**UN ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA EN LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD.**

Eleonora Catsigeras[1], Karina Curione[2], Marina Míguez[3]

4 de julio de 2005

## RESUMEN

Se analizan procesos cognitivos del aprendizaje significativo, desde un enfoque constructivista, centrado en las prácticas docentes aplicadas a la enseñanza de los conceptos de límite de sucesiones y continuidad de funciones, en un primer curso de Cálculo del semestre de ingreso a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (Uruguay).

## 1. INTRODUCCIÓN

Paradójicamente la mayoría de las dificultades en el aprendizaje de los contenidos del primer curso de Cálculo al ingreso a la carrera universitaria de la Facultad de Ingeniería, se encuentra en aquellos contenidos de la asignatura que son revisión de los últimos años de Enseñanza Secundaria: límite, continuidad, topología en la recta, sucesiones y series, entre otros. Una de las razones es la dificultad intrínseca de dichos temas; aunque básicos en la Matemática, involucran conceptos abstractos que en apariencia quedan desconectados de las vivencias cotidianas de los estudiantes.

Las teorías constructivistas del aprendizaje (Piaget 1929, Vigotsky 1930, Ausubel 2002, [1]) conciben el conocimiento como resultado de la interacción entre la nueva información y la información previa, construyendo modelos para interpretar la nueva información y no sólo recibirla.

Ausubel formula en 1963 la teoría del aprendizaje significativo, una propuesta teórica influyente en el enfoque constructivista. [2] Posteriormente la teoría del cambio conceptual, planteada en el modelo clásico de Posner y Strike (1982) aborda un aspecto esencial de la psicología cognitiva al centrarse en los procesos de transformación del conocimiento, pero aportando una perspectiva aplicada a la educación, con estudios que han llevado a concebir el aprendizaje de los conceptos científicos como un proceso de cambio conceptual. Desde esta último perspectiva aplicada a la educación en las ciencias, uno de los objetivos centrales consiste en transformar, no sustituir sino cambiar, las nociones cotidianas y superficiales con que los alumnos llegan a clase de modo de adquirir los conceptos académicos y científicos. La teoría del cambio conceptual en ese sentido se refiere al pasaje de las ideas previas a los conocimientos académicos que se pretende enseñar. [5]

A diferencia del modelo clásico de Posner y Strike sobre la teoría del cambio conceptual, en los modelos contextualistas (Linder, 1987) no se pone énfasis en cambiar las ideas previas sino en potenciar las capacidades de los sujetos para distinguir las distintas concepciones y la manera más correcta de aplicarlas en diversos contextos: el saber aplicar los distintos conocimientos en distintos contextos.

[1] Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL) de la Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565 Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

[2] Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI). Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: curione@fing.edu.uy

[3] Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI). Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: mmiguez@fing.edu.uy

Una de las limitaciones del aprendizaje memorístico o verbalista, si no va acompañado de un componente deliberado de aprendizaje significativo, es que se saturan las capacidades cognitivas. *"El potencial cognitivo humano a diferencia de un ordenador no puede manejar con mucha eficacia información que se enlaza con él de manera literal."* [2] Esto adquiere particular relevancia en el aprendizaje de la Matemática en el ámbito universitario; requiere tanto de parte del alumno como del docente estrategias que promuevan el enlace significativo de los conceptos, como forma de propiciar un aprendizaje con sentido para el alumno. La significación personal implica que el alumno atraviese un proceso de construcción personal de la información recibida, tendiente a romper con un modelo de aprendizaje repetitivo donde el alumno asimila para luego reproducir información que a corto plazo perderá, o conservará como conocimiento inherte.

