ -\pi < v < \pi \end{array}$$

Entonces, la superficie pasa por el punto (1,2,1) cuando $(u, v) = (0, 0)$ y su plano tangente en ese punto es:

I) No existe plano tangente en ese punto.

II) $x - y + z = 0$

III) $y = 2$

IV) $x + z - 2 = 0$

V) $x - z = 0$

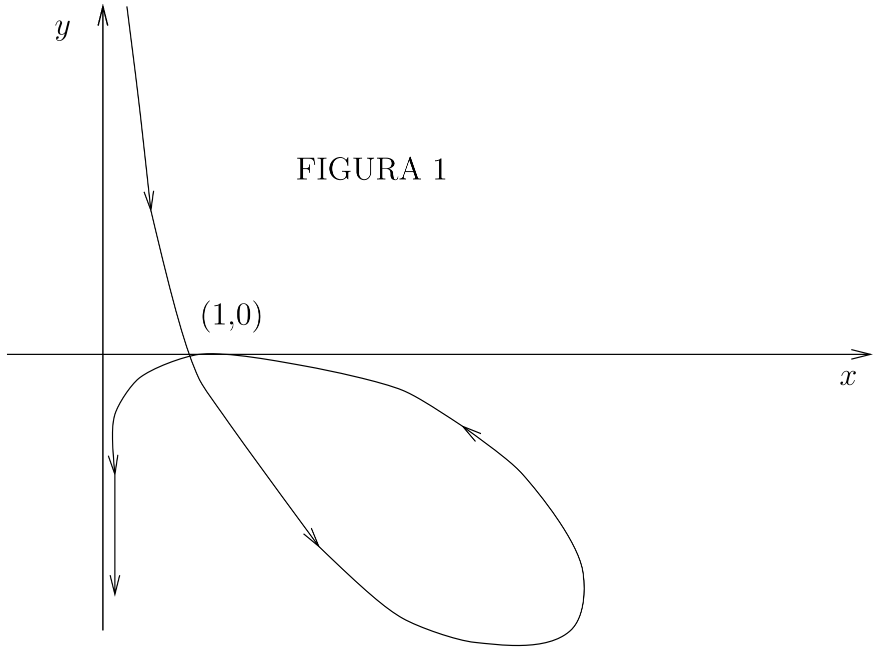

FIGURA 1

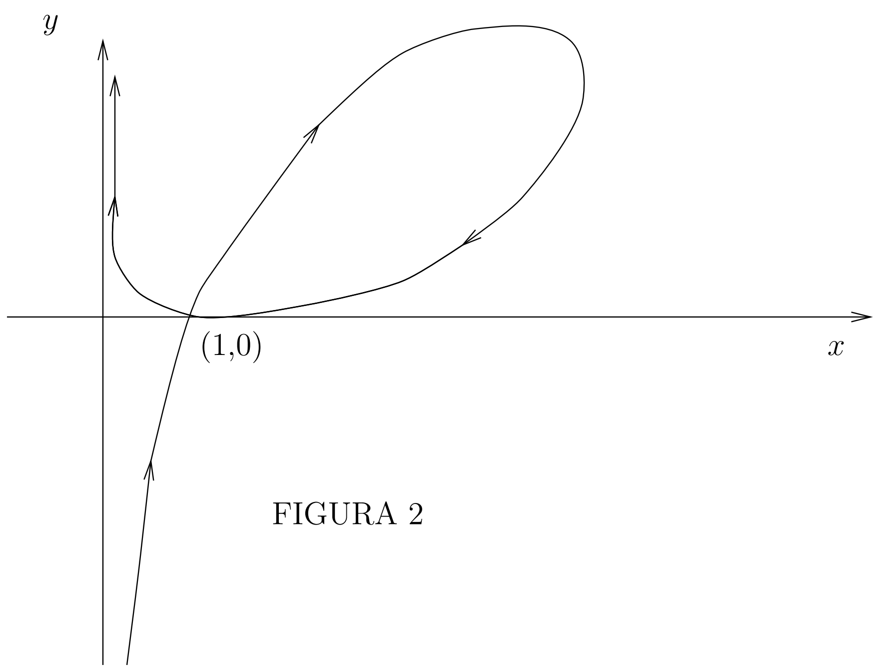

FIGURA 2

OTRO EJEMPLO DE PRIMER PARCIAL DE CALCULO III

RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
iii	ii	iii	v	i	iv	iii	iv	v	ii

1. Se da la curva plana, cerrada y simple, parametrizada por:

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2 \\ x = r\ sen(t-\pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \leq \pi \\ y = r\,\mathrm{sen}^3 t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2 \\ y = r\ cos(t-\pi/2) & \text{si } \pi/2 < t \leq \pi \end{cases}$$

La longitud L de la curva y el área A encerrada por ella son:

I) $L = (6+\pi)r$, $A = 11\pi r^2/16$

II) $L = (6+\pi)r$, $A = 5\pi r^2/16$

III) $L = (3+\pi)r/2$, $A = 5\pi r^2/16$

IV) $L = (3+\pi)r/2$, $A = 11\pi r^2/16$

V) Las opciones anteriores son incorrectas

2. Se da el campo:

$$\vec{X} = \left(\frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2}\ ,\ \frac{2(1-x)y}{((x-1)^2+y^2)^2} \right)$$

definido en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$.

Sea $f(x,y) = (x-y-1)\ /\ ((x-1)^2+y^2)$ definida en Ω.

Entonces:

I) $\vec{X}$ no es un campo de gradientes en Ω, pero sí lo es en $\mathbb{R}^2 - \{y=0,\ x \geq 1\}$, aunque f no es potencial escalar de $\vec{X}$.

II) $\vec{X}$ es un campo de gradientes en Ω aunque f no es su potencial escalar.

III) $\vec{X}$ es un campo de gradientes en Ω y f es su potencial escalar.

IV) $\vec{X}$ no es un campo de gradientes en Ω, pero sí lo es en $\mathbb{R}^2 - \{y=0,\ x \geq 1\}$ y f es su potencial escalar.

V) f no es potencial escalar de $\vec{X}$, y $\vec{X}$ no es un campo de gradientes en Ω ni en ningún subconjunto abierto de Ω.

