

# **Cursillo intensivo de Elementos de la Teoría Ergódica.**

*Eleonora Catsigeras*

Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería.  
Universidad de la República. Montevideo. URUGUAY.  
eleonora@fing.edu.uy

**Curso breve preliminar a la  
XIV Escuela Latinoamericana de Matemática,  
Balneario Solís, Uruguay, 2005**

En este curso intensivo introduciremos a la teoría ergódica de los sistemas dinámicos deterministas. En la primera parte repasaremos brevemente el enunciado del teorema ergódico de Birkhoff, las definiciones equivalentes de ergodicidad y la propiedad de mixing. En la segunda parte repasaremos la definición de exponentes de Lyapunov y el enunciado del teorema multiplicativo de Oseledec, con ejemplos de sistema hiperbólico en dimensión dos. Finalmente expondremos el espacio del shift y transformaciones de Bernoulli.

## **Programa**

1. Sistema dinámico. Objetivo de estudio de la Teoría ergódica desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.
2. Ejemplo de un sistema hiperbólico (axioma A) que preserva la medida de Lebesgue en el toro bidimensional.
3. Enunciado del teorema ergódico de Birkhoff.
4. Definición de ergodicidad y enunciado de propiedades equivalentes a la ergodicidad.
5. Definición de la propiedad mixing.
6. Definición de exponentes de Liapunov. Ejemplo.
7. Enunciado del teorema de Oseledec.
8. Ejemplo del shift de Bernoulli

# 1 Sistema Dinámico y Teoría Ergódica

Consideraremos sistemas dinámicos a tiempo discreto como iterados de un mapa  $T : X \mapsto X$  continuo en un espacio métrico compacto  $X$ .

El espacio  $X$  puede tener además una estructura de variedad diferenciable y  $T$  ser un difeomorfismo de  $X$ . En ese caso, denotaremos  $X$  como  $M$ , y  $T$  como  $f \in \text{Diff}^1(M)$ .

Denotamos  $\mathcal{B}$  la sigma álgebra de Borel en  $X$ . Sea  $\mu$  una medida de probabilidad en  $(X, \mathcal{B})$ , es decir

$$\mu(X) = 1$$

$\mu$  se dice  $T$ -invariante, o también que  $T$  preserva  $\mu$  si

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

**Teorema 1.1** *Si  $X$  es un espacio métrico compacto y  $T : X \mapsto X$  es continua, entonces existen medidas de probabilidad invariantes por  $T$ .*

*Demostración:* Ver [1].

La dinámica de  $T$ , es el sistema dinámico cuya órbita futura desde el estado inicial  $x \in X$  es

$$o(x) = \{T^n(x)\}_{n \geq 0},$$

donde  $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$ ,  $n$  veces, es el iterado  $n$ -ésimo del mapa  $T$  aplicado al punto  $x$ .

Si  $T$  es invertible se define también la órbita pasada, para  $n$  entero negativo, y la órbita (completa) para  $n \in \mathbb{Z}$ .

El (primer) objetivo de la Teoría Ergódica es estudiar la dinámica de  $T$  para  $\mu$ -c.t.p.  $x \in X$ , donde  $\mu$  es una medida invariante por  $T$ .

## 2 Ejemplo de sistema hiperbólico

Sea en el toro  $\mathbb{T}^2$  el automorfismo lineal  $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mód}_{(1,1)}$ . Podemos identificar  $f$  con la transformación lineal invertible de  $\mathbb{R}^2$ , que tiene matriz asociada  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , considerando un levantado de  $f$  al espacio de recubrimiento  $\mathbb{R}^2$  del toro  $\mathbb{T}^2$ . A menos de esa identificación, la transformación lineal con matriz  $A$  coincide con la derivada  $df_p : T_p \mathbb{T}^2 \mapsto T_p \mathbb{T}^2$  en todo punto  $p \in \mathbb{T}^2$ .

