

Dinámica de una red neuronal inhibitoria a grafo completo y con interacciones eficientes

Agustín López de Lacalle,* Mauro Martínez* y Eleonora Catsigeras*

Proyecto “Neurodinámica”.

Resumen

Consideramos un modelo matemático de red con cualquier cantidad finita m de unidades dinámicas (neuronas) que interaccionan mutuamente por impulsos instantáneos inhibitorios. Consideramos redes con grafo completo y pesos de interacciones eficientes en relación a la dinámica libre de cada neurona. Las variables de estado del sistema evolucionan en un cubo m -dimensional $B \subset \mathbb{R}^m$. Consideramos un mapa ρ de retorno a una sección de Poincaré en B , y demostramos que ρ es continuo a trozos y uniformemente contractivo en cada trozo, para una cierta métrica adecuadamente definida en B . Este resultado generaliza a redes heterogéneas y con hipótesis menos restrictivas, algunos teoremas previamente demostrados en la bibliografía.

MSC 2010: Primaria: 34A37; Secundarias: 34C15, 37N25, 92B20

Palabras clave: Red neuronal, contractividad a trozos, mapa de Poincaré.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento dinámico de un modelo matemático de red neuronal inhibitoria con cualquier cantidad finita de neuronas y grafo completo de interacciones sinápticas negativas y suficientemente fuertes. En el Teorema 4.12 demostraremos que la dinámica de la red se reduce al estudio del sistema por iterados de un mapa de Poincaré contractivo a trozos.

La contractividad a trozos del mapa de retorno de Poincaré, permite aplicar a la dinámica de este tipo de redes neuronales, los resultados generales sobre sistemas dinámicos por iterados de mapas contractivos a trozos, como por ejemplo los demostrados en [7, 1, 6, 4]. En particular, bajo ciertas hipótesis adicionales, los mapas contractivos a trozos tienen un atractor formado por una cantidad finita de ciclos límites periódicos. Por ejemplo, en [2] se demuestra que cuando el mapa de retorno de Poincaré de una red neuronal es contractivo

*Instituto de Matemática y Estadística Prof. Ing. Rafael Laguardia (IMERL), Universidad de la República, Uruguay, Correos electrónicos: agustinl@fing.edu.uy; maumart@fing.edu.uy; eleonora@fing.edu.uy. Este trabajo fue realizado en el programa de introducción a la investigación de los dos primeros autores bajo la orientación de Leonardo Barboni y Eleonora Catsigeras en el marco del proyecto mencionado, financiado por L’Oréal-Unesco, Uruguay, 2014-2016.

a trozos y verifica la “propiedad de separación”, entonces genéricamente en la topología C^0 de las transformaciones continuas en cada trozo de contractividad, el atractor está formado por una cantidad finita de ciclos límites periódicos.

La contractividad a trozos del mapa de Poincaré en una red neuronal inhibitoria fue demostrada hasta ahora en hipótesis más restrictivas que las que se asumen en este trabajo. En efecto, en [3] se demuestra la contractividad a trozos para redes inhibitorias con interacciones fuertes y grafo completo, pero en el caso homogéneo. Esto es: todas las neuronas tienen idéntica dinámica libre entre disparos. En [3] se asume además que la ecuación diferencial de la dinámica libre entre disparos es lineal, de la forma $dV_i/dt = -\alpha V_i + \beta$, donde V_i es la diferencia de potencial de membrana en la neurona i , t es el tiempo entre disparos, y α , β son constantes positivas, independientes de V_i y de t , y de i .

En este trabajo, en cambio, consideramos la dinámica libre gobernada por una ecuación diferencial general, de la forma $dV_i/dt = \gamma_i(V_i)$, no necesariamente lineal, y además con funciones γ_i que dependen arbitrariamente de la neurona i .

En [5] se demuestra que las redes neuronales inhibitorias con grafo completo, interacciones fuertes, y neuronas no necesariamente idénticas, pero muy parecidas entre sí, tienen un mapa de Poincaré contractivo a trozos. En este trabajo, en el Teorema 4.12, generalizamos ese resultado previo al caso en que las neuronas (todas inhibitorias) son arbitrariamente diferentes entre sí.

El Teorema 4.12 que demostraremos aquí, es un resultado abstracto relativo, como se dijo más arriba, a la dinámica contractiva a trozos de redes inhibitorias con grafo completo, e interacciones eficientemente fuertes. No tiene restricciones sobre la cantidad (finita) de neuronas en la red. Estas son, en forma abstracta y simplificada, unidades dinámicas acopladas por impulsos, según modelos dinámicos deterministas utilizados en la literatura, por ejemplo, en [8, 9]. El estudio del comportamiento dinámico de este tipo de redes abstractas, es aplicable a la comprensión y diseño de redes idealizadas por medio de un modelo matemático simple, compuestas, por ejemplo, por un gran número de osciladores mutuamente acoplados. Estos modelos aparecen en aplicaciones a la física de LCO (sigla en inglés de “osciladores acoplados por luz”, ver por ejemplo [10, 11]).

También aparecen aplicaciones a la ingeniería de confiabilidad en comunicaciones [14], en el diseño o control de varios tipos de sistemas modelables matemáticamente como redes o subredes dinámicas deterministas, compuestas por una gran cantidad de unidades o “neuronas” artificiales, acopladas por impulsos.

Finalmente, en la bio-ingeniería, la biofísica y la neurociencias, las redes abstractas de unidades dinámicas acopladas modelan matemáticamente ciertos sub-sistemas o subconjuntos de células u otras entidades biológicas, siempre que las mismas estén mutuamente acopladas por interacciones que sean pasibles de ser modeladas matemáticamente en forma determinista.

1.1. Organización de este trabajo.

En la sección 2 definimos el modelo matemático utilizado y las hipótesis empleadas de grafo completo y de interacciones sinápticas eficientes.

En la sección 3 construimos una sección de Poincaré transversal a las órbitas del sistema dinámico que modela la red neuronal, y en ella el mapa ρ de primer retorno, llamado “mapa de Poincaré”. Finalmente, en esta sección, encontramos una expresión matemática de ρ , aplicable sin necesidad de conocer la expresión analítica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales generales que gobiernan el sistema, y ni siquiera la expresión analítica concreta de estas ecuaciones.

En la sección 4 demostramos el Teorema 4.12, que constituye el resultado principal de este trabajo, cuyo enunciado es el siguiente:

El mapa de retorno de Poincaré de una red inhibitoria a grafo completo y con interacciones sinápticas eficientes, es contractivo a trozos. Es decir, el espacio se parte en una cantidad finita de piezas tales que en cada una de ellas el mapa de Poincaré contrae uniformemente las distancias, aunque en la frontera común de dos o más de ellas, el mapa de Poincaré es discontinuo.

2. Redes neuronales inhibitorias con grafo completo

2.1. Descripción general del modelo

Definición 2.1 (Neurona abstracta y umbral de disparo)

Definimos *neurona* como un elemento, o celda, o unidad dinámica, que denotamos como i , cuyo estado en el instante $t \in \mathbb{R}^+$ está dado por una variable real $\Phi_i(t)$, que es solución de una ecuación diferencial

$$\frac{d\Phi_i(t)}{dt} = \gamma_i(\Phi_i),$$

donde γ_i es una función real de variable real dada. Dicha solución está definida entre un valor mínimo $-V_{\min} < 0$ y un umbral $\theta_i > 0$, que depende de la neurona, llamado *umbral de disparo* o también *potencial de umbral*. Por lo tanto

$$\Phi_i(t) \in [-V_{\min}, \theta_i).$$

En el caso de los modelos abstractos más simples de neuronas biológicas, $\Phi_i(t)$ representa la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula, llamada “potencial de membrana” de la neurona, en el instante t .

Definición 2.2 (Disparo de una neurona)

Decimos que la neurona i *dispara* en el instante t , cuando su variable de estado $\Phi_i(t)$ alcanza el potencial de umbral θ_i . Por convención, cuando la neurona i dispara en el instante t , su potencial Φ_i se resetea al valor 0 en forma instantánea. Es decir, Φ_i es discontinua en el instante t siendo su límite por la izquierda (para tiempos menores que t en un entorno de t), igual al potencial de umbral θ_i , y su límite por la derecha (para tiempos mayores que t en un entorno de t), igual a cero.

Definición 2.3 (Interacción sináptica inhibitoria) Definimos la *interacción sináptica* $-h_{ij}$ de la neurona i hacia la neurona j , como la cantidad, con signo, que se suma al

potencial $\Phi_j(t)$ de la neurona j , en todo instante t tal que la neurona i dispare. Dicho de otra manera, h_{ij} es el salto de discontinuidad en la función $\Phi_j(t)$ en todo instante t tal que $\Phi_i(t) = \theta_i$.

Decimos que una interacción sináptica $-h_{ij}$ es *inhibitoria* cuando es estrictamente negativa, es decir: $-h_{ij} < 0$

Ejemplo de grafo completo de red inhibitoria.

Consideramos una red neuronal de $m = 3$ neuronas, cuyo grafo orientado de interacciones sinápticas está representado en la figura 1. En esta red, las neuronas están todas conectadas dos a dos bidireccionalmente.

Definición 2.4 (Red inhibitoria de grafo completo)

Un grafo con una cantidad finita de vértices $i \in I$, y aristas $(i, j) \in I \times I$ direccionadas y pesadas con pesos $-h_{ij}$, representa *una red neuronal inhibitoria de grafo completo* cuando los pesos $-h_{ij}$ son estrictamente negativos para toda arista, y el conjunto de aristas es el de todas las parejas ordenadas (i, j) tales que $i \neq j$.

