Ruta al caos por duplicación de período y cascadas de multiplicación

Eleonora Catsigeras *

Comunicación presentada en la
Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos.
Piriápolis, Uruguay, 1995

RESUMEN

La renormalización de un sistema dinámico significa, a grandes razgos, la aplicación reiterada de una transformación del espacio en una región reducida del mismo, y la observación del nuevo sistema obtenido a través de un cabmio de variables adecuado que agranda la pequeña región donde se efectúa la renormalización. Dicho de otra forma, la renormalización pasa de un sistema dinámico a otro que contempla el comportamiento del retorno a una región reducida del espacio.

En casos excepcionales el sistema renormalizado es idéntico al sistema global antes de renormalizar. Esta propiedad de autoidentidad caracteriza al llamado mapa de Feigenbaum en el intervalo.

Buena parte de los sistemas renormalizables no son autoidénticos, (como el mapa de Feigenbaum es) pero son autosimilares: el renormalizado no copia idénticamente al sistema global, sino que lo imita deformándolo un poco. En particular, ya que el sistema original era renormalizable una vez, también lo será el sistema renormalizado.

*E-mail: eleonora@fing.edu.uy Instituto de Matemática, Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

Los sistemas llamados çascadas.ªdmiten que el proceso de renormalización pueda repetirse infinitas veces. En ellos el sistema renormalizado es a su vez renormalizable, y puede repetirse la operación una cantidad infinita numerable de veces. Contienen copias autosimilares al sistema global, éstas a su vez contienen nuevas copias más pequeñas autosimilares, y éstas nuevas copias... Cada copia deforma al sistema global, y por eso en general no puede afirmarse que los renormalizados sucesivos sean convergentes. Pero por ejemplo en el llamado atractor de Feigenbaum-Coullet- Tresser, los renormalizados pueden ser convergentes. En dicho atractor convergen al mapa de Feigenbaum, que es autoidéntico por la renormalización.

El atractor de Feigenbaum, Coullet y Tresser fue descubierto al final de la década de los setenta, como la conducta generada por una sucesión de bifurcaciones de cuplicación de período. Durante la presentación explicaremos este fenómeno, que consiste esencialmente en la evolución del sistema, al mover un parámetro, pasando de conductas estables a conductas caóticas, a través de una secuencia de bifurcaciones que van complicando paulatinamente su dinámica, y que acumulan en una cascada. La cascada en sí es inestable: se destruye con pequeñas perturbaciones. No es aún un sistema caótico porque no tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero se conjetura que está en el borde del caos: pequeñísimas perturbaciones la conducen a conductas caóticas. Expondremos los resultados demostrados y los problemas abiertos en relación con esta conjetura.

Los atractores de Feigenbaum, Coullet y Tresser admiten además propiedades de universalidad: existen constantes que regulan la geometría microscópica del atractor, y la relación de valores del parámetro entre dos bifurcaciones consecutivas de la sucesión que genera la cascada. Estas propiedades de universalidad fueron demostradas para esos atractores, pero existen ejemplos que muestran que no son válidas para otras cascadas.

Expondremos además otras pautas que son indicio de la presencia de una cascada, además de la autosimilitud y la universalidad. En la primera parte de la charla, nos restringiremos a las cascadas de duplicación, y en la segunda parte generalizaremos la definición y los ejemplos, para introducir las cascadas de multiplicación.

Ruta al caos por duplicación de período y cascadas de multiplicación

Eleonora Catsigeras [*]

Comunicación presentada en la
Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos.
Piriápolis, Uruguay, 1995

TRANSPARENCIAS

Transparencia 1

En la parte superior se muestra una bifurcación de duplicación de período en la que un punto hiperbólico atractor (pozo) se transforma en punto silla y genera una órbita periódica de período doble atractora (pozo)

En la parte inferior se muestra, al mover el parámetro, una sucesión de bifurcaciones de duplicación de período que acumula en un valor del parámetro λ_∞ para el cual el sistema exhibe un atractor de Feigenbaum-Coullet-Tresser.

Transparencia 2

Para un mapa unidimensional, se dibuja solamente el conjunto atractor para valores del parámetro intermedios entre dos bifurcaciones de duplicación de período consecutivas, y se observa la aparición de gaps de repulsión en el conjunto de Cantor atractor donde acumula la cascada.