Por simplicidad denotaremos como  $f = 2, 1, 1, 1$  en  $\mathbb{T}^2$  al ejemplo de arriba. Es fácil chequear que la matriz  $A$  que define a  $f$  es diagonalizable, con dos valores propios  $\lambda, \sigma$  tales que  $0 < \lambda < 1 < \sigma$ . Entonces, en todo punto  $p \in \mathbb{T}^2$  existen dos direcciones  $S_p$  y  $U_p$  (correspondientes a los subespacios propios) tales que

$$\|df_p^n(s)\| = \lambda^n \|s\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall s \in S_p \quad \forall p \in \mathbb{T}^2$$

$$\|df_p^n(u)\| = \sigma^n \|u\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall u \in U_p \quad \forall p \in \mathbb{T}^2.$$

Es decir:  $df$  contrae hacia el futuro los vectores del subespacio  $S_p$  con tasa exponencial  $\log \lambda < 0$ , y dilata hacia el futuro los vectores del subespacio  $U_p$ , transversal a  $S_p$ , con tasa exponencial  $\log \sigma > 0$ .

En general, un difeomorfismo  $f : M \mapsto M$  en una variedad compacta y riemanniana  $M$  se llama uniformemente hiperbólico (de Anosov), si existe un splitting

$$TM = S \oplus U$$

del fibrado tangente  $TM$ , y números reales  $0 < \lambda < 1 < \sigma$  tales que

$$\begin{aligned} \|df_p^n(s)\| &\leq \lambda^n \|s\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall s \in S_p \quad \forall p \in M \\ \|df_p^n(u)\| &\geq \sigma^n \|u\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall u \in U_p \quad \forall p \in M. \end{aligned}$$

El ejemplo  $f = 2, 1, 1, 1$  en  $\mathbb{T}^2$  es, entonces, un difeomorfismo de Anosov.

Sea  $m$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{T}^2$  normalizada para que sea una probabilidad.

**Proposición 2.1** *La medida de Lebesgue  $m$  es una medida invariante por  $f = 2, 1, 1, 1$  en el toro  $\mathbb{T}^2$ .*

*Demostración:* para todo boreliano  $B$  tenemos, haciendo el cambio de variable  $q = f(p)$  la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} m(f^{-1}(B)) &= \int \chi_{f^{-1}(B)}(p) dm(p) = \int \chi_{f^{-1}(B)}(f(q)) |\det df(q)| dm(q) = \\ &= \int \chi_B(q) \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| dm(q) = \int \chi_B(q) dm(q) = m(B). \quad \square \end{aligned}$$

### 3 Teorema Ergódico de Birkhoff

**Definición 3.1** Sea  $T : X \mapsto X$  continua en un espacio métrico compacto. Sea  $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$  una función real medible. Sea  $n \geq 1$  natural. Se llama *promedio temporal* o *promedio de Birkhoff* de  $\psi$  hasta tiempo  $n$  a la función real:

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j.$$

#### **Teorema 3.2 (Birkhoff)**

*Para toda medida de probabilidad  $\mu$  invariante por  $T$ , para toda  $\psi \in L^1(\mu)$ , existe el límite  $\mu$ -c.t.p de los promedios temporales  $\psi_n$  de  $\psi$ . Es decir*

$$\exists \tilde{\psi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j \quad \mu - c.t.p. \quad x \in X.$$

Además la convergencia de  $\psi_n$  a  $\tilde{\psi}$  es también en  $L^1(\mu)$ , y

$$\int \tilde{\psi} d\mu = \int \psi d\mu.$$

Si además  $\psi \in L^p(\mu)$  para algún  $p \geq 2$ , entonces la convergencia es también en  $L^p(\mu)$ .

*Demostración:* Ver [1].

La función  $\tilde{\psi}$ , definida  $\mu$ -c.t.p., se llama *promedio temporal asintótico* de  $\psi$ .