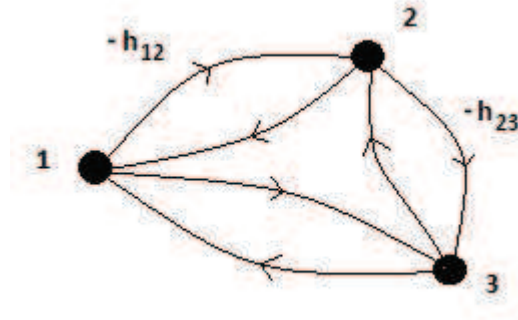


Figura 1: Grafo completo de una red neuronal inhibitoria con $m = 3$ neuronas.

2.2. Dinámica individual de la neurona (“Dinámica libre”)

En esta subsección veremos el modelo matemático que determina la dinámica de una neurona i cuando no interactúa con otras. El potencial membrana $\Phi_i(t)$ es la variable que describe en cada instante t el estado de la neurona. Asumiremos por hipótesis que $\Phi_i(t)$ es la solución de la siguiente ecuación diferencial autónoma, no necesariamente lineal:

$$\dot{\Phi}_i = \gamma_i(\Phi_i), \quad \text{donde} \quad (1)$$

$$\gamma_i(x) > 0, \quad \gamma'_i(x) < 0 \quad \forall \quad x \in [-V_{\min}, \theta_i], \quad (2)$$

con $V_{\min} < 0$ y $\theta_i > 0$ constantes reales.

Definición 2.5 (Régimen entre disparos)

Las condiciones (1) y (2) son, por hipótesis, las que rigen la dinámica que denominamos *régimen entre disparos de la dinámica libre* de la neurona i .

Derivando la ecuación (1) respecto de t , y aplicando después las condiciones (2), obtenemos:

$$\frac{d^2\Phi_i}{dt^2} = \frac{d(d\Phi/dt)}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma_i(\Phi_i)) = \gamma_i(\Phi_i) \cdot \gamma'_i(\Phi_i) < 0$$

Como establecimos por hipótesis que $\gamma_i > 0$ y $\gamma'_i < 0$, la ecuación de arriba implica que la derivada segunda de Φ_i respecto del tiempo es negativa.

Definición 2.6 (Régimen de disparo)

La hipótesis que rige lo que llamaremos *régimen de disparo* de la neurona i es la siguiente:

$$\text{Si } \Phi_i(t_0^-) \geq \theta_i \text{ entonces } \Phi_i(t_0) = 0, \text{ donde} \quad (3)$$

$$\Phi_i(t_0^-) := \lim_{t \rightarrow t_0^-} \Phi_i(t)$$

En los instantes t para los cuales se verifica la condición (3) decimos que la neurona *dispara* y su estado se *resetea a cero* en forma instantánea (Ver Figura 2).

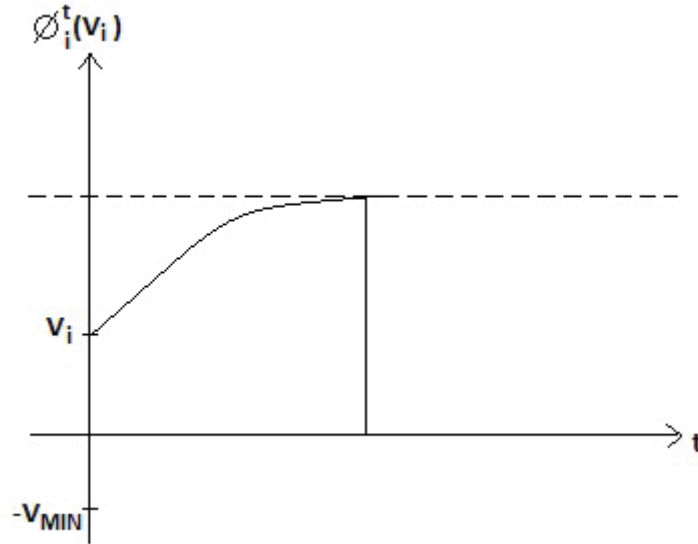


Figura 2: Disparo de una neurona. Cuando su variable de estado alcanza el umbral positivo, se resetea a cero.

Recordemos que el estado de la neurona i en el instante $t \in \mathbb{R}^+$ está descrito por el valor real de la función $\Phi_i(t)$, donde

$$\Phi_i(t) \in X_i = [-V_{\min}, \theta_i]$$

es una solución de la ecuación diferencial (1). Debido a la condición $\gamma_i > 0$ en el compacto X_i , por el teorema de Weierstrass γ_i tiene un mínimo positivo $M > 0$. Por lo tanto la velocidad $d\Phi_i(t)/dt$ de variación del estado de la neurona es positiva, y acotada inferiormente por arriba por cero. Dicho de otra forma, la función $\Phi_i(t)$ es estrictamente creciente en el tiempo, y su derivada está acotada inferiormente por una constante $M > 0$. Por lo tanto, deducimos la siguiente afirmación:

$$\forall \Phi_i(0) \in X_i \quad \exists t_0 > 0 \quad \text{tal que} \quad \Phi_i(t_0^-) = \theta_i > 0. \quad (4)$$

Dicho de otra forma, cualquiera sea el estado inicial $\Phi_i(0)$ de la neurona en el compacto X_i , existe un instante positivo tal que el estado alcanza el umbral de disparo $\theta_i > 0$, y por lo tanto, la neurona dispara y su estado se resetea a cero. Esto es lo que caracteriza a las llamadas neuronas marcapasos, diferenciándolas de aquellas que solo disparan si son excitadas exteriormente.

En resumen, las condiciones (1), (2), (3) y (4) son las que gobiernan la dinámica libre de la neurona i . Las dos primeras corresponden al régimen entre disparos de la dinámica libre, y las dos últimas al régimen de disparo.

2.3. Interacciones sinápticas

Expondremos a continuación las hipótesis por impulsos instantáneos que modelan las acciones sinápticas recibidas por la neurona i desde las demás neuronas $j \neq i$ de la red.

Sea $m \geq 2$ la cantidad de neuronas del sistema. Sea $\{1, 2, \dots, m\}$ el conjunto de neuronas en la red. Denotamos como

$$I_0(t_0) \subset \{1, 2, \dots, m\}$$

al conjunto de las neuronas que disparan en el instante t_0 .

Suponemos dado el grafo de red, con vértices $\{1, 2, \dots, m\}$ y aristas (i, j) donde $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tales que $i \neq j$. Las aristas son orientadas; es decir (i, j) y (j, i) son aristas diferentes. Además son pesadas: denotamos $-h_{ji} \leq 0$ al peso de la arista (j, i) . Estos pesos se llaman *valores de las interacciones sinápticas* de la red neuronal. La red es inhibitoria, por eso todos los pesos no nulos son negativos.

El modelo matemático de interacciones sinápticas responde a las siguientes ecuaciones, donde $\Phi_i(t_0)$ es el estado de la neurona i en el instante t_0 , y $\tilde{\Phi}_i(t_0)$ es simplemente una variable auxiliar:

$$\tilde{\Phi}_i(t_0) = \begin{cases} \Phi_i(t_0^-) - \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I(t_0)}} h_{ji} & \text{si } \Phi_i(t_0^-) < \theta_i, \text{ es decir si } i \notin I(t_0), \\ 0 & \text{si } \Phi_i(t_0^-) \geq \theta_i, \text{ es decir si } i \in I(t_0). \end{cases} \quad (5)$$

$$\Phi_i(t_0) = \max\{\tilde{\Phi}_i(t_0), -V_{\min}\} \quad (6)$$

Como $-V_{\min} < 0$, tenemos $\Phi_i(t_0) = \tilde{\Phi}_i(t_0) = 0$ si $\Phi_i(t_0^-) \geq \theta_i$. Esa condición traduce el hecho de que toda neurona $i \in I(t_0)$, o sea toda neurona que dispara en el instante t_0 ,

pasa instantáneamente al estado cero de reset, y es por lo tanto inmune a las interacciones sinápticas $-\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I(t_0)}} h_{ji}$ de las demás neuronas j en ese instante t_0 . En breve, no rige la

igualdad de arriba en (5) cuando $i \in I(t_0)$. Esta condición traduce a lenguaje matemático el fenómeno biológico llamado *refractorio*.

La ecuación (6) traduce matemáticamente que el estado $\Phi_i(t_0)$ de una neurona i no puede nunca ser menor a la cota inferior $-V_{\min}$, aunque reciba un total $-\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I(t_0)}} h_{ji}$ muy grande en valor absoluto de interacciones negativas provenientes de las demás neuronas de la red.

Finalmente, definimos el estado de la red neuronal en el instante t mediante la siguiente m -upla:

$$\vec{\Phi}(t) := (\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_m(t)), \quad (7)$$

donde

$$\vec{\Phi}(t) \in \prod_{i=1}^m [-V_{\min}, \theta_i) \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

Definición 2.7 (Espacio de fases Q , flujo Φ y órbitas)

El valor vectorial $\vec{\Phi}(t)$ varía en el siguiente espacio métrico

$$Q := \prod_{i=1}^m [-V_{\min}, \theta_i),$$

cuya adherencia $\overline{Q}$ es compacta (es decir cerrada y acotada). Observamos que el espacio $Q \subset \mathbb{R}^m$ es un prisma m -dimensional.

Llamamos *espacio de fases* de la red neuronal al conjunto Q .