Transparencia 3 Foto de los anillos de Saturno tomada por Voyager I en noviembre de 1980. Se observa la similitud entre los gaps de repulsión en el conjunto de Cantor atractor donde acumula una cascada de duplicación de período, y los gaps que el mapa de retorno a una sección (aproximadamente unidimensional) transversal al anillo.

[*]E-mail: eleonora@fing.edu.uy Instituto de Matemática, Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

(Esta fotografía fue utilizada durante la conferencia. No se incluye en esta publicación porque está sujeta a derechos de Copyright. Se encuentra publicada en Scientific American, Issue Jan. 1982)

Transparencia 4

Diagrama de fases de una bifurcación de duplicación de período de un diffeomorfismo en dimensión 2En cada cuadro, arriba, se dibuja el comportamiento de las órbitas, y abajo la ubicación de los valores propios del punto periódico en el círculo unitario. En los diagramas de fases se observa que para que se produzca la bifurcación es necesario, debido a la invertibilidad del mapa, que los valores propios pasen a ser complejos conjugados, en fases intermedias, con fase en espiral, redondeada. Pero antes de la bifurcación los valores propios son reales, con uno más grande que el otro al debilitarse la atracción hiperbólica del pozo. Esto implica que el diagrama de fases se vuelva alargado, con atracción axial cada vez más débil, hasta que se vuelve repulsión axial. Colapsa en dos atractores gemelos, cuando se produce la bifurcación que nacen como atractores con diagrama de fases axial (como en el cuadro 1).

Transparencia 5

Foto de la división celular con teñido diferencial de microtúbulos y cromosomas. Se observa que las dos células obtenidas por la división de una , son redondeadas cuando están "lejos"de dividirse. Sus cromosomoas luego adquieren una distribución axial, tal que en la dirección de ese eje se produce la duplicación. Inmediatamente después la foto de los cromosomas mantiene una forma predominantemente axial, pero que luego se redondea cuando setá todavía lejos de la próxima duplicación.

(Esta fotografía fue utilizada durante la conferencia. No se incluye en esta publicación porque está sujeta a derechos de Copyright. Se encuentra publicada en Scientific American, Issue Oct. 1980)

Transparencia 6

Se muestra otro tipo de cascadas de bifurcaciones de duplicación de período en dimensión dos.

En el cuadro 1 el ejemplo de Gambaudo-Tresser, 1992 no se puede aproximar por bifurcaciones en dimensión 1. Hemos probado que este ejemplo también es ruta al Caos: el conjunto atractor donde acumula la cascada es aproximable por tangencias homoclínicas. Pero la universalidad en la relación entre parámetros consecutivos de la cascada de bifurcaciones, rige para el atractor de Feigenbaum-Coullet-Tresser, pero no para este ejemplo de

Gambaudo-Tresser.

En el cuadro 2 se muestra que en general, cualquier cascada de duplicación de período en dimensión dos, que corresponda a un mapa que contrae área y tiene distorsión limitada (propiedad de autosimilitud con distorsión que no se va a infinito), puede reducirse a dimensión 1 (mapa unimodal o multimodal). Esta reducción nos ha permitido demostrar que en general, están en el borde del caos: es decir, después de una perturbación arbitrariamente pequeña, aparecen tangencias homoclínicas.

En el cuadro 3: extendemos el resultado anterior a cascadas de multiplicación de período. Hemos probado recientemente con Gambaudo y Moreira, que cuando la cascada es disipativa, con distorsión limitada, es reducible a dimensión 1. Y si es de multiplicación pero no de duplicación tienen entropía positiva. Es decir el conjunto atractor ya es caótico en el valor exacto donde acumula la cascada, sin necesidad de perturbar el sistema, a diferencia de lo que sucede con las cascadas de duplicación en que el atractor se aproxima por dinámicas caóticas (es ruta al caos), pero él mismo no es caótico.