3. Se da la curva parametrizada por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\cos^3 t \\ & & \\ y & = & 2\ \operatorname{sen}^3 t \end{array} \right. \quad \pi/2 \le t \le \pi$$

El radio de curvatura $R(t)$ y la longitud de arco $s(t)$ (tal que $s(\pi/2) = 0, s(t) \ge 0$) son:

I) $|R(t)| = 2\ /\ |\cos t\ \operatorname{sen} t|$, $\quad s(t) = 3\cos^2 t$

II) $|R(t)| = 6\ /\ |\cos t\ \operatorname{sen} t|$, $\quad s(t) = 6|\cos t|\ \operatorname{sen} t$

III) $|R(t)| = 6\ |\cos t\ \operatorname{sen} t|$, $\quad s(t) = 3\cos^2 t$

IV) $|R(t)| = 6\ |\cos t\ \operatorname{sen} t|$, $\quad s(t) = 6|\cos t|\ \operatorname{sen} t$

V) $|R(t)| = 6\ /\ |\cos t\ \operatorname{sen} t|$, $\quad s(t) = 3\cos^2 t$

4. Un campo $\vec{X} = (P, Q, R)$ es irrotacional en todo $\mathbb{R}^3$ y además $R(0,0,z) = 2\pi\ \operatorname{sen}(\pi z)$, $P(x,0,2) = (x^3 - 6x^2)/4$.

Calcular la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de la curva parametrizada por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t^2\cos^3(\pi t(t-2)) \qquad 0 \le t \le 2 \\ y & = & e^{t^2}\ sen^3(\pi t(t-2)) \\ z & = & t \end{array} \right.$$

orientada con el parámetro t creciente.

I) 2π

II) cero

III) $e^{-4} - 1$

IV) $1 - e^{-4}$

V) -16

5. Se tiene la forma diferencial lineal

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

tal que $B_x - A_y = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Se sabe que sobre la recta $y = 4x+4$ la función A toma valores $A(x, 4x+4) = -x$ y la función B toma valores $B(x, 4x+4) = 3x^2$.

Calcular $I = \int_{\mathcal{C}} \omega$, siendo $\mathcal{C}$ el arco orientado de la parábola $y = 2(x+1)^2$ con extremo inicial $(-1,0)$ y extremo final $(1,8)$.

I) $I = 8$

II) $I = 7$

III) $I = 4$

IV) $I = 6$

V) $I = -3$

6. Un campo $\vec{X} = (A(x,y)\ ,\ B(x,y))$ es irrotacional en $\ Omega = I\!R^2 - \{(0,0)\}$ y además su primera componente $A(x,y)$ es idénticamente nula si $|y| = 1$, y su segunda componente verifica $B(2,y)3y^2\ ,\ B(-3,y)6y^2$. Su circulación a lo largo de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, recorrida una sola vez en sentido antihorario es:

   I) 2π

   II) cero

   III) 4π

   IV) -2

   V) 6

7. Sean f y g dos funciones escalares definidas y de clase C^2 en R^3. Entonces $\nabla \cdot (\nabla f \wedge \nabla g)$ es necesariamente igual a:

   I) $\Delta(fg)$

   II) $g\Delta f + f\Delta g$

   III) 0

   IV) $g\Delta f - f\Delta g$

   V) $f\Delta g - g\Delta f$

   (El símbolo Δ denota al Laplaciano).

8. Sea la forma diferencial lineal:

$$L = \left(\frac{2xz}{(x^2 + (y-3)^2)^2} + \frac{2(y-3)}{x^2 + (y-3)^2} \right) dx +$$
$$+ \left(\frac{2(y-3)z}{(x^2 + (y-3)^2)^2} - \frac{2x}{x^2 + (y-3)^2} \right) dy + \frac{-1}{x^2 + (y-3)^2}\, dz$$

   definida en $\Omega = I\!R^3 - \{x = 0, y = 3\}$.

   $\mathcal{C}_0$ es la circunferencia $\{z = 0,\ x^2 + (y-3)^2 = 1\}$,

   $\mathcal{C}_1$ es la circunferencia $\{z = 1,\ (x-1)^2 + y^2 = 20\}$,

   recorridas una sola vez con alguna orientación que se elegirá.

   Sean $|I_0|$ e $|I_1|$ los valores absolutos de las integrales de L a lo largo de $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ respectivamente. Entonces:

I) L no es exacta en Ω, e $|I_0| = 4\pi, \quad I_1 = 0$.

II) L es exacta en Ω, e $|I_0| = |I_1| = 4\pi$.

III) L es exacta en Ω, e $I_0 = I_1 = 0$.

IV) L no es exacta en Ω, e $|I_0| = |I_1| = 4\pi$.

V) L no es exacta en Ω, e $|I_0| = 2\pi, \quad I_1 = 0.$.

9. Sea $L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ una uno-forma, con A, B y C funciones reales de clase C^1 definidas en un abierto $\Omega \subset I\!R^3$.

    I) Si L es cerrada entonces es necesariamente exacta en Ω.

    II) Si L no es exacta en Ω entonces necesariamente $\int_{\mathcal{C}} L = 2\pi$ para toda curva cerrada $\mathcal{C}$ en $I\!R^3$ que rodee al eje de las z.

    III) Si L es cerrada entonces necesariamente $\int_{\mathcal{C}_1} L = \int_{\mathcal{C}_2} L$ para toda pareja de curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en Ω con el mismo punto inicial $P \in \Omega$ y el mismo punto final $Q \in \Omega$.

    IV) Si L es cerrada y Ω es conexo, entonces L es necesariamente exacta en Ω.

    V) Si L es cerrada y Ω es simplemente conexo, entonces necesariamente $\int_{\mathcal{C}_1} L = \int_{\mathcal{C}_2} L$ para toda pareja de curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en Ω con el mismo punto inicial $P \in \Omega$ y el mismo punto final $Q \in \Omega$.

