SOBRE CIERTAS REDES DE UNIDADES DINÁMICAS ACOPLADAS POR IMPULSOS

ELEONORA CATSIGERAS

Presentación en
IV Coloquio de Matemática,
del 18 al 20 de diciembre, 2013

Se presentará un modelo matemático abstracto de sistema dinámico determinístico (que proviene de modelos simplificados de redes neuronales biológicas) en que m subsistemas dinámicos (llamados "unidades", "celdas" o "neuronas"), que no son necesariamente mutuamente idénticos, evolucionan independientemente excepto en instantes de "disparo", determinados por cada neurona en forma ciega al estado global de la red.

En sus instantes de disparo cada neurona envía una señal instantánea de acople excitatoria (colaborativa) o inhibitoria (no colaborativa, o competitiva o antagonista) a algunas de las otras. Se asume como hipótesis el principio de Dale (establecido en el sistema nervioso de los animales). Esto es, cada neurona es o bien excitatoria o bien inhibitoria. Es decir no es colaborativa con algunas y competitiva con otras.

En primer lugar se establecerán condiciones suficientes (ejemplos: que el grafo de la red sea completo y sean todos los acoples colaborativos, o que tenga un subgrafo completo colaborativo con suficiente cantidad de neuronas en relación a otros parámetros) para que la red sincronice totalmente. Esto es, periódicamente, sin necesidad de un reloj externo marcapasos o de un sistema del tipo "master-slaves", todas las neuronas disparan simultáneamente, con un período determinado por la red (que en general no coincide con el período espontáneo de ninguna neurona por separado si estuviera aislada de la red). Se acotará superiormente el tiempo de espera hasta la sincronización completa de la red, en función de los parámetros.

En segundo lugar, en el caso de redes en que existan además neuronas inhibitorias (competitivas con las demás) se definirá "riesgo de muerte" de una neurona cualquiera. Esto es un coeficiente que mide qué tan posible es que el estado de esa neurona se mantenga bajo el umbral de disparo para todo tiempo futuro a partir de un cierto instante. Se verá que una red que sincroniza, aunque tenga algunas neuronas inhibitorias, minimiza el riesgo de muerte de todas sus neuronas.

En último lugar se definirá la cantidad total de información de la red (a tiempo finito). Se verá que la cantidad de información es nula si todas las neuronas son idénticas y colaborativas, pero que puede ser positiva si las neuronas son muy diferentes entre sí en relación a otros parámetros de la red, aunque sean todas colaborativas y la red sincronice ("principio de la necesaria diversidad").

Como conclusión, se observará que la cantidad de información crece si se agregan neuronas competitivas, pero la sincronización puede ser destruida si el número de neuronas competitivas es demasiado grande, y el riesgo de muerte de todas (incluso de las competitivas) aumenta si la sincronización se destruye.

.

Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Ing. Rafael Laguardia" (IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

E-mail address: eleonora@fing.edu.uy

Redes Cooperativas Acopladas por Impulsos

Eleonora Catsigeras

IMERL - Fac. Ingeniería
Universidad de la República - Uruguay

eleonora@fing.edu.uy

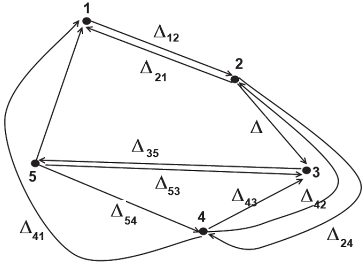
Presentación en el
IV Coloquio Uruguayo de Matemática
Montevideo, del 18 al 20 de diciembre de 2013

Objeto de estudio

Dinámica determinista de un red N
de $m \geq 2$ células (o neuronas: sub-sistemas dinámicos)
$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$
acopladas por impulsos instantáneos.