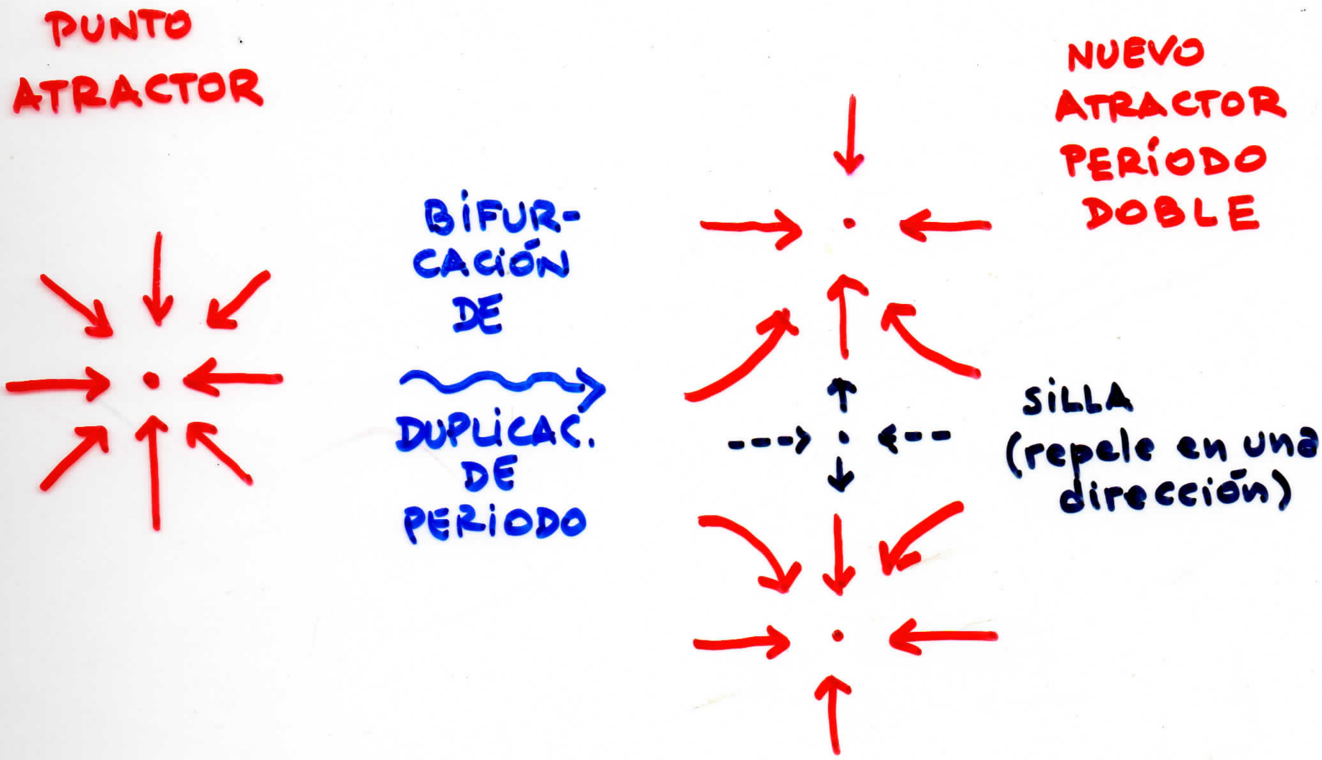
Transparencia 7

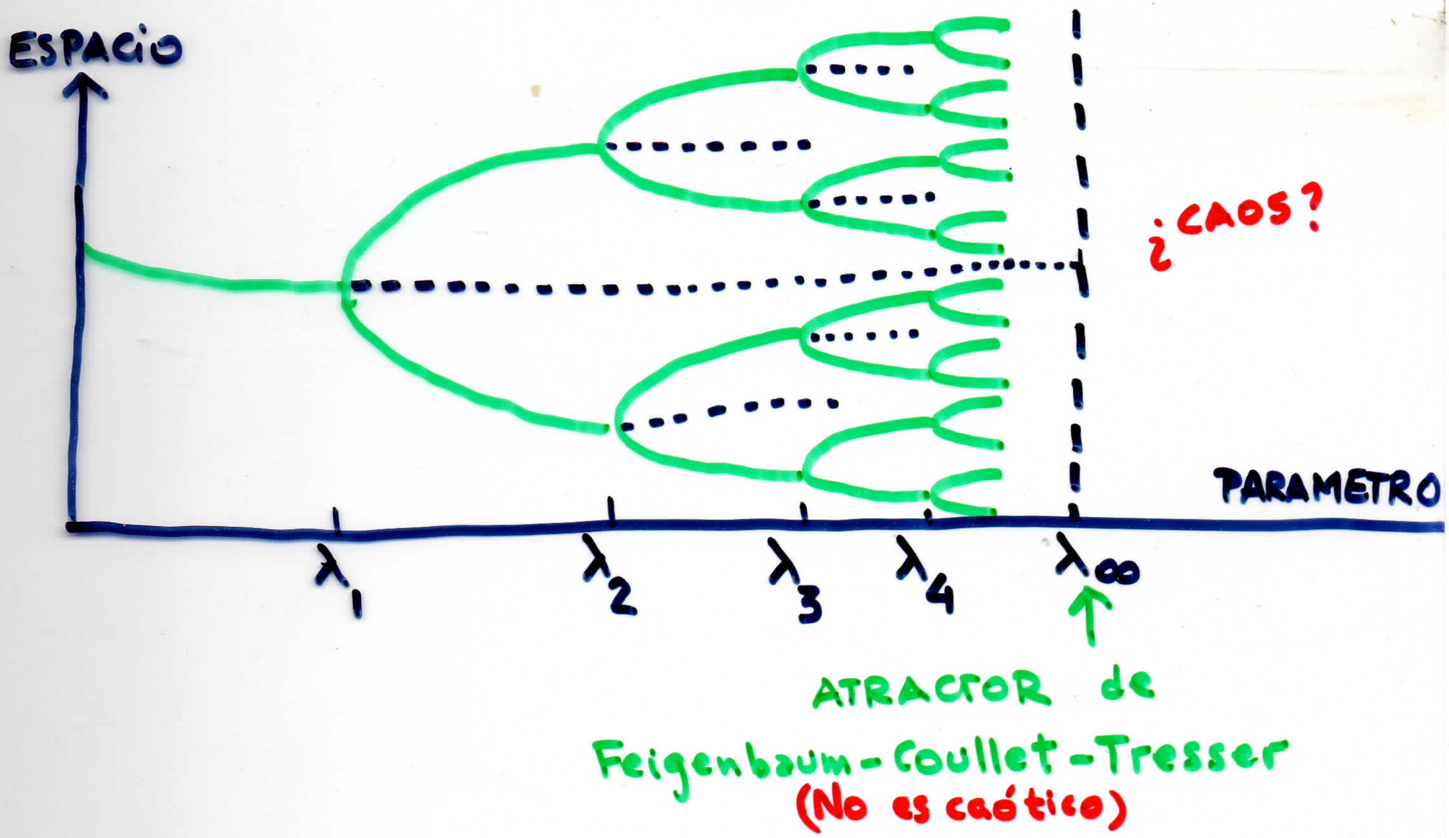
Foto de la mariposa diurna Stichophthalma Camadeva. Se observa la semejanza geométrica entre el diagrama de construcción del ejemplo de Gambaudo-Tresser en dimensión dos (cuadro 1 de la transparencia 6) y los patrones de color en las alas de la mariposa. En esta última, los períodos son 4 (uno por ala), 5 (uno por mancha redondeada oscura en cada ala), etc.

(Esta fotografía fue utilizada durante la conferencia. No se incluye en esta publicación porque está sujeta a derechos de Copyright. Se encuentra publicada en Scientific American, Issue Jan. 1982)