10. Se enuncia el siguiente teorema:

    Hipótesis:

    Sea dada la forma diferencial lineal $A\,dx + B\,dy$ definida en $I\!R^2$. Para dos puntos cualesquiera P inicial y Q final, se sabe que $\int_{\mathcal{C}} A\,dx + B\,dy$ es independiente del camino orientado $\mathcal{C}$ que se elija con punto inicial P y punto final Q.

    Tesis:

    La forma diferencial lineal dada es exacta.

    Un esbozo de demostración de este teorema es:

    I) Fijando $P = (x_0, y_0)$ y variando $Q = (x, y)$ en $I\!R^2$, se define $u(x, y) = \int_{\mathcal{C}} A\,dx + B\,dy$. Siendo $\mathcal{S}$ el segmento que une Q con $\tilde{Q} = (x + h, y) \neq Q$, se tiene

    $$\frac{u(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\mathcal{S}} A\,dx + B\,dy = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} A(t,y)\,dt = A(\xi, y)$$

    para ξ entre 0 y h. Tomando $h \to 0$ se obtiene $u_x = A$. Análogamente se prueba que $u_y = B$.

II) Fijando $P=(x_0,y_0)$ y variando $Q=(x,y)$ en $I\!R^2$, se define $u(x,y)=\int_{\mathcal{C}} A\,dx+B\,dy$. Siendo $\mathcal{S}$ el segmento que une Q con $\tilde{Q}=(x+h,y)\neq Q$, se tiene

$$\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_{\mathcal{S}} A\,dx+B\,dy=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} A(t,y)\,dt=A(\xi,y)$$

para ξ entre x y $x+h$. Tomando $h\to 0$ se obtiene $u_x=A$. Análogamente se prueba que $u_y=B$.

III) Fijando $Q=(x_0,y_0)$ y variando $P=(x,y)$ en $I\!R^2$, se define $u(x,y)=\int_{\mathcal{C}} A\,dx+B\,dy$. Siendo $\mathcal{S}$ el segmento que une P con $\tilde{P}=(x-h,y)\neq Q$, se tiene

$$\frac{u(x-h,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_{\mathcal{S}} A\,dx+B\,dy=\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} A(t-h,y)\,dt=A(\xi-h,y)$$

para ξ entre 0 y h. Tomando $h\to x$ se obtiene $u_x=A$. Análogamente se prueba que $u_y=B$.

IV) Fijando $P=(x_0,y_0)$ y variando $Q=(x,y)$ en $I\!R^2$, se define $u(x,y)=\int_{\mathcal{C}} A\,dx$. Siendo $\mathcal{S}$ el segmento que une Q con $\tilde{Q}=(x+h,y)\neq Q$, se tiene

$$\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_{\mathcal{S}} A\,dx=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} A(t,y)\,dt=A(\xi,y)$$

para ξ entre x y $x+h$. Tomando $h\to 0$ se obtiene $u_x=A$. Análogamente se prueba que $u_y=B$.

V) Fijando $P=(x_0,y_0)$ y variando $Q=(x,y)$ en $I\!R^2$, se define $u(x,y)=\int_{\mathcal{C}} A\,dx+B\,dy$. Siendo $\mathcal{S}$ el segmento que une Q con $\tilde{Q}=(x+h,y+h)\neq Q$, se tiene

$$\frac{u(x+h,y+h)-u(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_{\mathcal{S}} A\,dx+B\,dy=\frac{1}{h}\int_0^{h}(A(x+t,y+t)+B(x+t,y+t))\,dt=$$

$=A(x+\xi,y+\xi)$, para ξ entre 0 y h. Tomando $h\to 0$ se obtiene $u_x+u_y=A+B$. Esta última igualdad implica que $u_x=A$ y que $u_y=B$.

EJEMPLOS PARA EL SEGUNDO PARCIAL DE CALCULO III

8 de junio de 1998

RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ii	iv	i	v	v	ii	iv	ii	iii	ii

1. Sea $\vec{X}$ un campo solenoidal en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Se sabe que su primera componente $A(x,y,z)$ verifica $A(4,y,z) = 6y^2 + 2z, \quad A(-3,y,z) = y + z^2$; su segunda componente es nula si $|y| = 2$; y su tercera componente es nula si $|z| = 3$. Hallar el flujo de $\vec{X}$ a través de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1, con la normal hacia el exterior.

   I) 264
   II) 120
   III) 14
   IV) 50
   V) 60

2. Sea $\mathcal{S}$ la superficie del cubo de centro en el origen, de lados de longitud 1, paralelos a los ejes coordenados ortogonales, orientada con la normal $\vec{n}$ saliente.
   Sean $V = x + y^2 + z$, $U = \cos \pi x + z^2$. Calcular

$$\int\!\!\int_{\mathcal{S}} U \frac{dV}{dn}\, dS$$

   (Se recuerda que $\frac{dV}{dn} = \mathrm{grad} V \cdot \vec{n}$.)

   I) $4/\pi + 2/3$.
   II) $8/\pi + 1/3$.
   III) $2/\pi + 1/6$.
   IV) $4/\pi + 1/6$.
   V) $2/\pi + 2/3$.

3. Calcular el volumen encerrado por la superficie acotada cerrada, parametrizada por:

$$\begin{cases} x = u/3 & -3 \le u \le 3 \\ y = (3 - |u|)\cos v & 0 \le v \le 2\pi \\ z = (6 - 2|u|)\,\mathrm{sen}\, v & \end{cases}$$

I) 6π
II) 12π
III) 36π
IV) 18π
V) 3π

4. La derivada exterior de la forma diferencial $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ es:

   I) $(A_x + B_y + C_z)\,dx\,dy\,dz$
   II) $(A_x + B_x + C_x)\,dx + (A_y + B_y + C_y)\,dy + (A_z + B_z + C_z)\,dz$
   III) $A_x\,dy\,dz + B_y\,dz\,dx + C_z\,dx\,dy$
   IV) $(B_z - C_y)\,dy\,dz + (C_x - A_z)\,dz\,dx + (A_y - B_x)\,dx\,dy$
   V) ninguna de las anteriores.

5. Calcular el flujo de $\vec{X}$ a través de la superficie $z = x^2 + y^2 - 1, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$, con la normal orientada de modo que su tercera componente sea negativa.