En lo que sigue, denotamos $V = (V_1, \dots, V_m) \in Q$ y

$\vec{\Phi}^t(V)$ para $t > 0$ y $V \in Q$ dados, al estado $\vec{\Phi}(t) \in Q$ tal que $\vec{\Phi}(0) = V$.

Llamaremos a la función $\vec{\Phi}$ que depende de las dos variables independientes $t \geq 0$ en $\mathbb{R}$, y $V \in Q$, el *flujo de la red neuronal*. Es un flujo en Q con discontinuidades, debido a las hipótesis de reset y a las hipótesis de sinapsis por impulsos instantáneos.

Llamaremos *órbita con estado inicial V* a la curva paramétrica con discontinuidades $\{\vec{\Phi}^t(V)\}_{t \geq 0}$ con $V \in Q$ fijo, y el tiempo $t \geq 0$ como parámetro variable.

Observamos que según la Definición 2.7 se cumple $\vec{\Phi}^0(V) = V$ para todo $V \in Q$; o equivalentemente $\vec{\Phi}^0$ es la función identidad en el prisma Q .

2.4. Hipótesis de interacciones eficientes

Definición 2.8 (Interacciones sinápticas eficientes)

Decimos que una red neuronal tiene grafo completo si $h_{i,j} \neq 0$ para todo $i \neq j$. Decimos que tiene *interacciones sinápticas eficientes* cuando los pesos $\{-h_{ij}\}_{i \neq j}$ de las interacciones cumplen la siguiente condición:

$$\min_j \min_{-1 \leq V_j \leq 1} \left| \frac{\gamma'_j(V_j)}{\gamma_j(V_j)} \right| \cdot h \geq \log 2, \quad \text{donde} \quad h := \min_{i \neq j} \{h_{ij}, |\theta_i|\},$$

donde θ_i es el potencial de umbral de la neurona i . En nuestro caso estamos asumiendo una escala en la medida de los potenciales de las neuronas tal que $\theta_i = 1$ para todo i y el potencial de reset es $V_{\text{reset}} = 0$. Por lo tanto el salto de reset de la neurona i cuando llega al umbral es $V_{\text{reset}} - \theta_i = -1$. Si usamos la convención de denotar $-h_{ii}$ a este salto de reset como si fuera (desde el punto de vista matemático, pero no biológico) una acción de la neurona i sobre sí misma cuando alcanza su pontencial de umbral, resulta

$$h = \min_{i,j} h_{ij}.$$

Interpretación de la hipótesis de interacciones sinápticas eficientes: El peso en valor absoluto de las interacciones sinápticas (dado por h), es suficientemente fuerte en relación al cambio continuo en el potencial V_j de la neurona durante el régimen libre entre disparos de la red, que está medido por $\gamma_j(V_j)/\gamma'_j(V_j)$. La argumentación biofísica interpreta esta hipótesis en que la permeabilidad de membrana en la neurona post-sináptica j (esto es, la neurona que recibe la acción sináptica h_{ij} producida por un disparo de la neurona pre-sináptica i), es muy diferente durante la acción sináptica con respecto a lo que es durante el tiempo de relajación. Dicho de otra forma, debido a la apertura brusca de canales iónicos, se produce un cambio en el flujo de iones a través de la membrana durante las acciones sinápticas. Este cambio es distinguible y pronunciado en relación con el flujo iónico, lento pero permanente y relativamente pequeño, que se produce durante los intervalos de tiempo de relajación entre disparos.

3. Construcción de la sección y del mapa de Poincaré.

Para poder obtener conclusiones sobre la dinámica de las órbitas $\{\vec{\Phi}^t(V)\}_{t \geq 0}$, estudiamos los cortes de estas órbitas con una sección transversal a todas ellas, llamada *sección de Poincaré*.

Una vez elegida la sección de Poincaré, estudiaremos la dinámica por iterados del mapa de retorno $\rho(V)$, de la órbita $\{\vec{\Phi}^t(V)\}_{t \geq 0}$ por el punto V , cuando retorna para tiempo $t > 0$ de nuevo a la sección de Poincaré. Este mapa de retorno se llama *mapa de Poincaré*.

Obtendremos como resultado una sucesión de puntos $V, \rho(V), \rho^2(V), \rho^3(V), \dots$, todos pertenecientes a la sección transversal de Poincaré, y que corresponden a los sucesivos pasajes de la órbita $\{\Phi^t(x)\}_{t \geq 0}$ por dicha sección.

Llamaremos a la sucesión $\{\rho^n(V)\}_{n \geq 0}$ la *órbita discreta* del punto V por iterados del mapa de Poincaré ρ .

Una propiedad relevante en la búsqueda de órbitas periódicas por un flujo $\vec{\Phi}^t(V)$ es la siguiente:

Si la órbita discreta por iterados del mapa de Poincaré es periódica, entonces la órbita por el flujo con el mismo estado inicial, es también es periódica.

3.1. Tiempos de Disparo

De la Sección 2 retomamos la ecuación diferencial m -dimensional que regula el comportamiento de las neuronas en la dinámica libre en régimen entre disparos.

$$\frac{d\vec{\psi}^t}{dt} = \vec{\gamma}(\vec{\psi}^t), \quad (9)$$

donde

$$\vec{\gamma}(\vec{\psi}^t) = (\gamma_1(\psi_1^t), \gamma_2(\psi_2^t), \dots, \gamma_m(\psi_m^t))$$

es la función vectorial cuyas componentes son las funciones reales de una variable real γ_i definidas en (1) y (2). En la igualdad anterior, usamos la notación $\vec{\psi}^t = (\psi_1^t, \psi_2^t, \dots, \psi_m^t)$.

Por medio de un cambio de variables lineal, podemos modificar la escala de medida en el espacio $\prod_{i=1}^m [-V_{\min}, \theta_i]$, de forma que $-V_{\min} = -1$, y $\theta_i = 1$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Obtenemos entonces

$$Q = [-1, 1]^m,$$

y para todo estado inicial $V \in Q$, se cumple $V = (V_1, \dots, V_m) \in [-1, 1]^m$, donde $V_i \in [-1, 1]$ es el estado inicial de la neurona i .

Observamos que el cubo m -dimensional $Q = [-1, 1]^m$ no es ni abierto ni cerrado. El cubo cerrado $\overline{Q}$ es compacto, pues es cerrado y acotado.

Comentario 3.1 En el futuro necesitaremos considerar la ecuación diferencial (9) definida en todo $\mathbb{R}^m$. Para ello extendemos las funciones γ_i a todo $\mathbb{R}^m$ de modo que sea C^1 en todo $\mathbb{R}^m$, que $\gamma_i > 0$ sea acotada inferiormente por una cota mayor cero, y que $\gamma_i' < 0$ sea acotada superiormente por una cota menor que cero. Tal extensión existe debido al Lema de Uryson (ver por ejemplo el Lema 2.2.10 de [12]).

Definición 3.2 (Flujo ficticio extendido)

El *flujo ficticio extendido* es la solución general $\vec{\psi}$ de la ecuación diferencial (9), definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo estado inicial $V \in \mathbb{R}^m$. El *potencial ficticio extendido* $\psi_i^t(V_i)$ de la neurona i con estado inicial $V_i \in \mathbb{R}$, incluso cuando $V_i \notin [-1, 1]$, es por definición, la i -ésima componente ψ_i del flujo ficticio extendido $\vec{\psi}$, con condición inicial $\psi_i^0(V_i) = V_i$.

Observar que el potencial instantáneo $\Phi_i^t(V_i)$ de la neurona i en el instante t , tal que $\Phi_i^0 = V_i$, cumple:

$$\Phi_i^t(V_i) = \psi_i^t(V_i) < 1, \quad (10)$$

si y solo si para $t > 0$ la neurona i está en el régimen de dinámica libre entre disparos durante todo el intervalo de tiempo $[0, t]$.

Definición 3.3 (Primer instante de disparo $t_i(V_i)$ de la neurona i)

El primer *instante* $t_i(V_i) > 0$ de *disparo espontáneo* de la neurona i (si no estuviera acoplada a la red y si no tuviera la condición de reset), es por definición, el (único) instante positivo para el cual el potencial ficticio extendido $\psi_i^t(V_i)$ de la neurona i con estado inicial $V_i \in [-1, 1)$ es igual al umbral 1. En ecuaciones:

$$\{t_i(V_i)\} := \{t > 0: \psi_i^t(V_i) = 1\}. \quad (11)$$

Nota: Es importante observar que la función $t_i(V_i)$ dada por la ecuación (11), es una función implícita definida por la ecuación

$$\psi_i^{t_i(V_i)}(V_i) = 1, \quad (12)$$

donde ψ_i es la componente i -ésima de la solución general $\vec{\psi}$ de la ecuación diferencial (9), que está definida en forma extendida en todo $\mathbb{R}^m$.

Definición 3.4 (Primer instante de disparo $\bar{t}(V)$ de la red)

El primer *instante de disparo* $\bar{t}(V)$ de la red, con estado inicial $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$, es el mínimo de los instantes $t_i(V_i)$ de disparo espontáneo de las neuronas. Más precisamente:

$$\bar{t}(V) := \min_{1 \leq i \leq m} t_i(V_i). \quad (13)$$

De las igualdades (5) y (6) obtenemos que

$$\Phi_i^{\bar{t}(V)}(V) = 0 \quad \text{si } i \in I(\bar{t}(V)), \text{ es decir si } t_i(V) = \bar{t}(V).$$

Dicho de otra forma, el estado de la red en el instante de disparo $\bar{t}(V)$ es un punto del prisma $Q = [-1, 1]^m$ que tiene alguna componente igual a cero.