En particular, si tomamos  $\psi = \chi_B$ , la función característica de un borealano  $B$ , entonces  $\psi_n$  se llama frecuencia de visitas a  $B$  hasta tiempo  $n$ :

$$\chi_{B_n}(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \chi_B \circ T^j(x) = \frac{\#\{0 \leq j \leq n-1 : T^j(x) \in B\}}{n}.$$

Por el teorema ergódico de Birkhoff, existe el límite de  $\chi_{B_n}(x)$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  para  $\mu$ -c.t.p. Este límite se llama *tiempo medio asintótico de estadía* en el conjunto  $B$  de la órbita futura por el punto  $x$ .

## 4 Ergodicidad

**Definición 4.1** Una medida de probabilidad  $\mu$  invariante por  $T$  se llama *ergódica* para  $T$  (o  $T$  ergódica respecto de  $\mu$ ) si para todo conjunto medible  $B$  que sea invariante por  $T$  (es decir  $T^{-1}(B) = B$ ), la medida  $\mu(B)$  es cero o uno. Es decir:

$$B \in \mathcal{B}, T^{-1}(B) = B \Rightarrow \mu(B)\mu(B^c) = 0,$$

donde  $B^c = X \setminus B$  denota el complemento de  $B$ .

**Teorema 4.2** Si  $T : X \mapsto X$  es continua en un espacio métrico compacto  $X$ , entonces existen medidas de probabilidad invariantes ergódicas para  $T$ .

*Demostración:* Ver [1].

Las siguientes afirmaciones pueden tomarse como definición de ergodicidad, pues son equivalentes a la Definición 4.1.

**Teorema 4.3** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $\mu$  es ergódica para  $T$ .
- (b) Para toda función  $\psi \in L^1(\mu)$  el promedio temporal asintótico  $\tilde{\psi}$  es igual al promedio espacial  $\int \psi d\mu$   $\mu$ -c.t.p.
- (c) Para todo conjunto medible  $B$  tal que  $T^{-1}(B) \subset B$  se cumple  $\mu(B)\mu(B^c) = 0$ .
- (d) Para todo conjunto medible  $B$  tal que  $T^{-1}(B) \supset B$  se cumple  $\mu(B)\mu(B^c) = 0$ .
- (e) Para toda pareja  $(A, B)$  de conjuntos medibles tales que  $\mu(A), \mu(B) > 0$  existe  $n \geq 1$  tal que  $T^{-n}(A) \cap B$  (transitividad medible).

- (g)  $\mu$  es un punto extremal de conjunto (que es convexo) de medidas de probabilidad invariantes por  $T$ . Es decir  $\mu = a\mu_1 + (1-a)\mu_2$  para  $\mu_1 \neq \mu_2$  medidas de probabilidad invariantes y  $0 \leq a \leq 1$  real, solo si  $a$  es cero o uno.
- (h) Para toda función real continua  $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$  el promedio temporal asintótico  $\tilde{\psi}$  es constante  $\mu$ -c.t.p.

*Demostración:* Ver [1].

**Corolario 4.4**  $\mu$  es ergódica si y solo si para todo boreliano  $B$  el tiempo medio asintótico de estadía  $\tilde{\chi}_B(x)$  es constante igual a  $\mu(B)$  para  $\mu$ -c.t.p.  $x \in X$ .

*Demostración:* El “solo si” se deduce inmediatamente de la propiedad (b) del Teorema 4.3. El “si” se demuestra por el proceso de inducción clásico que permite pasar de la integral abstracta respecto a una medida en las funciones características de los borelianos, a las funciones simples, luego a las funciones medibles no negativas, y finalmente a  $L^1(\mu)$ .  $\square$

**Corolario 4.5**  $\mu$  es ergódica si y solo si para toda pareja de borelianos  $(A, B)$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B)}{n} = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

*Demostración:* Aplicando el teorema de convergencia dominada, el Corolario 4.4 y el teorema ergódico de Birkhoff, deducimos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B)}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \left( \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j \right) \cdot \chi_B d\mu = \\ &= \int \tilde{\chi}_A \cdot \chi_B d\mu = \mu(A) \int \chi_B d\mu = \mu(A) \cdot \mu(B). \quad \square \end{aligned}$$

**Teorema 4.6** La medida de Lebesgue  $m$  es ergódica para el difeomorfismo lineal  $2, 1, 1, 1$  en el toro  $\mathbb{T}^2$ .