   Se sabe que $\vec{X}$ es solenoidal en todo $I\!R^3$, que en el plano $z = 2$ toma valores $\vec{X}(x, y, 2) = (xe^y, ye^x, 4x^2)$, y que en el plano $z = 0$ toma valores $\vec{X}(x, y, 0) = (xe^y, ye^x, 0)$.

   I) -8π
   II) 8π
   III) 9π
   IV) cero
   V) -9π

6. El teorema de Stokes bajo hipótesis adecuadas, afirma que $\iint_{\mathcal{S}} dL = \int_{\mathcal{C}} L$, siendo $L = a\,dx + b\,dy + c\,dz$.

   Un esbozo de demostración es: Parametrizando $\mathcal{S}$ con parámetros $(u, v) \in \Sigma$, se tiene una transformación que lleva la región plana Σ en S, y lleva el borde Γ de Σ, en la curva $\mathcal{C}$ que es borde de $\mathcal{S}$.

   Se prueba, para funciones A y B adecuadas, que $\int_{\mathcal{C}} L = \int_{\Gamma} A\,du + B\,dv$, y que $\iint_{\mathcal{S}} dL = \iint_{\Sigma} (B_u - A_v)\,du\,dv$. Como en el plano u, v se tiene que $\iint_{\Sigma} (B_u - A_v)\,du\,dv = \int_{\Gamma} A\,du + B\,dv$, se deduce la tesis.

   I) La demostración es correcta, siendo $A = a_x + b_y$ y $B = c_z - b_y$.
   II) La demostración es correcta, siendo $A = ax_u + by_u + cz_u$, y $B = ax_v + by_v + cz_v$.
   III) La demostración es incorrecta

IV) La demostración es correcta, siendo $A = a_u + b_u + c_u$ y $B = a_v + b_v + c_v$.

V) La demostración es correcta, pero las funciones A y B no son las especificadas en las opciones anteriores.

7. Sea $\vec{X}$ un campo irrotacional en todo el espacio $I\!R^3$. Sea f una función escalar, y sea $\mathcal{S}$ una superficie acotada y orientada de $I\!R^3$, cuyo borde es una curva cerrada $\mathcal{C}$, orientada positivamente respecto a $\mathcal{S}$. Se indica con $\vec{n}$ al versor normal a la superficie orientada $\mathcal{S}$.

   La circulación de $f\vec{X}$ a lo largo de $\mathcal{C}$ es igual a:

   I) $\iint_{\mathcal{S}} \nabla f \cdot \vec{n}\, dS$

   II) $\iint_{\mathcal{S}} (f\nabla \wedge \vec{X}) \cdot \vec{n}\, dS$

   III) $\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \cdot \vec{X})\nabla f \cdot \vec{n}\, dS$

   IV) $\iint_{\mathcal{S}} (\nabla f \wedge \vec{X}) \cdot \vec{n}\, dS$

   V) cero.

8. Se tienen los campos E y H en $I\!R^3$ que dependen del tiempo t y cumplen las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \wedge E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \wedge H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot E = 0$$
$$\nabla \cdot H = 0$$

   Cada una de las componentes u de E y de H verifica la siguiente ecuación de ondas:

   I) $\Delta u = 0$

   II)
$$\Delta u = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

   III)
$$c\nabla \wedge (\nabla u) + \frac{1}{c} u_{tt} = 0$$

   IV) $c\nabla \wedge (\nabla u) = 0$

   V) $u_{tt} = u_x + u_y + u_z$

9. La función escalar $u(x, y)$ verifica la ecuación de Laplace en un abierto de $I\!R^2$ que contiene al círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Se sabe que los valores de u sobre la circunferencia $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$, son $u(\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos 4t$. Entonces la función u cumple:

I) $u(0,0) = 1/2, \quad u(1/2, 1/2) = -1/16, \quad u(1/2, 0) = 1/4$

II) $u(0,0) = 1/2, \quad u(1/2, 1/2) = -1/4, \quad u(1/2, 0) = 1/16$

III) $u(0,0) = 0, \quad u(1/2, 1/2) = -1/4, \quad u(1/2, 0) = 1/16$

IV) $u(0,0) = 0, \quad u(1/2, 1/2) = -1/4, \quad u(1/2, 0) = 1/4$

V) $u(0,0) = 1/2, \quad u(1/2, 1/2) = -1/4, \quad u(1/2, 0) = 1/4$

10. Sea

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

definida en el abierto $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$.

Sea $\mathcal{S}$ la superficie de una esfera de centro $(a, 0, 0)$ y radio 1, donde a es una constante mayor que 1.

Entonces:

I) Φ verifica la ecuación de Laplace en Ω y la integral de Φ sobre $\mathcal{S}$ es $1/a$.

II) Φ verifica la ecuación de Laplace en Ω y la integral de Φ sobre $\mathcal{S}$ es $4\pi/a$.

III) Φ verifica la ecuación de Laplace en Ω y la integral de Φ sobre $\mathcal{S}$ es $a/4\pi$.

IV) Φ verifica la ecuación de Laplace en Ω y la integral de Φ sobre $\mathcal{S}$ es *cero*.

V) Φ no verifica la ecuación de Laplace en Ω.

OTRO EJEMPLO DE SEGUNDO PARCIAL DE CALCULO III

RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ii	i	iv	iv	v	i	i	iii	ii	iv

1. El producto exterior $L_1 L_2$ de las uno-formas:

   $L_1 = (y + z^2)\,dx + zx\,dz$

   $L_2 = z\,dx + (y^2 + 2z)\,dy + (x + y^2)\,dz$

   es:

   I) $L_1 L_2 = (xy^2 z + 2xz^2)\,dy\,dz + (xy + y^3 + y^2 z^2)\,dz\,dx + (y^3 + 2yz + y^2 z^2 + 2z^3)\,dx\,dy$
   II) $L_1 L_2 = (xy^2 z + 2xz^2)\,dz\,dy + (xy + y^3 + y^2 z^2)\,dx\,dz - (y^3 + 2yz + y^2 z^2 + 2z^3)\,dy\,dx$
   III) $L_1 L_2 = (zy + z^3)\,dy\,dz + (x^2 z + xy^2 z)\,dx\,dy$
   IV) $L_1 L_2 = (zy + z^3)\,dx\,dx + (x^2 z + xy^2 z)\,dz\,dz$
   V) Ninguna de las anteriores