Recordemos la Definición 2.8 de interacciones sinápticas eficientes en la red neuronal. De la definición del instante $\bar{t}(V)$ dada arriba obtenemos la siguiente propiedad, como consecuencia de la eficiencia de las interacciones sinápticas:

Lema 3.5 (Desigualdad para redes inhibitorias con interacciones eficientes)

Sea una red neuronal inhibitoria de grafo completo e interacciones sinápticas eficientes. Sea $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$ un estado inicial de la red, y sea $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ una neurona que dispara en el primer tiempo de disparo de la red, $\bar{t}(V) = t_i(V_i)$. Entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j))}{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})} \right| < 1/2 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Demostración: Tomando logaritmo y exponencial con base e , tenemos:

$$\frac{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j))}{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})} = \exp \left(\log \gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)) - \log \gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}) \right) =$$

$$\exp \left(\int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j \right) = \exp \left(- \int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j \right). \quad (14)$$

Por la hipótesis (2) la función en el integrando de la derecha, $-\gamma'/\gamma$, es estrictamente positiva. Como por hipótesis la red es de grafo completo, tenemos $h = \min_{i \neq j} |h_{i,j}| > 0$. La red es inhibitoria, es decir $-h_{ij} < 0$. Deducimos que $-h_{i,j} \leq -h < 0$ para todos i, j . Por lo tanto el intervalo de integración en la igualdad (14) resulta

$$[\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}, \psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)] \supset [\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h, \psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)].$$

Como la función en el integrando es positiva deducimos:

$$\int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j \geq \int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j.$$

Sustituyendo en la igualdad (14) obtenemos:

$$\frac{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j))}{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})} \leq \exp \left(- \int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j \right). \quad (15)$$

Por la definición 2.8 de interacciones eficientes, sabemos por hipótesis que:

$$\frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} = \left| \frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} \right| > \frac{\log 2}{h}.$$

Luego, sustituyendo en la desigualdad (15) deducimos que:

$$\frac{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j))}{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})} < \exp \left(- \int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{\log 2}{h} dW_j \right) = \exp(-\log 2) = \frac{1}{2},$$

como queríamos demostrar. $\square$

3.2. Mapa de retorno (mapa de Poincaré).

De la Definición 3.4 recordamos que el estado de la red, que está descrito por un punto en el cubo $Q \subset \mathbb{R}^m$, inmediatamente en el instante del primer disparo $\bar{t}$ (en realidad inmediatamente después), tiene alguna componente nula. Esto es debido a la condición de reset de las neuronas que dispararon en el instante $\bar{t}$, y a que hemos tomado una escala de potenciales tal que el potencial de reset es nulo.

Justamente, el conjunto de puntos en el cubo Q que tienen nula alguna componente, será lo que definiremos a continuación como sección de Poincaré:

Definición 3.6 (Sección de Poincaré)

La *Sección de Poincaré* es

$$B := \{V \in Q = [-1, 1]^m : \exists i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ tal que } V_i = 0\}.$$

Veamos por ejemplo el caso $m = 3$. La sección de Poincaré en este caso está formada por la unión de tres cuadrados, cada uno contenido en uno de los tres planos coordenados, pues cada plano coordenado tiene por ecuación $V_i = 0$, con $i = 1, 2$ ó 3 respectivamente. En cada plano $V_i = 0$, cada una de las otras dos coordenadas $j \neq i$ debe estar comprendida en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, en cada plano coordenado, la sección de Poincaré es el cuadrado $[-1, 1]^2$.

La sección de Poincaré B definida arriba, es *transversal al flujo* $\vec{\psi}^t$, es decir es transversal a cada órbita $\{\vec{\psi}^t(V)\}_{t \geq 0}$ tal que $V \in B$. En efecto, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ fijo, la sección de Poincaré contiene un cuadrado del hiperplano $\{V \in \mathbb{R}^m : \dots V_i = 0\}$. Este hiperplano es transversal a la órbita $\{\vec{\psi}^t(V)\}_{t \geq 0}$, porque la componente i -ésima del vector tangente a esa órbita es $d\psi_i^t/dt = \gamma_i > 0$, transversal al hiperplano de los vectores que tienen nula su i -ésima componente.

Definición 3.7 (Mapa de retorno o de Poincaré)

Llamamos *mapa de retorno* a la sección B de Poincaré, o en breve *mapa de Poincaré* a la transformación $\rho : B \mapsto B$ definida por

$$\rho(V) = \vec{\Phi}^{\bar{t}(V)}(V) \quad \forall V \in B,$$

donde $\bar{t}(V)$, según la Definición 3.4, es el instante de disparo de la red con estado inicial V ; y $\vec{\Phi}$ es el flujo cuyas componentes están determinadas por las ecuaciones (5) y (6).

Dicho de otra forma, $\rho(V)$ es el estado W de la red con estado inicial $V \in B$, cuando por lo menos una neurona, digamos i , dispara y se resetea a cero. Esta condición de reset instantáneocuando la neurona i llega al umbral 1 y dispara, se traduce en lo siguiente:

$$\Phi_i^{\bar{t}^-(V)}(V) = \psi_i^{t_i(V)}(V) = 1 \quad \text{y} \quad W_i = \Phi_i^{\bar{t}(V)}(V) = 0.$$

La igualdad $W_i = 0$ implica, por la definición de sección de Poincaré, que $W = \rho(V) \in B$. Por lo tanto $\rho : B \mapsto B$.

Cuando $I(\bar{t}(V)) = \{i\}$, es decir cuando la única neurona que llega espontáneamente al potencial de umbral y dispara es la neurona i , tomamos por convención la siguiente notación:

$$h_{ii} := 1.$$

Entonces podemos escribir la i -ésima componente W_i de $W = \rho(V)$ del siguiente modo

$$W_i = \psi_i^{t_i(V)}(V) - h_{ii},$$

porque $\psi_i^{t_i(V)}(V) = 1$, $h_{ii} = 1$ y $W_i = 0$. Usando esta convención, junto con las ecuaciones (5), (6), (10), y la definición del mapa de Poincaré, deducimos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\rho(V) &= \left(\rho_1(V), \rho_2(V), \dots, \rho_m(V) \right) \\
\text{Si } I(\bar{t}(V)) &= \{i\}, \text{ entonces} \\
\tilde{\rho}_j(V) &:= \psi_j^{t_i(V)}(V) - h_{ij} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, \text{ y} \\
\rho_j(V) &:= \max \left\{ -1, \tilde{\rho}_j(V) \right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

4. Contractividad del mapa de Poincaré

Como se dijo en la introducción, el objetivo de este trabajo es demostrar que el mapa de Poincaré de la red inhibitoria es un mapa contractivo a trozos. Primero entonces, definamos qué es un mapa contractivo a trozos.

4.1. Definición de mapa contractivo a trozos

Sea $B \subset \mathbb{R}^m$ tal que su clausura $\overline{B}$ es un compacto (cerrado y acotado) no vacío.

Definición 4.1 (Mapa contractivo)

Un mapa $\rho : B \rightarrow B$ se dice *contractivo* si existe una métrica dist en $\overline{B}$, que induce la topología heredada por $\overline{B}$ de su inclusión en $\mathbb{R}^m$, y existe una constante λ con $0 \leq \lambda < 1$, tal que

$$\text{dist}(\rho(x), \rho(y)) \leq \lambda \text{dist}(x, y) \quad \forall x, y \in B.$$

Notar que si ρ es contractivo, entonces ρ es continuo.

Definición 4.2 (Mapa contractivo a trozos y piezas de contractividad).

Un mapa $\rho : B \mapsto B$ se dice *contractivo a trozos* (con $N \geq 2$ trozos o piezas de contractividad) si existe una métrica dist en $\overline{B}$ que induce la topología heredada por $\overline{B}$ de su inclusión en $\mathbb{R}^m$, y si

$$\overline{B} = \bigcup_{i=1}^N \overline{B}_i,$$

donde $\{B_i\}_{1 \leq i \leq N}$ son abiertos tales que $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y tales que la restricción $\rho|_{B_i} : B_i \mapsto B$ es un mapa contractivo con respecto a dist para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Es decir, existe λ con $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$\text{dist}(\rho(x), \rho(y)) \leq \lambda \text{dist}(x, y) \quad \forall x, y \in B_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Notar que si ρ es contractivo a trozos, entonces $\rho|_{B_i}$ es continuo para cada i , pero ρ no es necesariamente continuo en B . En particular, ρ puede tener discontinuidades en la intersección de las fronteras topológicas de dos piezas B_i y B_j diferentes.

Las piezas B_i se llaman *trozos o piezas de contractividad* del mapa ρ .

4.2. Continuidad a trozos del mapa de Poincaré

Comenzaremos la demostración de que el mapa de Poincaré $\rho : B \mapsto B$ es contractivo a trozos, contruyendo los candidatos $B_i \subset B$ a piezas o trozos de contractividad de ρ en la sección de Poincaré B . En esta subsección, primero construiremos estas piezas B_i . Segundo, demostraremos que ρ es continua en cada una de estas piezas. En las próximas subsecciones probaremos que ρ es contractivo en cada una de sus piezas de continuidad, eligiendo una métrica adecuada.

Definición 4.3 (Piezas de continuidad)

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, llamamos *i-ésima pieza de continuidad* al siguiente conjunto

$$B_i := \left\{ V \in B : I(\bar{t}(V)) = \{i\} \right\}.$$

Dicho explícitamente, B_i es el conjunto de estados iniciales de la red neuronal que están en la sección de Poincaré B (ver Definición 3.6), y tales que para las órbitas con esas condiciones iniciales, la única neurona que llega al umbral y dispara en el primer instante $\bar{t}(V)$ de disparo de la red, es la neurona i .