*Demostración:* Es un corolario inmediato de las Proposiciones ?? y 8.5, y del Teorema 8.6 que enunciaremos al final de esta exposición.

**Teorema 4.7** La medida de Lebesgue en el círculo  $S^1$  es ergódica para la rotación irracional  $f : S^1 \mapsto S^1$  definida por

$$f(z) = e^{i2\pi a} z \quad \forall z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  es una constante irracional.

*Demostración:* Ver [1].

**Teorema 4.8 (Descomposición ergódica)** Un conjunto medible  $B$  cumple  $\mu(B) = 1$  para toda medida de probabilidad  $\mu$  que sea invariante por  $T$  si y solo si  $\nu(B) = 1$  para toda medida de probabilidad  $\nu$  ergódica para  $T$ .

*Demostración:* Ver [1]

## 5 Propiedad mixing

Sea  $T : X \mapsto X$  una transformación continua en un espacio métrico compacto  $X$ , y sea  $\mu$  una medida de probabilidad invariante por  $T$ .

**Definición 5.1** La medida  $\mu$  invariante por  $T$  llama *mixing* para  $T$  (o se dice que  $T$  es mixing con respecto a la medida  $\mu$ ), si para toda pareja  $(A, B)$  de conjuntos medibles se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

**Proposición 5.2** Si  $\mu$  es *mixing* para  $T$  entonces  $\mu$  es *ergódica* para  $T$ .

*Demostración:* Aplicando la definición de mixing, y teniendo en cuenta que cuando existe el límite  $L$  de una sucesión, el límite a la Césaro (es decir el límite del promedio aritmético de los primeros  $n$  términos) es igual a  $L$ , resulta la igualdad del Corolario 4.5. Entonces  $\mu$  es ergódica.  $\square$

**Contraejemplo:** La medida de Lebesgue  $m$  para la rotación irracional en el círculo es ergódica (Teorema 4.7), pero no es mixing. En efecto, sea  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , y sea  $f(z) = e^{i2\pi a} \cdot z$  para todo  $z \in S^1$ . Considérense dos intervalos abiertos  $I_1$  e  $I_2$  de longitud menor que  $a/4$  en el círculo. Si existe  $n \geq 1$  tal que  $f^n(I_1) \cap I_2 \neq \emptyset$ , entonces  $f^{n+1}(I_1) \cap I_2 = \emptyset$ . Entonces  $m$  no puede satisfacer la definición de mixing.  $\square$

**Teorema 5.3** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $\mu$  es *mixing* para  $T$ .
- (b) Para toda pareja de funciones  $\psi, \phi \in L^1(\mu)$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\psi \circ T^n) \phi d\mu = \int \psi d\mu \int \phi d\mu.$$

*Demostración* (b) implica (a) inmediatamente tomando  $\psi = \chi_A, \phi = \chi_B$  para dos borelianos cualesquiera  $A$  y  $B$ . Por otra parte (a) implica (b) por el procedimiento clásico de inducción que permite computar la integral abstracta respecto a una medida  $\mu$  pasando de las funciones características a las funciones simples, de estas por convergencia monótona a las funciones medibles no negativas, y de estas por linealidad y definición de integral abstracta, a las funciones en  $L^1(\mu)$ .  $\square$

## 6 Exponentes de Lyapunov

Se dará durante el curso.

## 7 Teorema de Oseledec

Se dará durante el curso.

