Redes Cooperativas Acopladas por Impulsos

Eleonora Catsigeras

IMERL - Fac. Ingeniería
Universidad de la República - Uruguay

eleonora@fing.edu.uy

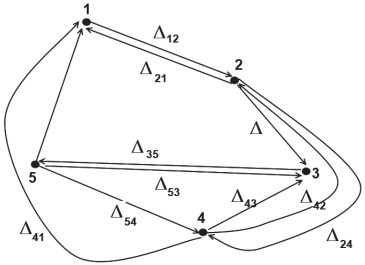
Presentación en el
Seminario de Física no Lineal
Facultad de Ciencias, Universidad de la República
Montevideo, 13 de julio de 2015

Objeto de estudio

Dinámica determinista de un red N
de $m \geq 2$ células (o neuronas: sub-sistemas dinámicos)
$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$
acopladas por impulsos instantáneos.

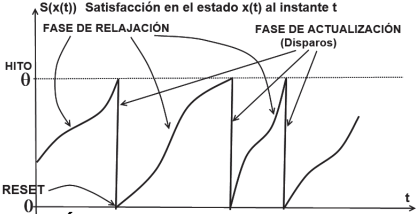
• CÉLULA O NEURONA i: subsistema dinámico autónomo
(*Dinámica libre de* i)

• ACOPLAMIENTOS $\Delta_{i,j}$ $\forall$ $(i, j) : i \neq j$



Dinámica libre de i:

Estado x_i de i en función del tiempo t
si i estuviera desacoplada de la red N. DOS FASES:



- **FASE DE RELAJACIÓN**
  - $\dot{x}_i = f_i(x_i)$ ecuación diferencial n-dim; flujo solución $x_i(t) = \Phi_i(x_i(0), t)$; $x_i \in X_i$
  - $S_i : X_i \mapsto [0, \theta_i]$ **función de satisfacción** ,
  - θ_i **goal ó hito ó threshold level**

$\frac{d}{dt}(S_i(x_i(t)) =< \bigtriangledown S_i, f_i \geq v_i > 0 \ \ \forall\ x_i \in S_i^{-1}[0, \theta_i)$

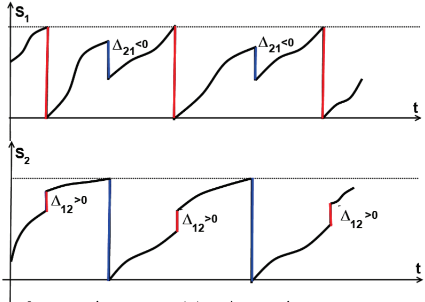
- **FASE DE ACTUALIZACIÓN - UPDATE RULE:**
  - $S_i(x_i(t^-)) = \theta_i \quad \Rightarrow \quad x_i(t) \in S_i^{-1}(0)$
  - **Disparo o spike** Es la discontinuidad en el estado $x_i(t)$ que se produce cuando la variable de satisfacción S_i alcanza el hito θ_i: S_i se resetea a cero instantáneamente.

ACOPLAMIENTOS EN LA RED:

$$I(t) := \{1 \leq i \leq m \colon i \text{ dispara en el instante } t\}$$

REGLA DE INTERACCIONES INSTANTÁNEAS:

$$S(x_j(t)) := S(x_j(t^-)) + \sum_{i \in I(t),\ i \neq j} \Delta_{ij} \text{ si es } < \theta_j, \quad := 0 \text{ si es } \geq \theta_j.$$



Célula i es **Cooperativa:** $\Delta_{i,j} \geq 0 \ \forall j \neq i, \quad \Delta_{i,j} > 0$ para algún $j \neq i$.
Célula i es **Antagonista:** $\Delta_{i,j} \leq 0 \ \forall j \neq i, \quad \Delta_{i,j} < 0$ para algún $j \neq i$.
Principio de Dale (hipótesis) Cada célula o bien es cooperativa o bien es antagonista.
Red Cooperativa: Todas las células son cooperativas

Definiciones

Espacio (funcional) de parámetros de la red

$$\text{Param}(N) = \left\{ \{(\phi_i, S_i, \theta_i)\}_{1 \le i \le m},\ \{\Delta_{i,j}\}_{1 \le i,j \le m,\ i \ne j} \right\}$$

Topología C_0 en el espacio de parámetros.
Fenómeno robusto o persistente $\forall\ N$ que exhibe el fenómeno, existe un entorno V tal que toda red N' en ese entorno también exhibe el fenómeno.