2. Sea el campo

$$\vec{X} = (xz - 2yz,\;\; y - yz,\;\; 2xy - z)$$

   I) Existe un campo $(A, B, 0)$ que es potencial vector de $\vec{X}$ en todo $\mathbb{R}^3$ y que cumple $A(x,0,0) = 0$, $B(x,y,0) = 0$, $A(-1,2,1) = 5$.
   II) Existe un campo $(A, B, 0)$ que es potencial vector de $\vec{X}$ en todo $\mathbb{R}^3$ y que cumple $A(x,0,0) = 0$, $B(x,y,0) = 0$, $A(-1,2,1) = -3$.
   III) Existe un campo $(A, B, 0)$ que es potencial vector de $\vec{X}$ en todo $\mathbb{R}^3$ y que cumple $A(x,0,0) = 0$, $B(x,y,0) = 0$, $A(-1,2,1) = 7$.
   IV) Existe un campo $(A, B, 0)$ que es potencial vector de $\vec{X}$ en todo $\mathbb{R}^3$ y que cumple $A(x,0,0) = 0$, $B(x,y,0) = 0$, $A(-1,2,1) = 1$.
   V) No existe ningún campo que sea potencial vector de $\vec{X}$ en todo $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $\vec{X}$ un campo de clase C^1 definido en todo $\mathbb{R}^3$, tal que su segunda componente es idénticamente nula, y su primera componente $A(x,y,z)$ verifica $A(x,0,0) = 3x^2$, $A(x,5,0) = 8x^3$. No se conoce ningún dato sobre su tercera componente.

   Hallar el flujo del rotor de $\vec{X}$ a través de la superficie con borde, parametrizada por:

$$\begin{cases} x = 2u & 0 \le u \le 1 \\ y = 5v & 0 \le v \le 1 \\ z = 8uv(1-u)(1-v) & \end{cases}$$

orientada con la normal con tercera componente positiva.

(Sugerencia: Usar el teorema de Stokes.)

I) 40
II) 24
III) cero
IV) -24
V) -40

4. Calcular el volumen encerrado por la superficie acotada cerrada, parametrizada por:

$$\begin{cases} x = 3a\cos\phi\ \operatorname{sen}\theta & 0 \le \phi \le 2\pi \\ y = b\ \operatorname{sen}\phi\ \operatorname{sen}\theta & 0 \le \theta \le \pi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$$

I) $16\pi abc/3$
II) $12\pi abc$
III) $4\pi abc/3$
IV) $4\pi abc$
V) πabc

5. La función escalar $u(x, y)$ verifica la ecuación de Laplace en un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene al círculo $x^2 + y^2 \le (1/4)$. Se sabe que los valores de u sobre la circunferencia $x = (1/2)\cos t,\ y = (1/2)\ \operatorname{sen} t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$, son $u((1/2)\cos t,\ (1/2)\ \operatorname{sen} t) = 8\ \operatorname{sen} 6t + 4\cos 2t$. Entonces la función u cumple:

I) $u(0, 0) = 64,\ \ u(1/4, 1/4) = 1,\ \ u(1/4, 0) = 0$
II) $u(0, 0) = 0,\ \ u(1/4, 1/4) = -1,\ \ u(1/4, 0) = 0$
III) $u(0, 0) = 64,\ \ u(1/4, 1/4) = 0,\ \ u(1/4, 0) = 1$
IV) $u(0, 0) = 0,\ \ u(1/4, 1/4) = 0,\ \ u(1/4, 0) = 1$
V) $u(0, 0) = 0,\ \ u(1/4, 1/4) = -1,\ \ u(1/4, 0) = 1$

6. Sea $r^2 = x^2 + (y - 2)^2 + z^2$.

Sean los dos campos

$$\vec{X} = \left(\frac{y-2}{r^2}\ ,\ \frac{-x}{r^2}\ ,\ 6z\right) \quad , \quad \vec{W} = (0\ ,\ 0\ ,\ 6z)$$

definidos en $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 2, 0)\}$.

Sea F_1 el flujo de $\vec{X}$ a través del elipsoide $x^2 + 9(y-2)^2 + 4z^2 = 1$, con la normal saliente.

Sea F_2 el flujo de $\vec{W}$ a través del mismo elipsoide.

Sea F_3 el flujo de $\vec{X} - \vec{W}$ a través de la esfera $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$, con la normal saliente.

Entonces:

I) $F_1 = F_2 = 4\pi/3\ ,\ F_3 = 0$

II) $F_1 = 4\pi/3\ ,\ F_2 = F_3 = 0$

III) $F_1 = F_2 = F_3 = 4\pi/3$

IV) $F_1 = 2\pi\ ,\ F_2 = 4\pi/3\ ,\ F_3 = 0$

V) $F_1 = F_3 = 0\ ,\ F_2 = 4\pi/3$

(Sugerencia: Observar que $\vec{X} - \vec{W}$ es solenoidal en Ω).

7. Sea ω una dos-forma diferencial de clase C^1 en todo $I\!R^3$. Se proponen las siguientes afirmaciones:

(A) Si existe una uno-forma L tal que $\omega = dL$ en todo $I\!R^3$, entonces $d\omega = 0$.

(B) Si $d\omega = 0$ en todo $I\!R^3$, entonces ω es exacta en $I\!R^3$.

(C) Si $d\omega \neq 0$ entonces ω no es exacta en $I\!R^3$.

I) Las afirmaciones (A), (B) y (C) son correctas.

II) Las afirmaciones (A) y (B) son ciertas pero la (C) es falsa.

III) Las afirmaciones (A) y (B) son falsas pero la (C) es correcta.

IV) Las afirmaciones (A) y (C) son ciertas pero la (B) es falsa.

V) Las afirmaciones (A) y (C) son falsas pero la (B) es cierta.