Numerosos estudios acuerdan en subrayar que el aprendizaje de conceptos científicos exige como condición fundamental, partir de los conceptos espontáneos con que los alumnos llegan al aula y que se han originado en la vida cotidiana, por fuera del ámbito académico. No obstante es sin duda imprescindible la formalización racional y simbólica en alguna etapa de la enseñanza de los contenidos. Pero debe suceder y no preceder a los procedimientos constructivistas. En las secciones siguientes se detallará un poco más algunos aspectos de las teorías del aprendizaje expuestas antes, en el contexto aplicado a la enseñanza de los conceptos matemáticos de límite de sucesiones y continuidad de funciones, en el curso de Cálculo al ingreso a la Universidad.

## 2. EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE SUCESIONES

Resulta artificial y limitante introducir el concepto de *sucesión* restringiéndose al espacio de puntos de una recta. Resulta más amplio y fácil de comprender comenzar por sucesiones en un conjunto cualquiera, por ejemplo como subconjunto numerado de puntos de un plano, (que puede ser en el mapa de una región o de una ciudad, para fijar ideas), o el conjunto de personas de un país (que pueden estar ordenadas por su cédula de identidad).

El concepto matemático de sucesión es uno de esos pocos conceptos para los cuales el significado usual de la palabra en la lengua española coincide con el de la definición precisa matemática general.

(1) *Sucesión es un conjunto de cosas que se hallan o pasan una después de la otra* (diccionario Kapelusz de la Lengua Española).

(2) Definición matemática: *Sucesión es una descripción ordenada, según la ordenación natural*[4]*, de elementos de un conjunto no vacío cualquiera A* (en la que se admite repeticiones y ausencias de elementos de A).

Castorina plantea: "*Las ideas previas pueden ser un obstáculo o también pueden ser ideas precursoras*" [3] del concepto científico que se pretende introducir. Por una parte, en la definición matemática abstracta de sucesión, las ideas cotidianas son precursoras. Pero para eso es conveniente que no estén deformadas por la escolarización previa que suele definir sucesión de manera restringida y desconectada del significado usual y general en el lenguaje cotidiano. Por otra parte algunas otras ideas cotidianas constituyen un obstáculo, por ejemplo algunas ideas previas al concepto de límite de una sucesión.

La idea intuitiva pero precisa de límite es la siguiente: *En el paso n el término de la sucesión y todos los que siguen van a encontrarse tan cerca como se desee de su límite*. [4]

La idea previa errónea es el único modo de acercarse al límite consiste en avanzar hacia él de forma que en cada paso se esté más cerca del límite que en el paso anterior. Se cree que la aproximación al límite debe mejorar de un paso al siguiente, y que si esto no sucediera entonces la

[4] Ordenado según ordinales que son los números naturales: 1, 2, 3, …, n , n+1, …

sucesión no podría ser convergente. El estudiante descarta equivocadamente el acercamiento al límite con sucesivos avances y retrocesos, creyendo que estos implican la oscilación permanente y la inexistencia de límite.

El concepto previo aunque equivocado es persistente y resistente. Cuesta convencer al estudiante de su falsedad. Aunque el alumno reconoce haber entendido un contraejemplo, no resulta fácil que asimile significativamente la afirmación de que no toda sucesión convergente es necesariamente monótona. La persistencia de las ideas previas fue señalada por diversos autores de las teorías de cambio conceptual en el aprendizaje. Pozo señala en [7] uno de los factores explicativos de la tenaz persistencia de las ideas previas: "*Tomando uno de los tantos términos que delimitan el concepto diremos que las ideas previas o espontáneas surgen de la actividad cotidiana del sujeto en un proceso de interacción con el entorno. Sirven entre otras cosas para predecir ese entorno.*" Es necesario lograr el cambio de las ideas cotidianas erróneas; para esto apelamos no solo a contraejemplos teóricos, sino a nuevas ideas cotidianas que los ilustren. Un medio, en el caso del límite de sucesiones no monótonas, puede ser por ejemplo el siguiente argumento informal pero preciso: *Se puede aproximar desde el sur al punto A del Ecuador, sin alcanzarlo nunca, caminando tres pasos hacia el norte, dos hacia el sur, y así sucesivamente tres hacia el norte, dos hacia el sur, cada vez pasos más cortos de modo de no alcanzar nunca al punto A pero de aproximarse a él, como límite asintótico, en infinitos pasos. La sucesión de pasos no es monótona y el límite sería A lateralmente por el Sur.*

Recordamos el planteo de Ausubel para quien la condición más importante para que el aprendizaje sea significativo es que pueda relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial, con lo que el alumno ya sabe. Consideramos que el ejemplo anterior tiende a esa dirección.