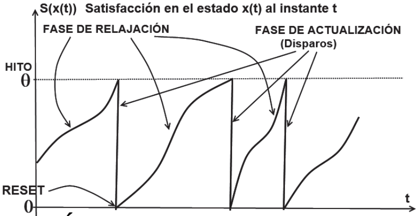
• CÉLULA O NEURONA i: subsistema dinámico autónomo
(*Dinámica libre de* i)

• ACOPLAMIENTOS $\Delta_{i,j}$ $\forall$ $(i, j) : i \neq j$



Dinámica libre de i:

Estado x_i de i en función del tiempo t
si i estuviera desacoplada de la red N. DOS FASES:



- **FASE DE RELAJACIÓN**
  - $\dot{x}_i = f_i(x_i)$ ecuación diferencial n-dim; flujo solución $x_i(t) = \Phi_i(x_i(0), t)$; $x_i \in X_i$
  - $S_i : X_i \mapsto [0, \theta_i]$ **función de satisfacción** ,
  - θ_i **goal ó hito ó threshold level**

$\frac{d}{dt}(S_i(x_i(t)) =< \bigtriangledown S_i, f_i \geq v_i > 0 \;\; \forall\, x_i \in S_i^{-1}[0, \theta_i)$

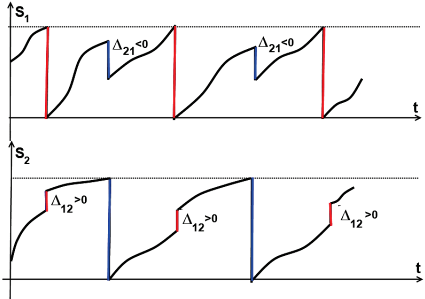
- **FASE DE ACTUALIZACIÓN - UPDATE RULE:**
  - $S_i(x_i(t^-)) = \theta_i \quad \Rightarrow \quad x_i(t) \in S_i^{-1}(0)$
  - **Disparo o spike** Es la discontinuidad en el estado $x_i(t)$ que se produce cuando la variable de satisfacción S_i alcanza el hito θ_i: S_i se resetea a cero instantáneamente.

ACOPLAMIENTOS EN LA RED:

$$I(t) := \{1 \leq i \leq m \colon i \text{ dispara en el instante } t\}$$

REGLA DE INTERACCIONES INSTANTÁNEAS:

$$S(x_j(t)) := S(x_j(t^-)) + \sum_{i \in I(t),\ i \neq j} \Delta_{ij} \text{ si es } < \theta_j, \quad := 0 \text{ si es } \geq \theta_j.$$



Célula i es **Cooperativa:** $\Delta_{i,j} \geq 0 \ \forall j \neq i, \quad \Delta_{i,j} > 0$ para algún $j \neq i$.
Célula i es **Antagonista:** $\Delta_{i,j} \leq 0 \ \forall j \neq i, \quad \Delta_{i,j} < 0$ para algún $j \neq i$.
Principio de Dale (hipótesis) Cada célula o bien es cooperativa o bien es antagonista.
Red Cooperativa: Todas las células son cooperativas.

Definiciones

Espacio (funcional) de parámetros de la red

$$\text{Param}(N) = \left\{ \{(\phi_i, S_i, \theta_i)\}_{1\leq i \leq m},\ \{\Delta_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq m,\ i\neq j} \right\}$$

Topología C_0 en el espacio de parámetros.
Fenómeno robusto o persistente $\forall\ N$ que exhibe el fenómeno, existe un entorno V tal que toda red N' en ese entorno también exhibe el fenómeno.

Muerte de célula i en instante t_0
Para todo $t > t_0$ la célula i no dispara.
t_0 es el mínimo $t_0 \geq 0$ para el que ocurre lo anterior.

SINCRONIZACIÓN DE DISPAROS: existe $\{t_n\}_{n\geq 0}$
$0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n \to +\infty$ tal que $I(t_n) := \{1, \ldots, m\}$.
SINCRONIZACIÓN DE DISPAROS PERIÓDICA: existe $\{t_n^*\}_{n\geq 0}$ tal que
$I(t_n^*) \neq \emptyset$ ($I(t_n^*)$ se llama n-ésimo **cluster**),
$I(t) = \emptyset$ si $t_n < t < t_{n+1}$, y existe $p \geq 1$ tal que

$$I(t_{hp}^*) = \{1, \ldots, m\}\ \forall\ h \in \mathbb{N}^+, \qquad I(t_n^*) = I(t_{np}^*)\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Características y ejemplos:
No hay reloj externo ni neuronas masters y otras slaves
Ejemplo de luciérnagas. Otros ejemplos en biología, neurociencias y ecología.
Ejemplos en redes en economía y otras ciencias sociales.