Se observa que en este caso la cantidad N de candidatos a piezas de continuidad es igual a la cantidad m de neuronas de la red. En la Figura 3 se esquematiza un ejemplo, en el caso de $m = 3$ neuronas, de la partición de la sección de Poincaré B (que es bidimensional) en sus tres piezas B_1, B_2 y B_3 .

Veamos primero que las piezas $\{B_i\}_{1 \leq i \leq m}$ construidas en la Definición 4.3 cumplen todas las condiciones requeridas en la Definición 4.2, para ser candidatas a piezas de contractividad:

Por un lado, de la Definición 4.3 es inmediato probar que $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. En efecto, si i y j son neuronas diferentes, entonces $\{i\} \neq \{j\}$. Y por lo tanto las condiciones $I(\bar{t}(V)) = \{i\}$ e $I(\bar{t}(V)) = \{j\}$ no pueden cumplirse simultáneamente. Concluimos que un mismo estado inicial V no puede pertenecer a $B_i \cap B_j$, o lo que es lo mismo $B_i \cap B_j = \emptyset$. Además se cumple que B_i abierto con la topología inducida en B por su inclusión en $\mathbb{R}^m$, y $\bigcup_{i=1}^m \overline{B_i} = \overline{B}$. (Omitiremos la demostración de estas dos últimas afirmaciones.)

Lema 4.4 (Fórmula del mapa de Poincaré en cada pieza de continuidad)

El mapa de Poincaré $\rho : B \mapsto B$ es continuo en cada pieza B_i . Más aún, para todo i , la función $\rho^{(i)} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ definida en todo el espacio $\mathbb{R}^m$ por la igualdad (18) que escribimos más abajo, es una extensión continua a todo el espacio $\mathbb{R}^m$ del mapa de Poincaré ρ restringido a B_i . Es decir:

$$\begin{aligned} \rho^{(i)}(U) &= \rho(U) \quad \forall U \in B_i, \quad \text{donde} \\ \rho_j^{(i)}(V) &:= \max \left\{ \psi_j^{t_i(V)}(V_j) - h_{ij}, \quad -1 \right\} \quad \forall V \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (18)$$

Además $\rho^{(i)}$ es diferenciable en todos los puntos $V \in \mathbb{R}^m$ tales que $\rho_j^{(i)}(V) \neq -1$ para todo $1 \leq j \leq m$.

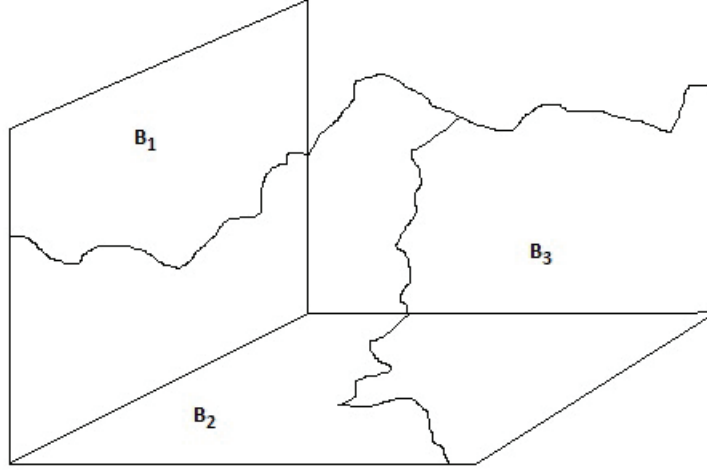


Figura 3: Ejemplo de $m = 3$ neuronas. Parte en el primer octante de la sección de Poincaré B . Está formada por tres cuadrados bidimensionales $[0, 1]^2$ en los planos coordenados de $\mathbb{R}^3$. Se dibuja la partición en las 3 piezas o trozos B_1, B_2 y B_3 , con respecto a las cuales el mapa de Poincaré será contractivo a trozos. Las curvas irregulares indican las fronteras de esas tres piezas de contractividad.

Nota: En la igualdad (18):

- $\rho_j^{(i)}$ denota la componente j -ésima de $\rho^{(i)}$.
- ψ_j denota la componente j -ésima del flujo solución de la ecuación diferencial (9) extendida a todo el espacio $\mathbb{R}^m$ según el comentario 3.1 y la definición 3.2.
- $t_i(V_i) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ es la función implícita definida por la ecuación $\psi_i^{t_i(V_i)}(V) = 1$, según la igualdad (12).
- Si $i \neq j$ entonces h_{ij} denota el valor absoluto del peso (negativo) de interacción sináptica de la neurona i hacia la j . Si $i = j$, entonces h_{ii} denota el valor absoluto del salto (negativo) desde el potencial de umbral θ_i de la neurona i hasta su potencial de reset V_{reset} . Como estamos tomando una escala tal que $\theta_i = 1$ y $V_{\text{reset}} = 0$, resulta, por convención $h_{ii} = 1$.

Demostración del Lema 4.4:

De la construcción de la pieza B_i , observamos que para $U \in B_i$ se cumple

$$I(\bar{t}(V)) = \{i\} \quad \text{y} \quad \bar{t}(V) = t_i(V_i).$$

Usando estas igualdades, la notación $h_{ii} = -1$ y las ecuaciones (16), (17) y (18), deducimos:

$$\rho(U) = \rho^{(i)}(U) \quad \forall U \in B_i.$$

Por lo tanto el mapa $\rho^i : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ es una extensión de $\rho : B \mapsto B$ a todo el espacio $\mathbb{R}^m$.

Para terminar de demostrar el Lema 4.4 basta probar entonces que $\rho^{(i)}$ es continua en todo $\mathbb{R}^m$ y diferenciable en todos los puntos V tales que $\rho_j^{(i)} \neq -1$ para todo $1 \leq j \leq m$. Para ello, por la fórmula (18), basta demostrar que $\psi^{t_i(V_i)}(V)$ es continua y diferenciable para todo $V \in \mathbb{R}^m$.

Por un lado, la función $t_i(V) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ es continua y diferenciable. En efecto, es la función implícita definida por la ecuación $\psi_i^{t_i(V)}(V) = -1$, donde la solución $\psi_i^t(V)$, como función de dos variables independientes $(t, V) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ es de clase C^1 por ser la solución con dato inicial $\psi_i^0 = V_i$ de la ecuación diferencial $dy/dt = \gamma_i(y)$ donde γ_i es de clase C^1 (ver por ejemplo el Teorema 3, Sección 2, Capítulo VI de [13], pág. 215). Además la derivada parcial de $\psi_i^t(V)$ con respecto de t es $d\psi_i^t/dt = \gamma_i(\psi_i^t) \neq 0$ porque la función γ_i es positiva por hipótesis. Luego, existe, y es continua y diferenciable, la función implícita $t_i(V_i)$.

Por otro lado $\psi^{t_i(V_i)}(V)$, como función de V , es la composición de las siguientes tres funciones diferenciables:

- La proyección $V = (V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_m) \in \mathbb{R}^n \mapsto V_i \in \mathbb{R}$.
- La función $V_i \in \mathbb{R} \mapsto t_i(V_i) \in \mathbb{R}$ definida como función implícita por la ecuación (12). Ya vimos que existe y es diferenciable.
- La aplicación $(t, V) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto \psi^t(V) \in \mathbb{R}^m$. Esta aplicación es continua y diferenciable, como función de la pareja de sus dos variables independientes (t, V) , por ser solución de la ecuación diferencial $dy/dt = \gamma(y)$ con dato inicial V , donde γ es un campo de clase C^1 por hipótesis.

Siendo $\psi^{t_i(V_i)}(V)$ la composición de tres funciones diferenciables, es diferenciable, como queríamos demostrar. $\square$

4.3. Resultados intermedios

Como se dijo antes, el objetivo principal de este trabajo es probar que el mapa de Poincaré ρ es contractivo en cada pieza B_i construida en la Definición 4.3. Por lo tanto, debemos probar que $\rho^{(i)} = \rho|_{B_i}$ es una transformación contractiva.

La principal herramienta que utilizaremos para ello es el Teorema del “Flujo Tubular” (ver por ejemplo el Teorema 8, Sección 4, Capítulo VI de [13], pág. 222) y su aplicación para construir una métrica adecuada en la sección de Poincaré B .

La causa de fondo por la cual el mapa de Poincaré resulta contractivo en cada trozo de continuidad es la propiedad de interacciones inhibitorias eficientes definida en 2.8, y su consecuencia demostrada en el Lema 3.5.

Teorema 4.5 (del Flujo Tubular)

Sea la siguiente ecuación diferencial vectorial en $\mathbb{R}^m$:

$$\frac{d\vec{\psi}^t}{dt} = \gamma(\vec{\psi}^t)$$

con $\gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 . Sea $\mathcal{U}$ un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^m$ tal que γ no tiene ceros en $\overline{\mathcal{U}}$. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^1 , $\xi : \overline{\mathcal{U}} \rightarrow \xi(\overline{\mathcal{U}})$ de clase C^1 tal que

$$\frac{d(\xi \circ \vec{\psi}^t)}{dt} = \vec{a} \text{ constante} \neq \vec{0} \quad \forall t \geq 0 \text{ tal que } \vec{\psi}^t \in \mathcal{U}. \quad (19)$$

Demostración: Ver por ejemplo el Teorema 8, Sección 4, Capítulo VI de [13], página 222.