## 8 Shift y medidas de Bernoulli

Sea  $k \geq 2$  un número natural fijo. Llamamos alfabeto al conjunto  $\aleph = \{1, 2, \dots, k\}$  dotado de la topología discreta (todo conjunto es abierto y cerrado).

**Definición 8.1** El *espacio del shift* (completo y bilateral) de  $k$  símbolos, es el conjunto  $\Sigma = k^{\mathbb{Z}}$  de todas las sucesiones

$$x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: \quad x_n \in \aleph \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

dotado de la topología producto. Por el teorema de Tichonov,  $\Sigma$  es compacto.

Sean dados  $l \in \mathbb{Z}$  y  $s \in \mathbb{N}$ . Sea  $(a_0, \dots, a_s) \in \aleph^{s+1}$  una  $(s+1)$ -upla de elementos del alfabeto  $\aleph = \{1, \dots, k\}$ . Definimos *cilindro*

$$C_{l,s,(a_0,\dots,a_s)} = \{x \in \Sigma : x_l = a_0, \dots, x_{l+s} = a_s\}.$$

Es estándar (aunque engorroso) probar que la familia de todos los cilindros generan la sigma-álgebra de Borel de  $\Sigma$ .

**Definición 8.2** Sea  $\mathbf{p} = (p(1), p(2), \dots, p(k)) \in \mathbb{R}^k$  un vector de probabilidad. Esto es

$$0 \leq p(i) \leq 1 \quad \forall i \in \aleph = \{1, 2, \dots, k\} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k p(i) = 1.$$

En el álgebra generada por las uniones finitas de cilindros disjuntos dos a dos, definimos la premedida  $\nu$  tal que para todo cilindro se cumple:

$$\nu(C_{l,s,(a_1,\dots,a_s)}) = p(a_1)p(a_2) \dots p(a_s).$$

Por el teorema de extensión de premedidas, existe una única medida  $\nu$  en la sigma-álgebra de Borel de  $\Sigma$ , que cumple la igualdad anterior para todos los cilindros. Tal medida  $\nu$  se llama *medida de Bernoulli* en el espacio del shift (completo)  $\Sigma$ , con vector de probabilidad  $\mathbf{p}$ . Es inmediato chequear que  $\nu(\Sigma) = 1$ ; es decir, la medida de Bernoulli es una probabilidad.

**Proposición 8.3** *Toda medida  $\nu$  de Bernoulli en el espacio del shift es mixing.*

*Demostración:* Dados dos cilindros  $C$  y  $C'$ , por definición de cilindro y por definición del shift  $\sigma$ , existe  $n_0 \geq 1$  tal que  $\sigma^n(C) \cap C' \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$ . Más precisamente, si

$$C := \{x \in \Sigma : x_l = a_0, \dots, x_{l+s} = a_s\},$$

$$C' := \{x \in \Sigma : x_{l'} = a'_0, \dots, x_{l'+s'} = a'_{s'}\},$$

entonces para todo  $n \geq (l+s) - l' + 1$ , se cumple

$$\begin{aligned} \sigma^n(C) \cap C' = \\ \{x \in \Sigma : x_{l-n} = a_0, \dots, x_{l+s-n} = a_s, \quad x_{l'} = a'_0, \dots, x_{l'+s'} = a'_{s'}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{\{(b_{l+s-n+1}, \dots, b_{l'-1}) : b_i \in \{1, \dots, k\}\}} \{x \in \Sigma : x_{l-n} = a_0, \dots, x_{l+s-n} = a_s, \\
&\quad x_{l+s-n+1} = b_{l+s-n+1}, \dots, x_{l'-1} = b_{l+s-n+1}, \\
&\quad x_{l'} = a'_0, \dots, x_{l'+s'} = a_{s'}\}.
\end{aligned}$$