Transparencia 8

Conclusiones

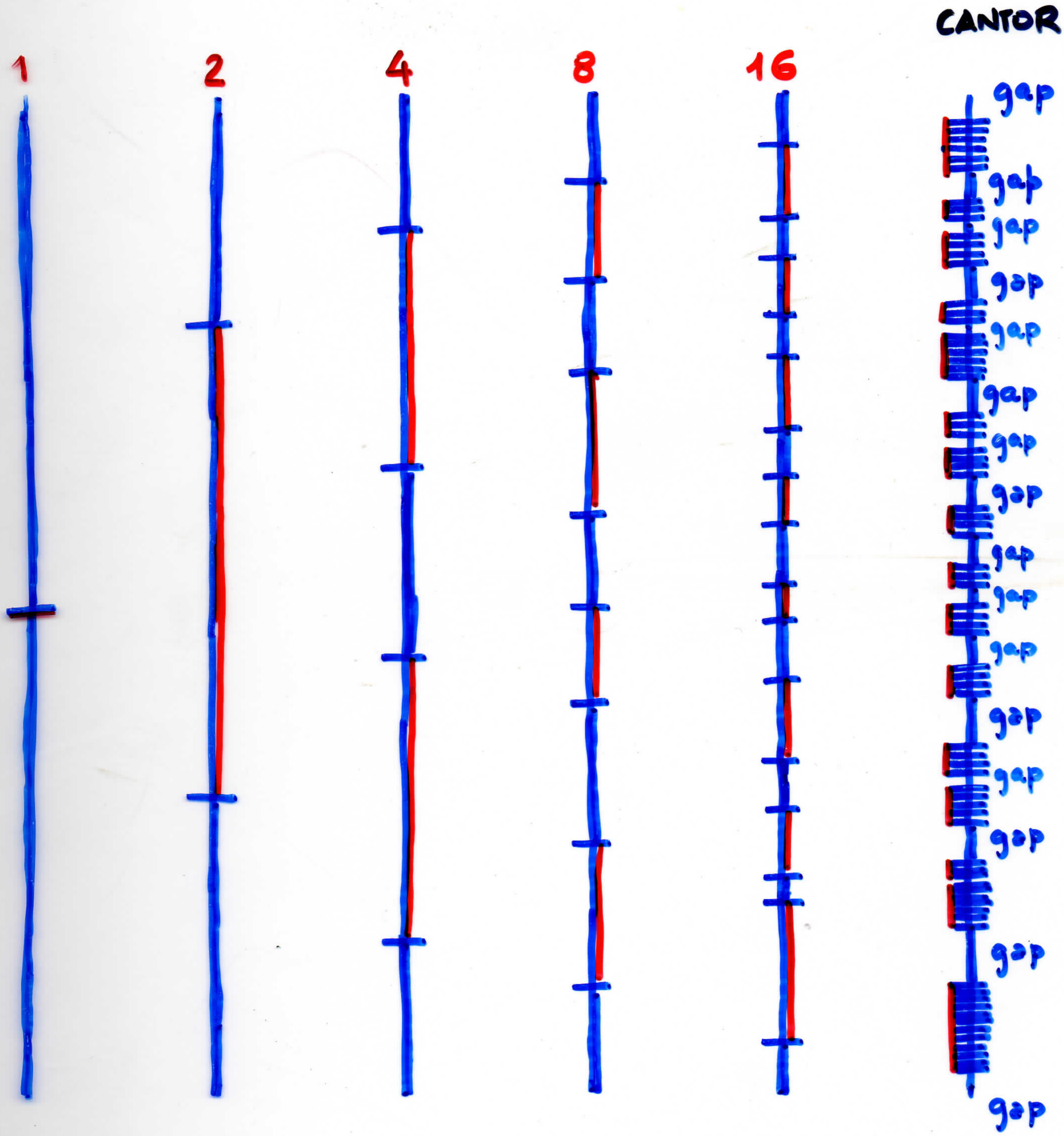




UNIVERSALIDAD MÉTRICA. Observación experimental en 1975

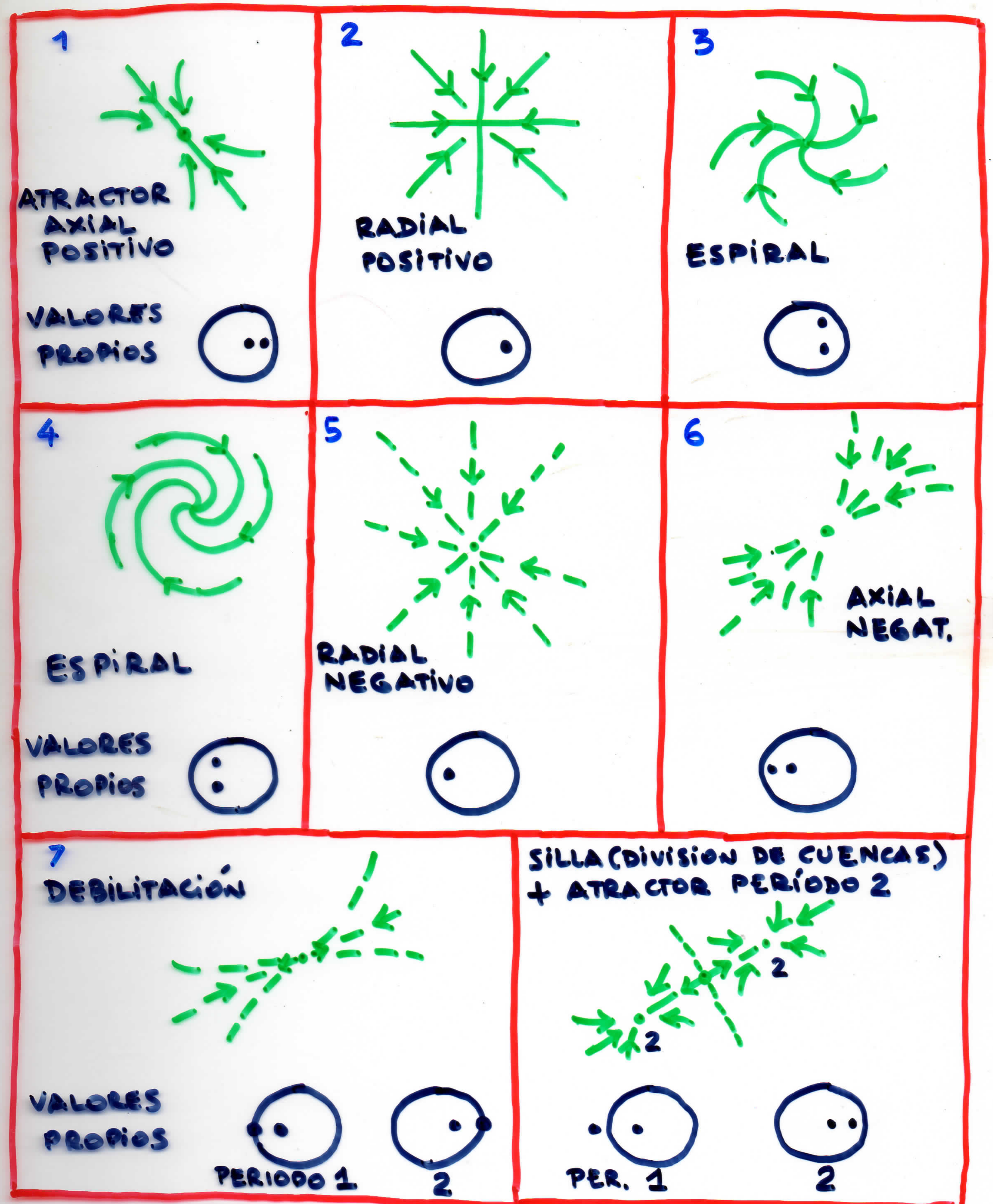
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n+1}} = 4,6692\ldots \text{ constante}$$

CASCADA DE DUPLICACIÓN EN DIM. 1