8. Hallar el área de la superficie:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2u \operatorname{sen} v \\ y & = & 2u \cos v \\ z & = & e^{-u} + e^{u} \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} 0 \le v \le \pi/2 \\ 0 \le u \le 1 \\ \end{array}$$

I) 2π

II) $2\pi(e-1)$

III) $2\pi(1-e^{-1})$

IV) $4\pi(e-e^{-1})$

V) 4π

9. Sea el campo:
$$\vec{X} = \frac{1}{r^3}(x, y, z)$$
definido en $\Omega = I\!R^3 - \{(0,0,0\}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Para demostrar que no toda dos-forma diferencial cerrada en Ω es exacta:

I) Basta demostrar que $\vec{X}$ es un campo de rotores y que es solenoidal en Ω.

II) Basta demostrar que $\vec{X}$ es solenoidal en Ω y que su flujo a través de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 no es cero.

III) Basta demostrar que $\vec{X}$ es irrotacional en Ω y que su circulación a lo largo de alguna curva cerrada no da cero.

IV) Basta demostrar que $\vec{X}$ es un campo de gradientes en Ω y que es irrotacional.

V) No alcanza con estudiar el campo $\vec{X}$ sino que hay que probar que todos los campos de rotores son solenoidales.

10. Sea $u(x, y, z)$ una función que verifica la ecuación de Laplace en un abierto de $I\!R^3$ que contiene a la superficie esférica S de centro (x_0, y_0, z_0) y radio r, y a su interior. El teorema del valor medio afirma que
$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_S u\, dS$$
Un esbozo de demostración de este teorema consiste en considerar $0 < \rho \leq r$ y la esfera S_ρ de centro (x_0, y_0, z_0) y radio ρ. Escribiendo (x, y, z) en coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ), la función u queda expresada en función de estas coordenadas. Luego:

I) Aplicando el teorema de Gauss y usando que u satisface la ecuación de Laplace se obtiene que $\iint_{S_\rho} u\, dS = 0$. Sacando ρ^2 de factor y multiplicando por r^2 se obtiene $\iint_S u\, dS = 0$. Luego $0 = \int_0^r d\rho \iint_S u\, dS = \iint_S dS \int_0^r u\, d\rho = \iint_S (u - u(x_0, y_0, z_0))\, dS = \iint_S u\, dS - 4\pi r^2 u(x_0, y_0, z_0)$, lo cual prueba la tesis.

II) Aplicando el teorema de Gauss y usando que u satisface la ecuación de Laplace se obtiene que $\iint_{S_\rho} u\, dS = 0$. Sacando ρ^2 de factor y multiplicando por r^2 se obtiene $\iint_S r^2 u\, dS = 0$. Luego $0 = \int_0^r d\rho \iint_S r^2 u\, dS =$
$= \iint_S dS \int_0^r r^2 u\, d\rho = \iint_S (u - r^2 u(x_0, y_0, z_0))\, dS = \iint_S u\, dS - 4\pi r^2 u(x_0, y_0, z_0)$, lo cual prueba la tesis.

III) Aplicando el teorema de Gauss y usando que u satisface la ecuación de Laplace se obtiene que $\iint_{S_\rho} u_\rho\, dS = 0$. Sacando ρ^2 de factor y multiplicando por r^2 se obtiene $\iint_S (r^2 \rho^2 u_\rho\, dS = 0$. Luego $0 = \int_0^r d\rho \iint_S r^2 \rho^2\, u_\rho\, dS = \iint_S dS \int_0^r r^2 \rho^2 u_\rho\, d\rho = \iint_S r^2 (\rho^3/3)\, (u|_{\rho=r} - u(x_0, y_0$
$(\rho^3/3)\, (\iint_S u\, dS - 4\pi r^2 u(x_0, y_0, z_0))$, lo cual prueba la tesis.

IV) Aplicando el teorema de Gauss y usando que u satisface la ecuación de Laplace se obtiene que $\iint_{S_\rho} u_\rho \, dS = 0$. Sacando ρ^2 de factor y multiplicando por r^2 se obtiene $\iint_S u_\rho \, dS = 0$. Luego $0 = \int_0^r d\rho \iint_S u_\rho \, dS =$
$= \iint_S dS \int_0^r u_\rho \, d\rho = \iint_S \left(u|_{\rho=r} - u(x_0, y_0, z_0)\right) \, dS = \iint_S u \, dS - 4\pi r^2 u(x_0, y_0, z_0)$, lo cual prueba la tesis.

V) Todas las opciones anteriores son incorrectas.

EJEMPLOS PARA LOS EXAMENES DE CALCULO III

- A partir de julio de 1999, los exámenes de Cálculo III constarán de dos partes que se tomarán juntas, durando en total 4 horas.
- La PRIMERA PARTE será práctica, o teórico-práctica. Constará de 10 preguntas de múltiple opción como la de los parciales. Cada respuesta correcta valdrá 8 puntos, incorrecta -2 puntos, y sin contestar 0 punto. Esta parte vale un máximo de 80 puntos.
- La SEGUNDA PARTE será teórica. Constará de 2 preguntas para responder por escrito. Una lista de ejemplos de este tipo de preguntas se encuentra a continuación. Cada pregunta bien y completamente contestada, a juicio del tribunal, valdrá 10 puntos, no habiendo puntaje negativo para respuestas incorrectas. Esta parte vale un máximo de 20 puntos, sumando 100 puntos todo el examen.
- Para aprobar deberá computarse un mínimo de 40 puntos en la primera parte y una pregunta bien y completamente contestada de la segunda parte (ambas condiciones a la vez).
- La nota mínima de aprobación será 3 (R-R-R) y la máxima 12 (S-S-S).

Se formularán en el examen dos preguntas de teórico, independientemente de lo que se haya visto en clase, de cualquiera de los temas de:

- las secciones del Courant incluidas para el primer o segundo parcial del curso (las listas de estas secciones están en el repartido de Ejercicios de Cálculo III, antes de los ejemplos de parciales);
- de algún ejercicio del repartido;
- de los ejemplos de parciales.

Los enunciados y demostraciones que dé el estudiante no tienen que ceñirse al texto del curso, ni a lo expuesto en clase. Puede utilizarse como fuente otra bibliografía. Errores u omisiones en esa fuente no justificarán respuestas incorrectas o incompletas. No se considerará completa una prueba si esta consiste en un esquema de los pasos a seguir, o si no se justifica cada paso.