La unión en esta última igualdad es de cilindros disjuntos dos a dos. Luego, por la aditividad de la medida  $\nu$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
&\nu(\sigma^n(C) \cap C') = \\
&\sum_{\{(b_{l+s-n+1}, \dots, b_{l'-1}) : b_i \in \{1, \dots, k\}\}} \nu\left(\{x \in \Sigma : x_{l-n} = a_0, \dots, x_{l+s-n} = a_s, \right. \\
&\quad \left. x_{l+s-n+1} = b_{l+s-n+1}, \dots, x_{l'-1} = b_{l+s-n+1}, \right. \\
&\quad \left. x_{l'} = a'_0, \dots, x_{l'+s'} = a_{s'}\}\right) = \\
&= \sum_{b_{l+s-n+1}=1}^k \dots \sum_{b_{l'-1}=1}^k \\
&\quad p(a_0), \dots, p(a_s), p(b_{l+s-n+1}), \dots, p(b_{l+s-n+1}), p(a'_0), \dots, p(a_{s'}) = \\
&= \left(p(a_0) \dots p(a_s)\right) \left(p(a'_0), \dots, p(a_{s'})\right) = \nu(C) \cdot \nu(C')
\end{aligned}$$

Entonces para toda pareja de cilindros  $C$  y  $C'$  con  $\nu$ -medida positiva existe  $n_0 \geq 1$  tal que  $\sigma^{n_0}(C) \cap C' \neq \emptyset$ . Como los cilindros generan la sigma álgebra en el espacio del shift, entonces  $\sigma^n(B) \cap B' \neq \emptyset$  para toda pareja de medibles con  $\nu$ -medida positiva.  $\square$

**Definición 8.4** Sea  $T : X \mapsto X$  una transformación continua en un espacio métrico compacto y sea  $\mu$  una medida de probabilidad invariante por  $T$ . La medida  $\mu$  se dice que es *de Bernoulli para  $T$*  si existen una transformación bimedible (medible, invertible, con inversa medible)

$$h : X \mapsto \Sigma,$$

donde  $\Sigma$  es el espacio de un shift (completo)  $\sigma : \Sigma \mapsto \Sigma$ , y una medida  $\nu$  de Bernoulli para  $\sigma$ , tales que

$$h \circ T = \sigma \circ h \quad \mu - \text{c.t.p.} \quad \text{y} \quad \mu(B) = \nu(h(B)),$$

para todo  $B \subset X$  medible.

**Proposición 8.5** *Toda medida de Bernoulli  $\mu$  para  $T$  es mixing; luego es ergódica.*

*Demostración* Por definición, el isomorfismo  $h$  de espacios de medida que lleva el espacio de medida  $\mu$  preservado por  $T : X \mapsto X$  en el espacio del shift  $\sigma : k^{\mathbb{Z}} \mapsto k^{\mathbb{Z}}$  con la medida de Bernoulli  $\nu$ , satisface  $h \circ T = \sigma \circ h$   $\mu - \text{c.t.p.}$  Como  $\nu$  es mixing (c.f. Proposición 8.3), entonces es inmediato verificar que  $\mu$  también lo es.  $\square$

**Teorema 8.6** *La medida de probabilidad de Lebesgue  $m$  en el toro  $\mathbb{T}^2$  es una medida de Bernoulli para el difeomorfismo lineal  $f = 2, 1, 1, 1$ .*

*Demostración:* Primero chequear, usando que los vectores propios de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  tienen pendiente irracional, que  $f$  es topológicamente transitivo, es decir:

Para toda pareja de abiertos no vacíos  $U$  y  $V$  existe  $n \geq 1$  tal que  $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Luego, usar el siguiente teorema, cuya demostración es prácticamente todo el libro [2], usando la existencia de las llamadas particiones de Markov:

Para todo difeomorfismo de Anosov topológicamente transitivo que preserva una medida positiva sobre abiertos, esta medida es de Bernoulli.

## Referencias

- [1] Mañé, Ricardo: *Introdução à Teoria Ergódica* - IMPA, Projeto Euclides, Río de Janeiro, 1983.
- [2] Bowen, Rufus: *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.