CADA ATRACTOR "LIMPIA" DOS BANDAS A UN LADO Y OTRO DE SU TRAYECTORIA: ORIGINAN LOS "GAPS" (que contienen a los repulsores)

BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERÍODO DIMENSIÓN 2



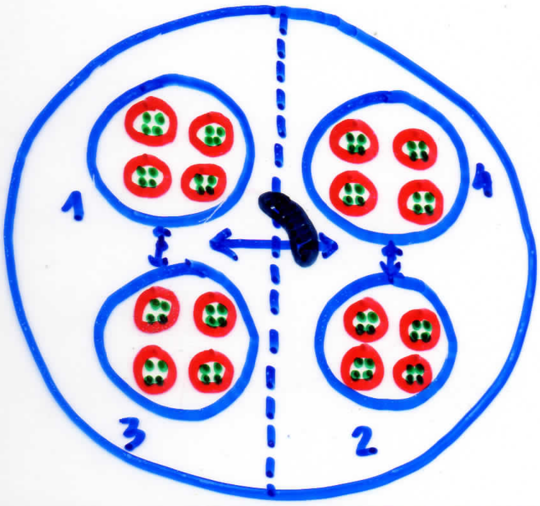
LAS SECCIONES DE VARIEDADES INESTABLES DE LAS SILLAS SON ARRASTRADAS POR LOS DOS NUEVOS ATRACTORES QUE SE LAS REPARTEN ~~SIMÉTRICAMENTE~~.EQULIBRADAMENTE.