Las siguientes preguntas son sólo ejemplos para orientar al estudiante. No es una lista exhaustiva de las preguntas que podrán hacerse en el examen.

1. Definir y calcular en función del parámetro, la curvatura de una curva plana parametrizada.
2. Demostrar que el área encerrada por una curva plana, cerrada y simple es igual a $(1/2)\int_C x\,dy - y\,dx$. (Si se usa el teorema de Gauss, demostrar este teorema).
3. Enunciar y demostrar el teorema fundamental de las uno-formas exactas (o de los campos de gradientes).

4. Demostrar que un campo $\vec{X}$ es de gradientes en un abierto Ω de $I\!R^3$ si y sólo si $\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{ds}$ es independiente del camino orientado $\mathcal{C} \subset \Omega$ que une dos extremos cualesquiera P y Q en Ω (pudiendo depender de P y Q).

5. Demostrar que si $\vec{X}$ es solenoidal en un paralelepípedo $\Omega \subset I\!R^3$ de lados paralelos a los ejes, entonces existe un potencial vector de $\vec{X}$ en Ω.

6. Enunciar y demostrar el teorema de Gauss en el plano.

7. Enunciar y demostrar el teorema de Gauss en el espacio.

8. Enunciar y demostrar los dos teoremas de Green en el plano (fórmulas o identidades de Green).

9. Enunciar y demostrar los dos teoremas de Green en el espacio (fórmulas o identidades de Green).

10. Enunciar y demostrar el teorema de Stokes en el plano. (Si se usa el teorema de Gauss, demostrar este teorema).

11. Enunciar y demostrar el teorema de Stokes en el espacio. (Si se usa el teorema de Gauss o de Stokes en el plano, enunciarlo, sin necesidad de demostrarlo).

12. Enunciar y demostrar la primera forma fundamental para superficies.

13. Definir flujo de un campo vectorial a través de una superficie orientada y probar que no depende de la parametrización elegida para la superficie.

14. Demostrar que toda uno o dos-forma diferencial exacta en un abierto $\Omega \subset I\!R^3$ es cerrada, pero que el recíproco no es cierto.

15. Enunciar y demostrar el teorema del valor medio para funciones $u(x, y, z)$ que verifican la ecuación de Laplace.

16. Demostrar existencia y unicidad de la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el círculo de centro $(0, 0)$ y radio R, tal que $u(R \cos t, R \operatorname{sen} t) = A \cos nt + B \operatorname{sen} nt$, con A y B reales dados, y n natural dado.

17. Demostrar a partir de las ecuaciones de Maxwell que los campos eléctrico y magnético en el vacío verifican la ecuación de ondas.

EJEMPLO DE EXAMEN DE CALCULO III

Julio de 1999.

Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
iii	iv	i	v	iii	ii	v	iv	i	iv

- El examen tiene dos partes sumando 100 puntos en total (80 de la primera parte y 20 de la segunda).
- La primera parte consta de 10 ejercicios de múltiple opción. Cada respuesta correcta vale 8 puntos, incorrecta -2 puntos y sin responder 0 punto.
- La segunda parte consta de dos preguntas para responder por escrito, que valen un máximo de 10 puntos cada una, sin puntaje negativo.
- El mínimo para aprobar es de 40 puntos en la primera parte junto con una pregunta de la segunda parte bien y completamente contestada (10 puntos).
- Marcas fuera del cuadro de respuestas de la primera parte no serán consideradas.
- La duración del examen es de cuatro horas.

EC 3211

PRIMERA PARTE

1. Se da la curva plana parametrizada por:

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ y = t^3 \end{cases}$$

La longitud de arco $s(t)$ es:

I) $t\sqrt{9t^2+4}$
II) $\sqrt{2t+3t^2}$
III) $((\sqrt{(9t^2+4)^3})-8)/27$
IV) $((\sqrt{t^3})-8)/27$
V) Ninguna de las anteriores.

2. Se da el campo:
$$\vec{X} = \left(\frac{y}{(x-2)^2+y^2} \quad , \quad \frac{2-x}{(x-2)^2+y^2} \right)$$
definido en $\Omega = I\!R^2 - \{(2,0)\}$.
Sea $f(x,y) = (x-y-2)/[(x-2)^2+y^2]$ definida en Ω.
Entonces:

   I) f no es potencial escalar de $\vec{X}$, y $\vec{X}$ no es un campo de gradientes en Ω ni en ningún subconjunto abierto de Ω.
   II) $\vec{X}$ es un campo de gradientes en Ω, pero f no es su potencial escalar.
   III) $\vec{X}$ es un campo de gradientes en Ω y f es su potencial escalar.
   IV) $\vec{X}$ no es un campo de gradientes en Ω, pero sí lo es en $I\!R^2 - \{y=0,\ x \geq 2\}$, aunque f no es su potencial escalar.
   V) $\vec{X}$ no es un campo de gradientes en Ω, pero sí lo es en $I\!R^2 - \{y=0,\ x \geq 2\}$ y f es su potencial escalar.

(Se sugiere calcular el rotor de $\vec{X}$ y su circulación a lo largo de una circunferencia centrada en $(2,0)$).

3. Sea la forma diferencial lineal
$$L = \frac{-x^2+(y-3)^2}{(x^2+(y-3)^2)^2}\,dx - \frac{2x(y-3)}{(x^2+(y-3)^2)^2}\,dy$$
definida en $\Omega = I\!R^2 - \{(0,3)\}$. Sean
$$I_0 = \int_{\mathcal{C}_0} L, \quad I_1 = \int_{\mathcal{C}_1} L,$$
donde
$\mathcal{C}_0$ es la circunferencia de centro $(0,3)$ y radio 1,
$\mathcal{C}_1$ es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 4,
recorridas una sola vez en sentido antihorario.
Entonces:

I) L es exacta en Ω, e $I_0 = I_1 = 0$.

II) L no es exacta en Ω, e $I_0 = I_1 = 2\pi$.