Interpretación del Teorema 4.5.

Existe un cambio de variables $\xi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ diferenciable y con inversa diferenciable, tal que, al aplicarlo a la ecuación diferencial dada en el abierto acotado $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, la transforma en una ecuación diferencial de primer orden con segundo miembro constante igual al vector $\vec{a}$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación diferencial obtenida después del cambio de variables, son de la forma $t \cdot \vec{a} + \vec{c}$ con $\vec{c}$ vector constante que depende del dato inicial. Más precisamente

$$\xi \circ \psi^0(V) = \xi(V), \quad \xi \circ \psi^t(V) = t \cdot \vec{a} + \xi(V). \quad (20)$$

Entonces las órbitas son rectas paralelas. Concluimos que el Teorema del flujo tubular establece la existencia de un cambio de variables diferenciable con inversa diferenciable que transforma las curvas solución (órbitas) de la ecuación diferencial dada en el abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, en segmentos de rectas paralelas. Ese cambio de variables ξ se dice que *plancha el flujo solución* de la ecuación dada (ver Figura 4).

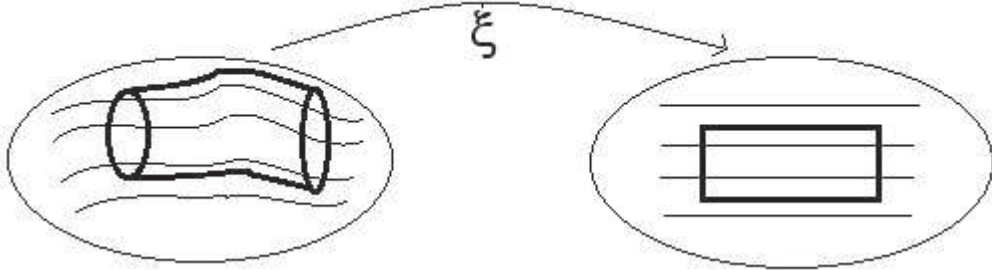


Figura 4: Teorema del Flujo Tubular.

Aplicaremos el cambio de variable ξ del Teorema 4.5 a las soluciones ψ de la ecuación diferencial vectorial (9) en el cubo $Q = [-1, 1]^m$. Este cambio de variables ξ deforma difeomórficamente el cubo Q , pero las órbitas se transforman en segmentos de rectas paralelas, según la dirección $\vec{a}$ constante. Además, como el segundo miembro de la ecuación diferencial (9) es de la forma

$$\vec{\gamma}(V) = \gamma_1(V_1), \gamma_2(V_2), \dots, \gamma_m(V_m),$$

donde $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$, obtenemos la siguiente propiedad:

Lema 4.6 (Teorema del flujo tubular en red neuronal)

Para la ecuación diferencial (9), existe un cambio de variables ξ en el cubo $Q = [-1, 1]^m$ que verifica todas las propiedades del Teorema 4.5, y además:

- Si $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$, entonces

$$\xi(V) = (\xi_1(V_1), \xi_2(V_2), \dots, \xi_m(V_m)).$$

- $\vec{a} = (1, 1, \dots, 1)$ es decir $a_i = 1$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.
- ξ es de clase C^2
- Las derivadas primeras ξ'_j son funciones reales estrictamente crecientes de variable real, para todo $1 \leq i \leq m$ y cumplen

$$\xi'_j(V_j) = \frac{a_j}{\gamma_j(V_j)} \quad \forall V \in Q.$$

Demostración: Argumentamos primero con $m = 1$ para la siguiente ecuación diferencial en la recta real $\mathbb{R}$:

$$\frac{d\psi_i^t}{dt} = \gamma_i(\psi_i^t) \quad t \in [-1, 1].$$

Aplicando el Teorema 4.5 y el Lema 4.6, existe un cambio de variables $\xi_i : [-1, 1] \mapsto \xi_i([-1, 1])$, que es un difeomorfismo, y tal que

$$\frac{d(\xi_i \circ \psi_i^t)}{dt} = a_i \neq 0 \text{ constante.}$$

Consideramos ahora el difeomorfismo $\xi : Q \mapsto \xi(Q)$ definido por

$$\xi(V) := (\xi_1(V_1), \xi_2(V_2), \dots, \xi_m(V_m)) \quad \forall V = (V_1, V_2, \dots, V_m) \in Q = [-1, 1]^m.$$

Es inmediato chequear que ξ satisface las condiciones del Teorema 4.5 y del Lema 4.6 para la ecuación diferencial (9) en $Q = [-1, 1]^m \subset \mathbb{R}^m$. Ahora veamos que $\xi'_j = a_j/\gamma_j$ y que es estrictamente creciente. Sea $-1 \leq V_j < W_j \leq 1$. Tenemos:

$$\frac{d\xi_j \psi_j^t}{dt} = a_j \neq 0.$$

Luego, por la regla de la cadena:

$$\xi'_j \cdot \frac{\psi_j^t}{dt} = \xi'_j(V_j) \cdot \gamma_j(V_j) = a_j,$$

de donde

$$\xi'_j(V_j) = \frac{a_j}{\gamma_j(V_j)}$$

Entonces, como $\gamma'_j < 0$, sabemos que γ_j es estrictamente decreciente. Por lo tanto ξ'_j es estrictamente creciente como queríamos demostrar.

Además, como $\xi'_j = a_j/\gamma_j$, y γ_j es estrictamente positiva y de clase C^1 deducimos que ξ'_j es de clase C^1 . Por lo tanto, ξ_j es de clase C^2 para todo j , lo cual implica que ξ es de clase C^2 . Más aún ξ'_j nunca se anula porque $a_j \neq 0$.

Finalmente, consideramos la transformación lineal L con matriz asociada diagonal, tal que

$$L(V) = \left(\frac{V_1}{a_1}, \frac{V_2}{a_2}, \dots, \frac{V_m}{a_m} \right) \quad \forall V \in \mathbb{R}^m.$$

Definimos $\tilde{\xi} = L \circ \xi$. Es inmediato chequear que

$$\frac{d\tilde{\xi} \circ \vec{\psi}^t(V)}{dt} = (1, 1, \dots, 1).$$

Sustituyendo el difeomorfismo ξ por $\tilde{\xi}$, y el vector $\vec{a}$ por $(1, 1, \dots, 1)$ en la ecuación diferencial (19), obtenemos un cambio de variables que transforma la ecuación diferencial dada en $Q \subset \mathbb{R}^m$, en una con segundo miembro constante igual al vector $(1, 1, \dots, 1)$ como queríamos demostrar. Esto termina de probar el Lema 4.6. $\square$

Definición 4.7 (Construcción de la métrica)

Sea ξ un cambio de variables en el cubo $Q = [-1, 1]^m$ que plancha el flujo, de acuerdo al Teorema 4.5 y que cumple además las condiciones del Lema 4.6. Sean dos puntos U, V en la sección de Poincaré $B \subset Q$. Definimos la *distancia* entre los puntos U y $V \in B$, del siguiente modo:

$$\text{dist}(U, V) := \left\| (\xi(U) - \xi(V)) \right\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma del máximo valor absoluto de las componentes de los vectores en $\mathbb{R}^m$. Más precisamente

$$\|V\| := \max_{1 \leq i \leq m} |V_i| \quad \forall V = (V_1, V_2, \dots, V_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Lema 4.8 (Propiedades de la métrica)

La distancia construida de acuerdo a la Definición 4.7, es una métrica en la sección de Poincaré B que induce la misma topología que la heredada en B por su inclusión en $\mathbb{R}^m$.

Demostración: Como ξ es invertible y $\xi(U) = \xi(V)$ si y solo si $U = V$ en B . Usando esta propiedad y la métrica definida en $\mathbb{R}^m$ por la norma usual, es inmediato chequear que la distancia definida en 4.7 cumple:

- a) $\text{dist}(U, V) \geq 0$ y $\text{dist}(U, V) = 0$ si y solo si $U = V$.
 - b) $\text{dist}(U, V) = \text{dist}(V, U)$ para todos $U, V \in B$.
 - c) La propiedad triangular: $\text{dist}(U, V) \leq \text{dist}(U, W) + \text{dist}(W, V)$ para todos $U, V, W \in B$.
- Por lo tanto la función distancia definida en 4.7 es una métrica en B .

Para probar que la topología inducida por la métrica dist en B es la misma que la topología heredada por B de su inclusión en $\mathbb{R}^m$, basta observar que la métrica definida en $\xi(B)$ es la heredada de la inclusión en $\mathbb{R}^m$ porque está definida a partir de la norma usual, y además, como ξ^{-1} es un homeomorfismo (por ser difeomorfismo), conserva la topología de $\mathbb{R}^m$. $\square$

Lema 4.9 (Propiedad de convexidad)

Para todos $U, V \in B$, el segmento de recta $[\xi(U), \xi(V)]$ está contenido en $\xi(\overline{Q})$.

Demostración: Denotamos $U' = \xi(U)$, $V' = \xi(V)$. El segmento $[U', V']$ está parametrizado como $W'(s) = U' + s(V' - U')$ con $0 \leq s \leq 1$. Entonces la componente i -ésima de $W'(s)$ es

$$W'_i(s) = U'_i + s(V'_i - U'_i) = \xi_i(U_i) + s(\xi_i(V_i) - \xi_i(U_i)), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Como $\xi_i : [U_i, V_i] \subset \mathbb{R} \mapsto \xi([U_i, V_i]) \subset \mathbb{R}$ es un difeomorfismo, su imagen es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, y por lo tanto es convexo. Esto quiere decir que si dos puntos pertenecen al conjunto imagen $\xi_i([U_i, V_i])$, entonces cualquier combinación convexa de ellos también pertenece a esa imagen.