Muerte de célula i en instante t_0
Para todo $t > t_0$ la célula i no dispara.
t_0 es el mínimo $t_0 \ge 0$ para el que ocurre lo anterior.

SINCRONIZACIÓN DE DISPAROS: existe $\{t_n\}_{n \ge 0}$
$0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n \to +\infty$ tal que $I(t_n) := \{1, \ldots, m\}$.
SINCRONIZACIÓN DE DISPAROS PERIÓDICA: existe $\{t_n^*\}_{n \ge 0}$ tal que
$I(t_n^*) \ne \emptyset$ ($I(t_n^*)$ se llama n-ésimo **cluster**),
$I(t) = \emptyset$ si $t_n < t < t_{n+1}$, y existe $p \ge 1$ tal que

$$I(t_{hp}^*) = \{1, \ldots, m\}\ \forall\ h \in \mathbb{N}^+, \qquad I(t_n^*) = I(t_{np}^*)\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Características y ejemplos:
No hay reloj externo ni neuronas masters y otras slaves
Ejemplo de luciérnagas. Otros ejemplos en biología, neurociencias y ecología.
Ejemplos en redes en economía y otras ciencias sociales.

Resultados de sincronización

Teorema

1a) *Si la red es cooperativa con grafo completo, y si el número* m *de células es suficientemente grande, i.e.*

$$\sqrt{m} \geq \max \left\{ \sqrt{3}, \frac{\max_j \theta_j}{\min_{i \neq j} \Delta_{i,j}} + 1 \right\}$$

entonces la red **sincroniza disparos.** *El transitorio* T *entre un disparo simultáneo de todas las neuronas de la red y el siguiente, está acotado superiormente por* $T \leq \max\limits_{1 \leq i \leq m} \dfrac{\theta_i}{v_i}$.

1b) *Si además la dinámica libre de cada neurona es tal que* $dS_i/dt = g_i(S_i)$*, entonces la sincronización de disparos es* **periódica con período** $p \geq 1$*: cada* p *disparos en la red, todas las neuronas disparan juntas. Hay* p **clusters diferentes** *entre un disparo de la red completa y el siguiente.*

1c) *Si además las neuronas son mutuamente similares, i.e.*

$$\frac{(\min_i \theta_i) \cdot (\min_i \min_{x_i \in X_i} < \bigtriangledown S_i, g_i >)}{(\max_i \theta_i) \cdot (\max_i \max_{x_i \in X_i} < \bigtriangledown S_i, g_i >)} > 1 - \frac{\min_{i \neq j} \Delta_{ij}}{\max_i \theta_i},$$

entonces $p = 1$*. Es decir, todas las neuronas disparan juntas cada vez que una de ellas dispara. Hay un solo cluster formado por todas las neuronas de la red.*

Demostración de sincronización

Hipótesis: $\sqrt{m} \geq \max\left\{\sqrt{3}, \dfrac{\max_j \theta_j}{\min_{i\neq j} \Delta_{i,j}} + 1\right\}$

Sean $t_1^* < t_2^* < \ldots < t_n^* < \ldots$ los instantes en que por lo menos una neurona de la red dispara.

Sea $K :=$ parte entera $\left(\dfrac{\max_j \theta_j}{\min_{i\neq j} \Delta_{i,j}}\right) + 1.$ (Obs: $K^2 < m$)

Afirmación A) A más tardar en el instante t_K ya dispararon todas las neuronas por lo menos una vez.

Afirmación B) Si en el instante t_n disparan por lo menos K neuronas simultáneamente, entonces disparan todas simultánemente.

Afirmaciones A) y B) $\Rightarrow$ existe un instante t_0 en que todas las neuronas disparan simultáneamente. De lo contrario la cantidad de neuronas sería menor que K^2 lo cual contradice la hipótesis. $\square$

Riesgo y factor de protección (Definiciones)

INTERFERENCIAS NEGATIVAS EXTERNAS A LA RED

Riesgo de muerte intrínseco de i, relativo a las otras neuronas de la red

$$R_i = \frac{\theta_i / v_i}{\max_{1 \leq j \leq m}(\theta_j / v_j)} \in (0, 1]$$

Riesgo de muerte neto en red de i en el h-ésimo interspike interval $ISI_i^{(h)}$ de la neurona i:

$$R_i'^{(h)} = \frac{\max\{0,\ \theta_i - \sum_{j \in I(t): t \in ISI_i^{(h)}} \Delta_{j,i}\} \,/\, v_i}{\max_{1 \leq j \leq m}(\theta_j / v_j)} \in (0, 1].$$