## 3. EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD.

Al introducir el concepto de continuidad de una función en el aula suelen aparecer, en forma más o menos consciente, diversos conflictos cognitivos con ideas cotidianas y previas. Resulta difícil lograr el aprendizaje significativo del concepto de continuidad de una función, principalmente por la falta inicial de inteligibilidad para el alumno de la primera de las siguientes definiciones matemáticas precisas (aplicable a funciones reales de una variable real):

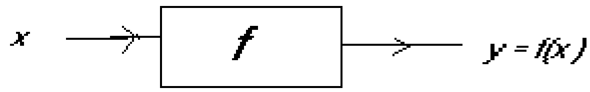
(3) Definición: *Un función $f: D \rightarrow C$ es continua en el punto a del dominio D si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (llamado módulo de continuidad) tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x-a| < \delta$*

(4) Definición: *Una función $f: D \rightarrow C$ es continua si lo es en todos los puntos de su dominio D.*

La idea intuitiva previa con la que el estudiante accede al curso universitario es la de que "la gráfica de una función continua tiene un trazo continuo". Eso es incorrecto ya que depende de la conexión del dominio de la función. Para reconocer el conflicto puede plantearse la siguiente observación práctica: *Si el dominio está formado por dos intervalos disjuntos, la función puede ser continua aunque su trazo en la representación gráfica no puede realizarse sin levantar el lápiz.*

De acuerdo con las formulaciones de la teoría del aprendizaje significativo, la definición (3) presenta un desafío. Es usualmente repetido el concepto de continuidad de una función en un punto, tanto por estudiantes como por docentes, verbalmente y desestructuradamente, a lo sumo relacionándolo con propiedades de la gráfica de la función y con símbolos de implicación lógica. Pero creemos que no es significativamente comprendido el concepto, entre otros motivos, porque queda desconectado de ideas previas intuitivas y cotidianas.Veamos un ejemplo de cómo puede subsanarse este problema.

**Ejemplo:** Consideremos un aparato f (usemos la letra f de función), por ejemplo una caja con una puerta de entrada, por donde entra la variable independiente *"X"*, y una puerta de salida, por donde sale la variable dependiente *"Y= f(X)"*.




--- Hay un valor deseado a la salida $Y_0$ para el cual la entrada debería ser exactamente $X_0$. Es decir f $(X_0) = Y_0$. Ni la variable de entrada ni la de salida se pueden ajustar a valores exactos siempre, sino que hay errores, imprecisiones que hacen que el valor de X sea aproximadamente pero no necesariamente igual a $X_0$ y por lo tanto el valor de la salida $Y = f(X)$ sea aproximadamente pero no necesariamente igual a $Y_0 = f(X_0)$.
--- El técnico de matenimiento del aparato debe satisfacer al cliente. El cliente evalúa cómo funciona la caja observando únicamente lo que sucede en la variable a la salida Y. En cambio el técnico acondiciona el aparato de modo de satisfacer la demanda del cliente, ajustando únicamente la variable de entrada X.
--- El cliente demanda que sea $Y = Y_0$, pero admite que la igualdad no se cumpla exactamente sino con un margen de error máximo $\varepsilon > 0$: $|Y - Y_0| < \varepsilon$.
--- El técnico entonces ajusta la variable de entrada, pero no puede siempre ajustarla de modo que $X = X_0$ exactamente. Se admite una tolerancia de variación a la entrada $\delta>0$: $| X - X_0| < \delta$
--- Finalmente el técnico debe ajustar la entrada con una variación delta adecuada de forma que valga la siguiente premisa: $| X - X_0| < \delta$ IMPLICA $| Y - Y_0| < \varepsilon$. Significa que se ajusta la entrada con una variación adecuada que satisface la demanda del cliente.