El punto $W'_i(s)$ es la combinación convexa siguiente:

$$W'_i(s) = \xi_i(U_i) + s(\xi_i(V_i) - \xi_i(U_i)) = (1-s)\xi_i(U_i) + s\xi_i(V_i), \quad \text{con } 0 \leq s \leq 1.$$

Es decir, $W'_i(s)$ es combinación convexa de los dos puntos $\xi_i(U_i), \xi_i(V_i) \in \xi_i([U_i, V_i])$. Deducimos que $W'_i(s)$ también pertenece a la imagen $\xi_i([U_i, V_i])$, y por lo tanto, existe $W_i \in [U_i, V_i] \subset [-1, 1]$ tal que $\xi_i(W_i) = W'_i(s)$.

Concluimos que, para todo punto $W' \in [U', V']$ y para todo $1 \leq i \leq m$, existe $W_i \in [-1, 1]$ tal que $W'_i = \xi_i(W_i)$. Por lo tanto $W' = \xi(W) \in \xi(\overline{Q})$ como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 4.10 (Fórmula de Liouville)

Sea la $\psi_i^t(V_i)$ la solución de la siguiente ecuación diferencial con dato inicial

$$\frac{dx}{dt} = \gamma_i(x), \quad \psi_i^0(V_i) = V_i,$$

donde γ_i es una función real de clase C^1 . Entonces $\psi_i^t(V_i)$ es de clase C^1 respecto a la pareja (t, V_i) de sus dos variables independientes, y además

$$\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i} = \exp \int_0^t \gamma'_i(\psi_i^s(V_i)) ds. \quad (21)$$

Demostración: En primer lugar, es un teorema clásico de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la propiedad de regularidad de solución de la ecuación diferencial: Si el segundo miembro γ_i de la ecuación diferencial es una función de clase C^1 , entonces la solución $\psi^t(V)$, como función de la pareja (t, V) de variables independientes, es también función de clase C^1 (ver por ejemplo Teorema 1, Sección 3, Capítulo VI de [13], pág. 38).

En segundo lugar, probaremos la llamada Fórmula de Liouville dada en la igualdad (21). Derivando ambos miembros de la ecuación diferencial dada respecto de V_i , y aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{d\left(\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dt}\right)}{dV_i} = \frac{d(\gamma_i(\psi_i^t(V_i)))}{dV_i} = \gamma'_i(\psi_i^t(V_i)) \cdot \frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}$$

Ahora, aplicamos el Lema de Schwarz, clásico en los cursos universitarios de cálculo, que permite el cambio de orden de derivación en el cálculo de las derivadas segundas iteradas. Obtenemos

$$\frac{d\left(\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dt}\right)}{dV_i}.$$

Reuniendo las igualdades anteriores, deducimos

$$\frac{d\left(\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}\right)}{dt} = \gamma'_i(\psi_i^t(V_i)) \cdot \frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}.$$

Ahora denotamos

$$\alpha(t) := \gamma'_i(\psi_i^t(V_i)),$$

y obtenemos entonces que la función $y(t) := \frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}$ es solución de la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha(t) \cdot y(t).$$

Por lo tanto

$$y(t) = \exp \int_0^t \alpha(s) ds,$$

o equivalentemente,

$$\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i} = \exp \int_0^t \gamma'_i(\psi_i^s(V_i)) ds.$$

□

Lema 4.11 (Fórmula del primer instante de disparo) *Sea $t_i(V_i) > 0$ el primer instante de disparo espontáneo de la neurona i con estado inicial V_i , según la Definición 3.2. Entonces, la función $t_i(V_i)$ es de clase C^1 como función real de variable real $V_i \in [-1, 1]$, y su derivada es*

$$t'_i(V_i) = \frac{-1}{\gamma_i(V_i)}.$$

Demostración: La función $t_i(V_i)$ está dada por la ecuación implícita (12):

$$\psi^t(V_i) = 1 \Leftrightarrow t = t_i(V).$$

La función $\psi^t(V_i)$ de dos variables (t, V_i) es de clase C^1 , y además cumple las hipótesis del Teorema de función implícita, porque $\partial\psi_i^t(W_i)/\partial W_i = \gamma(\psi_i^t(W_i)) \neq 0$. Entonces $t_i(W_i)$ existe y es de clase C^1 .

Por la regla de la cadena, la derivada $t'_i(V_i)$ verifica la siguiente ecuación:

$$\frac{d\psi_i^{t_i(V_i)}(V_i)}{dV_i} = 0, \quad \text{por lo tanto} \quad \frac{\partial\psi_i^t(V_i)}{\partial t} \Big|_{t=t_i(V_i)} \cdot t'_i(V_i) + \frac{\partial\psi_i^t(V_i)}{\partial V_i} \Big|_{t=t_i(V_i)} = 0.$$

Recordando que ψ_i^t es la i -ésima componente de la solución $\vec{\psi}$ de la ecuación diferencial (9), y aplicando la Fórmula de Liouville para calcular $\frac{\partial\psi_i^t(V_i)}{\partial V_i}$ (ver Teorema 4.10), obtenemos:

$$\gamma_i(\psi_i^{t_i(V_i)}(V_i)) \cdot t'_i(V_i) = - \frac{\partial\psi_i^t(V_i)}{\partial V_i} \Big|_{t=t_i(V_i)} = - \exp \left(\int_0^{t_i(V_i)} \gamma'_i(\phi^t(V_i)) dt \right).$$

Como $\psi_i^{t_i(V_i)}(V_i) = 1$ deducimos:

$$t'_i(V_i) = \frac{-\exp\left(\int_0^{t_i(V_i)} \gamma'_i(\phi_i^t(V_i)) dt\right)}{\gamma_i(1)} =$$

$$-\frac{1}{\gamma_i(1)} \cdot \exp\left(\int_0^{t_i(V_i)} \frac{\gamma'_i(\psi_i^t(V_i))}{\gamma_i(\psi_i^t(V_i))} \cdot \gamma_i(\psi_i^t(V_i)) dt\right),$$

Haciendo el cambio de variable $W_i(t) := \psi_i^t(V_i)$ con $W_i(0) = V_i$, $W_i(t_i(V_i)) = 1$, $dW_i(t)/dt = d\psi_i^t(V_i)/dt = \gamma_i(\psi_i^t(V_i))$, obtenemos:

$$t'_i(V_i) = -\frac{1}{\gamma_i(1)} \cdot \exp\left(\int_{V_i}^1 \frac{\gamma'_i(W_i)}{\gamma_i(W_i)} dW_i\right) = -\frac{1}{\gamma_i(1)} \cdot \exp(\log(\gamma_i(1)) - \log \gamma_i(V_i)),$$

de donde concluimos

$$t'_i(V_i) = \frac{-1}{\gamma_i(V_i)},$$

como queríamos demostrar. $\square$

4.4. Contractividad a trozos del mapa de Poincaré

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema principal de este trabajo:

Teorema 4.12 (Contractividad a trozos del mapa de Poincaré)

Sea una red neuronal inhibitoria de grafo completo con $m \geq 2$ neuronas y con interacciones sinápticas eficientes. Sea $B \subset [-1, 1]^m \subset \mathbb{R}^m$ la sección de Poincaré definida en 3.6. Entonces el mapa de primer retorno a B , o mapa de Poincaré $\rho : B \mapsto B$, es contractivo a trozos con respecto a una distancia que induce en B la topología heredada de su inclusión en $\mathbb{R}^m$.

Demostración:

Probaremos que las piezas de contractividad de ρ son los conjuntos $B_1, B_2, \dots, B_m$ contruidos en la Definición 4.3. Teniendo en cuenta el Lema 4.4, basta probar que para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, la aplicación $\rho^{(i)} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ es uniformemente contractiva cuando se la restringe al conjunto B_i , pues $\rho^{(i)}|_{B_i} = \rho|_{B_i} : B_i \mapsto B$.

Construimos el cambio variables ξ que plancha el flujo solución en el cubo Q , según Teorema 4.5, y que cumple además las condiciones del Lema 4.6. Consideramos la métrica dist construida en la Definición 4.7. Para demostrar el Teorema 4.12 basta encontrar una constante $0 < \lambda < 1$ tal que:

$$\text{dist}(\rho^{(i)}(U), \rho^{(i)}(V)) \leq \lambda \text{dist}(U, V) \quad \forall U, V \in B_i \quad \forall 1 \leq i \leq m \quad (\text{A demostrar}) \quad (22)$$

Fijemos un valor de $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $B_i \neq \emptyset$. Aplicando el Lema 4.4 tenemos que:

$$\rho(V) = \rho^{(i)}(V) \quad \forall V \in B_i.$$

Fijamos dos puntos $U, V \in B_i$ y denotamos

$$U' := \xi(U) = (\xi_1(U_1), \xi_2(U_2), \dots, \xi_m(U_m)), \quad V' := \xi(V) = (\xi_1(V_1), \xi_2(V_2), \dots, \xi_m(V_m)).$$