Factor de protección de la red a la neurona i en el h-ésimo interspike interval de i:

$$P_i^{(h)} = \min\left\{1,\ \frac{\sum_{j \in I(t): t \in ISI_i^{(h)}} \Delta_{j,i}}{\theta_i}\right\}.$$

Protección negativa si la red es antagonista.
Protección ≥ 0 si la red es cooperativa. Es 1 si $\sum_j \Delta_{j,i} \geq \theta_i$

Proposición:

$$R_i'^{(h)} = (1 - P_i^{(h)}) R_i \quad \text{es nulo cuando el factor de protección es } 1.$$

Resultados sobre riesgo y factor de protección

Teorema

2a) *(En las hipótesis del Teorema 1a (si la red es cooperativa de grafo completo y con suficiente cantidad de neuronas) entonces el factor de protección* $P_i^{(h)}$ *de cada neurona* i *en todo intervalo inter-spike* h, *es positivo. Luego el riesgo neto* R_i' *de muerte de la neurona* i *acoplada a la red, por interferencias negativas externas a la red, es menor estrictamente que el riesgo intrínseco* R_i *de la misma neurona si no estuviera acoplada a la red.*

2b) *Si además todas las neuronas son similares (hipótesis del Teorema 1b), entonces el factor de protección* P_i *de cada neurona es igual al máximo posible 100%, y su riesgo neto de muerte* R_i' *es el mínimo posible 0%.*

Cantidad de información (Definiciones)

$t_0^* < t_1^* \ldots < t_n^* <$ instantes en que por lo menos una neurona dispara.

• $I(t_n) = \{i : i$ dispara en el intante $t_n\} \neq \emptyset$.

Cantidad potencial de conjuntos diferentes en cada disparo: 2^m.

Cantidad potencial de información en cada disparo: $\log_2(2^m) = m$.

• **Spiking code (código de disparo):** Sucesión $\{I(t_n)\}_{n \geq 0}$. Depende de la condición inicial de todas las neuronas en la red.

• **Pattern de longitud finita $k \geq 1$:** Palabra de longitud k en el spiking code.

$\pi_{n_0,k} = \Big(I(t_{n_0}), I(t_{n_0+1}), \ldots, I(t_{n_0+k-1})\Big)$. Depende del estado inicial.

• **Pattern recurrente de longitud $k \geq 1$:** palabra π_k de longitud k tal que existe algún estado inicial y una sucesión $n_j \to +\infty$ que lo realiza:

$$\pi_k = \pi_{n_j,k} \quad \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

• $\Pi_k := \{\pi_k\}$ conjunto de todos los patterns recurrentes de longitud k.

• $\#\Pi_k$: cantidad de patterns recurrentes de longitud $k \geq 1$ diferentes que la red exhibe.

• **Cantidad de información** que la red puede procesar en forma recurrente:

$$H = \sup_{k \geq 0} \log \#\Pi_k.$$

Si $H = +\infty$ se define **entropía:** $h = \limsup_{k \to +\infty} \dfrac{\log \#\Pi_k}{k}$.

entropía = velocidad de crecimiento exponencial de la cantidad de información que la red puede procesar en forma recurrente.

Resultados sobre la cantidad de información

Teorema

2 a) *Si la red sincroniza periódicamente todos sus disparos con período* $p \geq 1$ *(por ej. en las hipótesis del teorema 1b), entonces* $H = \log_2 p < \dfrac{\log_2 m}{2}$.

2 b) *Si además las células son mutuamente similares, entonces* $H = \log_2 1 = 0$.

Conclusiones (redes cooperativas)

A) Cuando se maximiza el factor de protección de cada neurona (haciéndola 100% y logrando 0% de riesgo neto de muerte de cada una), se minimiza la cantidad de información H en la red, haciéndola nula.

B) Las redes cooperativas con suficiente cantidad de neuronas sincronizan y dan un factor de protección positivo a cada una de sus neuronas.
Si no son periódicas o si son periódicas con período p mayor que 1, entonces su cantidad de información total H(durante todo el tiempo futuro) es positiva. Si son periódicas, H es finita igual a $\log p$.

C) **Necesaria diversidad de células para tener cierta riqueza dinámica:**
Las redes cooperativas que pueden procesar una cantidad positiva de información están necesariamente compuestas por neuronas diversas, cuyas dinámicas intrínsecas difieren sensiblemente entre sí.