Resultados de sincronización

Teorema

1a) *Si la red es cooperativa con grafo completo, y si el número* m *de células es suficientemente grande, i.e.*

$$\sqrt{m} \geq \max\left\{\sqrt{3}, \frac{\max_j \theta_j}{\min_{i \neq j} \Delta_{i,j}} + 1\right\}$$

entonces la red **sincroniza disparos.** *El transitorio* T *entre un disparo simultáneo de todas las neuronas de la red y el siguiente, está acotado superiormente por* $T \leq \max\limits_{1 \leq i \leq m} \dfrac{\theta_i}{v_i}$.

1b) *Si además la dinámica libre de cada neurona es tal que* $dS_i/dt = g_i(S_i)$, *entonces la sincronización de disparos es* **periódica con período** $p \geq 1$*: cada* p *disparos en la red, todas las neuronas disparan juntas. Hay* p **clusters diferentes** *entre un disparo de la red completa y el siguiente.*

1c) *Si además las neuronas son mutuamente similares, i.e.*

$$\frac{(\min_i \theta_i) \cdot (\min_i \min_{x_i \in X_i} < \bigtriangledown S_i, g_i >)}{(\max_i \theta_i) \cdot (\max_i \max_{x_i \in X_i} < \bigtriangledown S_i, g_i >)} > 1 - \frac{\min_{i \neq j} \Delta_{ij}}{\max_i \theta_i},$$

entonces $p = 1$*. Es decir, todas las neuronas disparan juntas cada vez que una de ellas dispara. Hay un solo cluster formado por todas las neuronas de la red.*

Demostración de sincronización

Hipótesis: $\sqrt{m} \geq \max \left\{ \sqrt{3}, \dfrac{\max_j \theta_j}{\min_{i \neq j} \Delta_{i,j}} + 1 \right\}$

Sean $t_1^* < t_2^* < \ldots < t_n^* < \ldots$ los instantes en que por lo menos una neurona de la red dispara.

Sea $K :=$ parte entera $\left(\dfrac{\max_j \theta_j}{\min_{i \neq j} \Delta_{i,j}} \right) + 1$. (Obs: $K^2 < m$)

Afirmación A) A más tardar en el instante t_K ya dispararon todas las neuronas por lo menos una vez.

Afirmación B) Si en el instante t_n disparan por lo menos K neuronas simultáneamente, entonces disparan todas simultánemente.

Afirmaciones A) y B) $\Rightarrow$ existe un instante t_0 en que todas las neuronas disparan simultáneamente. De lo contrario la cantidad de neuronas sería menor que K^2 lo cual contradice la hipótesis. $\square$

Riesgo y factor de protección (Definiciones)

INTERFERENCIAS NEGATIVAS EXTERNAS A LA RED

Riesgo de muerte intrínseco de i, relativo a las otras neuronas de la red

$$R_i = \frac{\theta_i / v_i}{\max_{1 \leq j \leq m}(\theta_j / v_j)} \in (0, 1]$$

Riesgo de muerte neto en red de i en el h-ésimo interspike interval $ISI_i^{(h)}$ de la neurona i:

$$R_i'^{(h)} = \frac{\max\{0,\ \theta_i - \sum_{j \in I(t): t \in ISI_i^{(h)}} \Delta_{j,i}\} \,/\, v_i}{\max_{1 \leq j \leq m}(\theta_j / v_j)} \in (0, 1].$$

Factor de protección de la red a la neurona i en el h-ésimo interspike interval de i:

$$P_i^{(h)} = \min\left\{1,\ \frac{\sum_{j \in I(t): t \in ISI_i^{(h)}} \Delta_{j,i}}{\theta_i}\right\}.$$

Protección negativa si la red es antagonista.