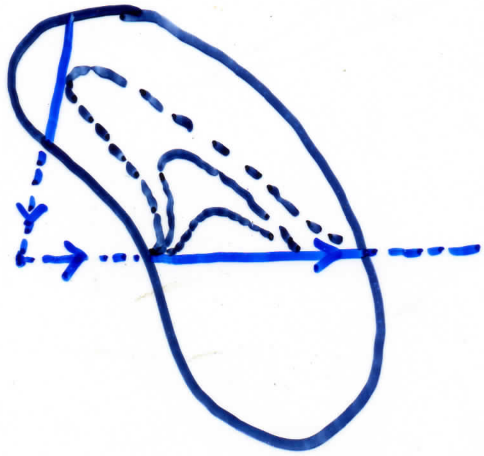
1) EJEMPLO de GAMBAUDO - TRESSER 1992 en dimensión n (no cercano a dim. 1)

CONJ. de CANTOR atractor . NO ES CAOS

PERO ESTÁ EN EL BORDE DEL CAOS (C-1995)

(PORQUE ES APROXIMABLE POR TANGENCIAS HOMOCLÍNICAS)

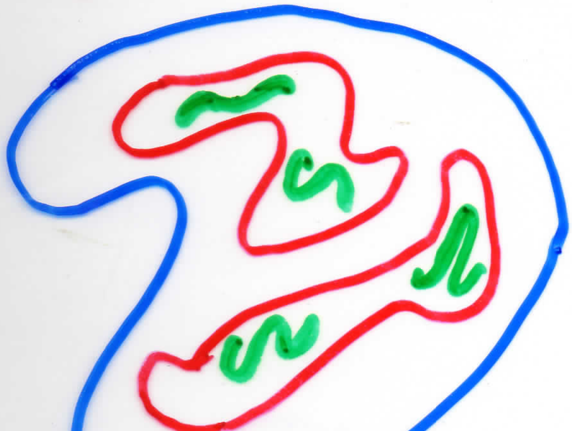




2) CASCADAS EN DIM. 2 { área contractivas
distorsión limitada

SON REDUCTIBLES A DIM. 1 (C-1995)

¿ESTÁN EN EL BORDE DEL CAOS? ??



MACROSCÓPICO

MICROSCÓPICO

CERCANO A DIM. 1

(MULTIMODAL)

3) GAMBAUDO 95: CASCADA DE MULTIPLICACIÓN

área contractiva - distorsión limitada - períodos acotados

SON REDUCTIBLES A DIM. 1

C-G-MOREIRA 96: SI NO SON DE DUPLICACIÓN

¡TIENEN ENTROPIA POSITIVA!

CASCADA DE
DUPLICACIÓN DE PERÍODO

CASCADA DE
MULTIPLICACIÓN DE PERÍODO

EN SISTEMAS DINAMICOS POR
ITERADOS $x_{n+1} = F(x_n)$

- Puede ser flujo en tiempo 1
- Puede ser 1er retorno a sección de Poincaré (no importa el tiempo)

No importa CUÁL es la función F para saber ~~sino~~ cómo es su dinámica, a partir de algunas hipótesis sobre F que la definen como "CASCADA"

LA CASCADA DE DUPLICACIÓN DE PERÍODO
NO ES CAOS, PERO ES BORDE DE CAOS

Imagen computarizada de parte del conjunto de Mandelbrot (R. Devaney 1992)

La temática del encuentro es la dinámica sensible a condiciones iniciales y a parámetros, presente en la Física, Matemática, Astronomía, Biología y otras áreas relacionadas.