Calculamos ahora $\text{dist}(\rho(U), \rho(V)) = \text{dist}(\rho^{(i)}(U), \rho^{(i)}(V))$ por medio de la siguiente integral, respecto de un parámetro s , de la función vectorial $\rho^{(i)} \circ \xi^{-1}$ en el segmento $[U', V'] = \{V' + s(U' - V') : 0 \leq s \leq 1\}$. Obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\rho^{(i)}(U), \rho^{(i)}(V)) &= \text{dist}(\rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(U'), \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(V')) = \\ &= \left\| \xi \circ \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(U') - \xi \circ \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(V') \right\| = \left\| \int_0^1 \frac{d\xi \circ \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(V' + s(U' - V'))}{ds} ds \right\| \leq \\ &= \int_0^1 \left\| \frac{d\xi \circ \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(V' + s(U' - V'))}{ds} \right\| ds = \\ &= \int_0^1 \left\| d\xi \cdot d\rho^{(i)} \cdot d\xi^{-1}(U' - V') \right\| ds \leq \int_0^1 \left\| d\xi \cdot d\rho^{(i)} \cdot d\xi^{-1} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\| ds. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral, existe $W' = V' + s(U' - V')$ para algún valor de $s \in [0, 1]$ tal que:

$$\int_0^1 \left\| d\xi \cdot d\rho^{(i)} \cdot d\xi^{-1} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\| ds = \left\| d\xi_{\rho^{(i)}(W)} \cdot d\rho^{(i)}_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\|,$$

donde el punto $W = \xi^{-1}(W') \in Q$ existe por la Afirmación A). Entonces obtenemos:

$$\text{dist}(\rho^{(i)}(U), \rho^{(i)}(V)) \leq \left\| d\xi_{\rho^{(i)}(W)} \cdot d\rho^{(i)}_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\|.$$

Como por la Definición 4.7 $\|\xi(U) - \xi(V)\| = \text{dist}(U, V)$, para demostrar la afirmación (22), y con ello el Teorema 4.12, basta probar que existe una constante $0 < \lambda < 1$ tal que:

$$\left\| d\xi_{\rho^{(i)}(W)} \cdot d\rho^{(i)}_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\| \leq \lambda \cdot \|\xi(U) - \xi(V)\| \quad (\text{A demostrar}) \quad (23)$$

Usando las propiedades de ξ probadas en el Lema 4.6, demostraremos la afirmación (23) para cada coordenada j .

Fijemos $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Usamos la fórmula (18) del mapa $\rho_j^{(i)}$. En el caso en que $\rho_j^{(i)}(U) \leq -1$ y $\rho_j^{(i)}(V) \leq -1$, se cumple

$$\text{dist}(\rho_j^{(i)}(U), \rho_j^{(i)}(V)) = 0,$$

y por lo tanto en este caso no hay nada que probar. En el caso $\rho_j^{(i)}(U) > -1$, no es restrictivo tomar el punto V tal que $\rho_j^{(i)}(V) \geq -1$ y también W tal que $\rho_j^{(i)}(W) \geq -1$. Entonces,

$$\rho_j^{(i)}(W) = \psi_j^{(i)}(W) - h_{ij}, \quad d\rho_j^{(i)} = d\psi_j^{(i)},$$

donde usamos la notación siguiente

$$\psi_j^{(i)}(W) := \psi_j^{t_i(W_i)}(W_j) \quad \forall W \in Q. \quad (24)$$

Usando el Lema 4.6, observando que para funciones reales de una variable real $d\xi_j = \xi'_j = 1/\gamma'_j$, y multiplicando y dividiendo por

$$d\xi_j^{-1} \xi_j \circ \psi_j^{(i)}(W) = (d\xi_j \psi_j^{(i)}(W_j))^{-1} = \gamma_j(\psi_j^{(i)}(W)),$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} & d\xi_j \rho_j^{(i)}(W) \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) = \\ & \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \cdot d\xi_j \psi_j^{(i)}(W_j) \cdot d\psi_j^{(i)} W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) = \\ & \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \cdot d(\xi_j \circ \psi_j^{(i)})_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)). \end{aligned} \quad (25)$$

Aplicando las igualdades (20) y (24), y recordando que por el Lema 4.6, $a_j = 1$, obtenemos:

$$\xi_j \circ \psi_j^{(i)}(W) = \xi_j \circ \psi^{(t_i(W_i))}(W_j) = t_i(W_i) + \xi_j(W_j).$$

Por lo tanto,

$$d(\xi_j \circ \psi_j^{(i)})_W \cdot (U - V) = t'_i(W_i)(U_i - V_i) + \xi'_j(W_j)(U_j - V_j).$$

Sustituyendo en (25) resulta:

$$\begin{aligned} & d\xi_j \rho_j^{(i)}(W) \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) = \\ & \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \cdot H, \text{ donde} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} H &= t'_i(W_i) \cdot d\xi_i^{-1} \xi_i(W_i) \cdot (\xi(U_i) - \xi(V_i)) + d\xi_j W_j \cdot d\xi_j^{-1} \xi_j(W) \cdot (\xi_j(U_j) - \xi_j(V_j)) = \\ &= t'_i(W_i) \cdot \gamma_i(W_i) \cdot (\xi(U_i) - \xi(V_i)) + (\xi_j(U_j) - \xi_j(V_j)). \end{aligned} \quad (27)$$

Aplicando el Lema 4.11: $t'_i(W_i) = \frac{-1}{\gamma_i(W_i)}$. Sustituyendo en las igualdades (26) y (27):

$$d\xi_j \rho_j^{(i)}(W) \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) =$$

$$\frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \cdot \left((\xi(U_i) - \xi(V_i)) + (\xi_j(U_j) - \xi_j(V_j)) \right). \quad (28)$$

Finalmente tomando el valor absoluto en la igualdad (28) resulta:

$$\begin{aligned} & \left| d\xi_{\rho_j^{(i)}(W)} \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot \left(\xi(U) - \xi(V) \right) \right| \leq \\ & \left| \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \right| \cdot \left(|\xi(U_i) - \xi(V_i)| + |\xi_j(U_j) - \xi_j(V_j)| \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Recordemos que por la Definición 4.7, la norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^m$ que estamos empleando es la del máximo del valor absoluto de las componentes. Entonces, de la desigualdad (29) resulta

$$\begin{aligned} & \left| d\xi_{\rho_j^{(i)}(W)} \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot \left(\xi(U) - \xi(V) \right) \right| \leq \\ & \left| \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \right| \cdot 2 \cdot \|\xi(U) - \xi(V)\|. \end{aligned} \quad (30)$$

Sea

$$\lambda := 2 \cdot \max_{i,j} \left| \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \right|.$$

Por la desigualdad demostrada en el Lema 3.5, tenemos

$$0 < \lambda < 1.$$

Luego, sustituyendo en la desigualdad (30) concluimos que

$$\left| d\xi_{\rho_j^{(i)}(W)} \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot \left(\xi(U) - \xi(V) \right) \right| \leq \lambda \cdot \|\xi(U) - \xi(V)\|.$$

Como la desigualdad anterior vale para todo $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, tenemos una misma cota superior para el valor absoluto de todas las componentes. Luego:

$$\left\| d\xi_{\rho^{(i)}(W)} \cdot d\rho^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot \left(\xi(U) - \xi(V) \right) \right\| \leq \lambda \cdot \|\xi(U) - \xi(V)\|,$$

terminando de demostrar la afirmación (23) y el Teorema 4.12. $\square$

Referencias

- [1] J. Bremont *Dynamics of injective quasi contractions*. Erg. Theor. Dyn Syst. 26 (2006), pp.19–44
- [2] E. Catsigeras, R. Budelli: *Topological dynamics of generic piecewise continuous contractive maps in n dimensions*, Int. Journ. Pure Appl. Math 68 (2011), pp. 61–83
- [3] E.Catsigeras, P.Guiraud *Integrate and fire neural networks, piecewise contractive maps and limit cycles*. Journal of Math. Biology 67 (2013), pp. 609–655 DOI 10.1007/s00285-012-0560-7
- [4] E. Catsigeras, P. Guiraud, A. Meyroneinc, E. Ugalde *On the Asymptotic Properties of Piecewise Contracting Maps* ArXiv 1108.1501v2 [math.DS], 2014
- [5] E. Catsigeras, A. Rovella, R. Budelli: *Contractive piecewise continuous maps modeling networkds of inhibitory neurons*. Int. Journ. Pure Appl. Math. 61 (2010), pp. 381–408
- [6] B. Cessac *A discrete time neural network model withy spiking neurons. Rigorous results on the spontaneous dynamics*. Journ. Math. Biol. 56 (2008), pp. 311–345
- [7] J.M. Gambaudo, C. Tresser: *On the dynamics of quasi-contractions*. Bol. Soc. Bras. Mat. 19 (1988), pp. 61–114
- [8] E.M. Izhikevich: *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. MIT Press, 2007
- [9] W. Mass, C.M. Bishop (Eds): *Pulsed Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, 2001
- [10] G.M. Ramírez Ávila, J.L. Guisset, J.L. Deneubourg: *Synchronization in light-controlled oscillators*. Physica D 182 (2003), pp. 254–273.
- [11] N.Rubido, C.Cabeza, S.Kahan, G.M.Ramírez Ávila, A.C. Martí: *Synchronization regions of two pulse-coupled electronic piecewise linear oscillators*. Europ. Phys. Journ. D 62 (2011), pp. 51–56, doi: 10.1140/epjd/e2010-00215-4
- [12] W. Rudin *Análisis Real y Complejo*. Ed. Alhambra, Madrid, 1979
- [13] J. Sotomayor *Licões de equações diferenciais ordinárias*. IMPA-CNPq, Rio de Janeiro, 1979
- [14] T. Yang, L.O. Chua: *Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication* IEEE Trans. Circuits Syst. 44 (1997), pp. 976–988