Protección ≥ 0 si la red es cooperativa. Es 1 si $\sum_j \Delta_{j,i} \geq \theta_i$

Proposición:

$$R'^{(h)}_i = (1 - P_i^{(h)}) R_i \quad \text{es nulo cuando el factor de protección es } 1.$$

Resultados sobre riesgo y factor de protección

Teorema

2a) *(En las hipótesis del Teorema 1a (si la red es cooperativa de grafo completo y con suficiente cantidad de neuronas) entonces el factor de protección* $P_i^{(h)}$ *de cada neurona* i *en todo intervalo inter-spike* h*, es positivo. Luego el riesgo neto* R'_i *de muerte de la neurona* i *acoplada a la red, por interferencias negativas externas a la red, es menor estrictamente que el riesgo intrínseco* R_i *de la misma neurona si no estuviera acoplada a la red.*

2b) *Si además todas las neuronas son similares (hipótesis del Teorema 1b), entonces el factor de protección* P_i *de cada neurona es igual al máximo posible 100%, y su riesgo neto de muerte* R'_i *es el mínimo posible 0%.*

Cantidad de información (Definiciones)

$t_0^* < t_1^* \ldots < t_n^* <$ instantes en que por lo menos una neurona dispara.

• $\qquad I(t_n) = \{i : i$ dispara en el intante $t_n\} \neq \emptyset$.

Cantidad potencial de conjuntos diferentes en cada disparo: 2^m.

Cantidad potencial de información en cada disparo: $\log_2(2^m) = m$.

• **Spiking code (código de disparo):** Sucesión $\{I(t_n)\}_{n\geq 0}$. Depende de la condición inicial de todas las neuronas en la red.

• **Pattern de longitud finita $k \geq 1$:** Palabra de longitud k en el spiking code.

$\pi_{n_0,k} = \Big(I(t_{n_0}), I(t_{n_0+1}), \ldots, I(t_{n_0+k-1})\Big)$. Depende del estado inicial.

• **Pattern recurrente de longitud $k \geq 1$:** palabra π_k de longitud k tal que existe algún estado inicial y una sucesión $n_j \to +\infty$ que lo realiza:

$$\pi_k = \pi_{n_j,k} \quad \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

• $\Pi_k := \{\pi_k\}$ conjunto de todos los patterns recurrentes de longitud k.

• $\#\Pi_k$: cantidad de patterns recurrentes de longitud $k \geq 1$ diferentes que la red exhibe.

• **Cantidad de información** que la red puede procesar en forma recurrente:

$$H = \sup_{k\geq 0} \log \#\Pi_k.$$

Si $H = +\infty$ se define **entropía:** $\quad h = \limsup_{k\to+\infty} \dfrac{\log \#\Pi_k}{k}$.

entropía = velocidad de crecimiento exponencial de la cantidad de información que la red puede procesar en forma recurrente.

Resultados sobre la cantidad de información

Teorema

2 a) *Si la red sincroniza periódicamente todos sus disparos con período* $p \geq 1$ *(por ej. en las hipótesis del teorema 1b), entonces* $H = \log_2 p < \dfrac{\log_2 m}{2}$.

2 b) *Si además las células son mutuamente similares, entonces* $H = \log_2 1 = 0$.

Conclusiones (redes cooperativas)

A) Cuando se maximiza el factor de protección de cada neurona (haciéndola 100% y logrando 0% de riesgo neto de muerte de cada una), se minimiza la cantidad de información H en la red, haciéndola nula.

B) Las redes cooperativas con suficiente cantidad de neuronas sincronizan y dan un factor de protección positivo a cada una de sus neuronas.
Si no son periódicas o si son periódicas con período p mayor que 1, entonces su cantidad de información total H(durante todo el tiempo futuro) es positiva. Si son periódicas, H es finita igual a $\log p$.

C) **Necesaria diversidad de células para tener cierta riqueza dinámica:**
Las redes cooperativas que pueden procesar una cantidad positiva de información están necesariamente compuestas por neuronas diversas, cuyas dinámicas intrínsecas difieren sensiblemente entre sí.