III) L no es exacta en Ω, e $I_0 = 0,\ I_1 = -4\pi$.

IV) L es exacta en Ω, e $I_0 = I_1 = 2\pi$.

V) L no es exacta en Ω, e $I_0 = I_1 = 0$.

(Sugerencia: L es cerrada en Ω).

4. Se tiene la forma diferencial lineal
$$f\,dy - g\,dx$$
tal que $f_x + g_y = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se sabe que sobre la recta $y = 1 - 2x$ la función f toma valores $f(x, 1 - 2x) = 3x^5$ y la función g toma valores $g(x, 1 - 2x) = 3x^2$.

   Calcular $I = \int_{\mathcal{C}} f\,dy - g\,dx$, siendo $\mathcal{C}$ el arco orientado de la parábola $y = 2x^2 - 4x + 1$ con extremo inicial $(0, 1)$ y extremo final $(1, -1)$.

   I) $I = 0$

   II) $I = -9/7$

   III) $I = 2$

   IV) $I = 9/7$

   V) $I = -2$

5. La función escalar $u(x, y)$ verifica la ecuación de Laplace en un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene al círculo $x^2 + y^2 \leq 1/4$. Se sabe que los valores de u sobre la circunferencia $x = (1/2)\cos t,\ y = (1/2)\operatorname{sen} t,\quad 0 \leq t \leq 2\pi$, son $u((1/2)\cos t, (1/2)\operatorname{sen} t) = 64\ \operatorname{sen} 6t$. Entonces la función u cumple:

   I) $u(0, 0) = 64,\ \ u(1/4, 1/4) = 0,\ \ u(1/4, 0) = 1$

   II) $u(0, 0) = 0,\ \ u(1/4, 1/4) = 0,\ \ u(1/4, 0) = 0$

   III) $u(0, 0) = 0,\ \ u(1/4, 1/4) = -8,\ \ u(1/4, 0) = 0$

   IV) $u(0, 0) = 64,\ \ u(1/4, 1/4) = 8,\ \ u(1/4, 0) = 0$

   V) $u(0, 0) = 0,\ \ u(1/4, 1/4) = 8,\ \ u(1/4, 0) = 1$

6. Calcular el volumen encerrado por la superficie cerrada y acotada parametrizada por
$$\left\{ \begin{array}{lcll} x & = & 3(1 - 64u^2)\cos v & \quad -(1/8) \leq u \leq 1/8 \\ y & = & 3(1 - 64u^2)\operatorname{sen} v & \quad 0 \leq v \leq 2\pi \\ z & = & 5u & \end{array} \right.$$

   I) 2π

II) 6π

III) $3\pi/2$

IV) 18π

V) 9π

7. Sea $\vec{X}$ un campo solenoidal en todo $I\!R^3$. Su primera componente es $4(x^2+y^2+z^2)$. Hallar el flujo de $\vec{X}$ a través de la semiesfera $\{x^2+y^2+z^2=4\ ,\ x\geq 0\}$, orientada de modo que la primera componente de la normal sea positiva.

   (Sugerencia: aplicar el teorema de Gauss).

   I) 16π.

   II) 8π.

   III) 64π.

   IV) cero

   V) 32π.

8. Sea $\vec{X}$ un campo de clase C^1 definido en todo $I\!R^3$, tal que su primera componente $A(x,y,z)$ es idénticamente nula, y su segunda componente $B(x,y,z)$ verifica $B(0,y,0)=0,\ \ B(1,y,0)=8y^3$. No se conocen datos sobre su tercera componente $C(x,y,z)$.

   Hallar el flujo del rotor de X a través de la superficie con borde, parametrizada por:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x & = & u & \qquad\qquad & 0\leq u\leq 1\\ y & = & v & & 0\leq v\leq 1\\ z & = & uv(1-u)(1-v) & & \end{array}\right.$$

   orientada con la normal con tercera componente positiva.

   (Sugerencia: Usar el teorema de Stokes.)

I) 1
II) 4
III) cero
IV) 2
V) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta, porque el resultado depende de la función $C(x, y, z)$.

9. Sea $\vec{X}$ un campo irrotacional en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Sea I su circulación a lo largo de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, orientada en sentido antihorario. Se proponen las siguientes afirmaciones:

   (A) Si $I = 0$ entonces $\vec{X}$ necesariamente es un campo de gradientes en Ω.

   (B) Si $\vec{X}$ es un campo de gradientes en Ω, entonces necesariamente $I = 0$.

   (C) Si $\vec{X}$ no es un campo de gradientes en Ω, entonces necesariamente $I = 2\pi$.

   I) Las afirmaciones (A) y (B) son ciertas pero la (C) es falsa.
   II) Las afirmaciones (A) y (B) son falsas pero la (C) es correcta.
   III) Las afirmaciones (A) y (C) son ciertas pero la (B) es falsa.
   IV) Las afirmaciones (A) y (C) son falsas pero la (B) es cierta.
   V) Las afirmaciones (A), (B) y (C) son falsas.

10. Los campos E y H están definidos en todo R^3, dependen diferenciablemente de una variable real t y verifican las siguientes ecuaciones:

$$\text{rot } E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\text{rot } H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

donde c es constante.

Entonces div $(E \wedge H)$ es necesariamente igual a:

   I)
$$\frac{-1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(H \cdot E)$$

ii)

$$\frac{-1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(H \cdot H)$$

iii)

$$\frac{-1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(H \cdot E)$$

iv)

$$\frac{-1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(H \cdot H + E \cdot E)$$

v)

$$\frac{-1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(H \cdot H + E \cdot E)$$

Sugerencia: Recordar que div $(E \wedge H) = H \cdot \text{rot } E - E \cdot \text{rot } H$.

SEGUNDA PARTE

1. Enunciar y demostrar el teorema de Gauss en el plano.
2. Sea $\vec{X}$ un campo irrotacional en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Demostrar que la circulación de $\vec{X}$ a lo largo de cualquier curva simple cerrada que dé una vuelta alrededor del origen en sentido antihorario es igual a su circulación a lo largo de la circunferencia con centro $(0,0)$ y radio 1, orientada en sentido antihorario. (Enunciar los teoremas que se utilicen).

....