Creemos que no alcanza con la exposición del docente de su propia idea cotidiana relacionada con el concepto a definir formalmente. Es necesaria una construcción reflexiva efectuada intra e interpersonalmente a los alumnos. Estas actividades han sido promovidas mediante un foro de discusión en la que los estudiantes preguntan, responden e intentan responder, moderado por el docente. Este foro establece una actividad y actitud social de los alumnos entre ellos y con el docente. Se aprende Matemática cuando se trata de justificar, sustentar y defender ante los otros los conceptos aprendidos. Desde la perspectiva de Vigotsky las formas superiores de conocimiento son socio-generadas. La atención, la memoria lógica, la formación de conceptos, la voluntad, se generan en el plano social y luego se desarrollan en el psicológico. Incluso al convertirse en procesos psíquicos su naturaleza mantiene el rasgo cuasi-social: Hasta a solas el hombre ejercita funciones de comunicación. [6]

Como conclusión observamos que la definición precisa (3) planteada anteriormente es imprescindible en la enseñanza del concepto de continuidad de una función. No debe ser sustituida por las ideas cotidianas o intuitivas que se utilicen para ilustrarla. Pero debe proceder y no anteceder a la presentación constructiva de la idea que la ilustra. Y esta debe ser ajustada con precisión al concepto científico que se pretende ilustrar.

## 4. CONCLUSIONES

El racionalismo está implícito en la actitud observada frecuentemente de encarar como primera y a veces única estrategia de resolución o de demostración, tanto por docentes en sus exposiciones en clase, como por estudiantes en la resolución de problemas, el uso exclusivo de premisas lógicas racionales sobre los símbolos formales de las definiciones, apelando a la racionalidad lógica como calidad innata en el conocimiento.

El empirismo, el otro polo en las teorías filosóficas clásicas del conocimiento, también está implícito en la actitud pasiva, no menos frecuente en docentes y alumnos, de encarar el aprendizaje como una impresión de conocimientos provenientes del exterior en una mente rasa, a lo sumo bajo un sistema de estímulo y respuesta, y de encarar como primera y a veces única estrategia de resolución o de demostración la práctica del ensayo y error.

Ambos polos se manifiestan frecuentemente en los textos y las clases expositivas, acopladas al asociacionismo. Ambos, que son en realidad extremos de un continuo de actitudes frente al aprendizaje, son necesarias. Pero no son suficientes si hay poca o nula interacción continua con las actividades y actitudes sostenidas por las teorías constructivistas del aprendizaje.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**


[1] Miguez, M; Curione, K: *Aprendizaje de las Ciencias.* Notas del curso de Formación Docente UEFI, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República Montevideo, 2004.

[2] Ausubel, D: *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva.* Paidós. Barcelona, 2002.

[3] Bixio, C: *Entrevista a José A. Castorina. Constructivismo. Una tesis epistemológica.* Revista Aula Hoy, Nº 2, 1995

[4] Catsigeras, E: Elementos *de topología usados en Cálculo. Parte I Espacios métricos. Parte II. Sucesiones. Notas para el curso de Cálculo 1.* IMERL. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo, 2004.

[5] Posner, J; Strike, K; Hewson, P; Gertzog, W *Acomodación de un concepto científico: Hacia una teoría del cambio conceptual.* (año 1988). En Porlan, R &cols (editores) *Constructivismo y enseñanza de las ciencias*. Diada. Sevilla, 2000.

[6] Vigotsky, L: *Génesis de las funciones psíquicas superiores.* (año 1931). Obras escogidas III. Visor. Madrid, 1982.

[7] Pozo, I: *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Morata, Madrid, 1993.