C. Científico: R. Budelli, J. Lewowicz, R. Markarian, A. Sicardi y G. Tancredi.

Organizan: Facultades de Ingeniería y Ciencias de la Universidad de la República.

Patrocinan: PEDECIBA y CSIC (UdelaR).

Información e Inscripciones: E. Catsigeras E-mail: eleonora@fing.edu.uy
vía WWW http://www.fisica.edu.uy
teléfono: 71 06 21

SALA DE CONGRESOS
COMPLEJO CERRO DEL TORO
23 al 25 de Mayo de 1996

PRIMERA
CONFERENCIA INTERDISCIPLINARIA
DE SISTEMAS CAÓTICOS

Piriápolis, del 23 al 25 de mayo de 1996

Sala de Congresos del
Complejo Cerro del Toro

PROGRAMA Y RESÚMENES

Facultades de Ingeniería y Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Patrocinan:
PEDECIBA y CSIC (Universidad de la República)

Gráficos e impresión:
CEY 932 239 Soriano y Ejido, mayo 1996

Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos

Piriápolis, del 23 al 25 de mayo de 1996

PROGRAMA

Jueves 23 de mayo

- 11:30 Registro e Inscripciones
- 12:30 Almuerzo de bienvenida
- 15:00 Apertura
- 15:10 Conferencias:
    - 15:10 Roberto Markarian: *Propiedades estadísticas en sistemas dinámicos.*
    - 16:10 Aníbal Sicardi: *Bifurcaciones y caos en sistemas disipativos extendidos*
- 17:10 Café
- 17:20 Conferencias:
    - 17:20 Raúl Ures: *Atractores caóticos*
    - 18:10 Silvina Ponce Dawson: *Conjuntos caóticos no atractivos y exponentes de Lyapunov fluctuantes*
- 20:30 Cena

Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos

Piriápolis, del 23 al 25 de mayo de 1996

PROGRAMA

Viernes 24 de mayo

- 7:15 a 8:15 Desayuno
- 8:30 Conferencias:
  - 8:30 Gabriel Paternain: *Entropía Topológica y Campos Magnéticos*
  - 9:30 Cecilia Cabeza: *Caos acústico (Estudio experimental y numérico)*
  - 10:00 Cristina Masoller: *Rutas al caos en diodos láseres realimentados*
- 10:30 Café
- 10:40 Conferencias:
  - 10:40 José Vieitez: *Vínculos entre la geometría y la dinámica en variedades de dimensión tres*
  - 11:30 Ruben Budelli: *Comportamiento dinámico de redes neuronales*
- 12:30 Almuerzo
- 15:00 Conferencias:
  - 15:00 Hernán Solari: *Trenzas Caóticas (Estimación de la entropía topológica a partir de datos experimentales)*
  - 16:00 Marcelo Cerminara: *Perturbaciones de sistemas expansivos (trabajo en colaboración con Jorge Lewowicz)*
- 17:00 Café
- 17:10 Conferencias:
  - 17:10 Sonia Pinto: *Some perturbations of the elliptical billiard.*
  - 18:10 Gabriel Pisciotano: *Dinámica de flujos geofísicos*
  - 19:00 Luis Acerenza: *Oscilaciones y caos en sistemas bioquímicos.*
- 20:30 Cena

Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos

Piriápolis, del 23 al 25 de mayo de 1996

PROGRAMA

Sábado 25 de mayo

- 7:15 a 8:15 Desayuno
- 8:30 Conferencias
  - 8:30 Sandra Kahan: *Bifurcaciones globales y caos en circuitos de Chua*
  - 9:00 Gustavo Sarasúa: *Bifurcaciones de codimensión dos y generación de flujos helicoidales en turbomaquinaria.*
  - 9:30 Eleonora Catsigeras: *Ruta al caos por duplicación de período y cascadas de multiplicación.*
- 10:20 Café
- 10:30 Conferencias
  - 10:30 Roberto Suárez: *Bifurcaciones y caos en sinsicios.*
  - 11:20 Gonzalo Tancredi: *Caos en el sistema solar, dinámica de los cuerpos menores (cometas y asteroides)*
- 12:30 Almuerzo de despedida
- 14:30 Excursión al Cerro San Antonio, Castillo de Piria y falda del Cerro Pan de Azúcar.