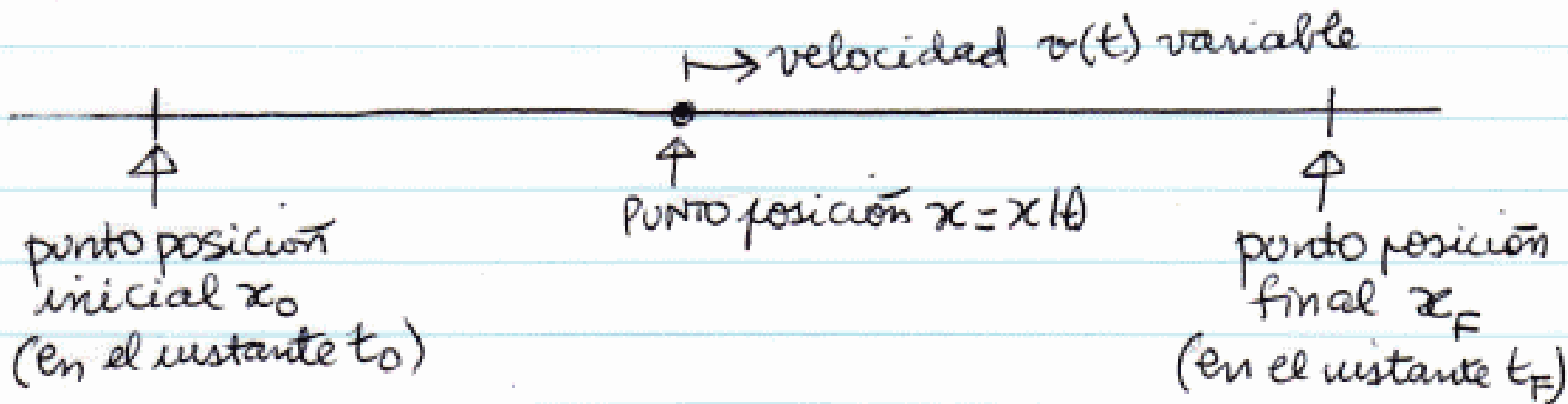


MOVIMIENTO RECTILÍNEO VARIABLE

VELOCIDAD
VARIABLE



t tiempo (instante)

$$x = x(t)$$

variable dependiente

x es función de t

variable independiente

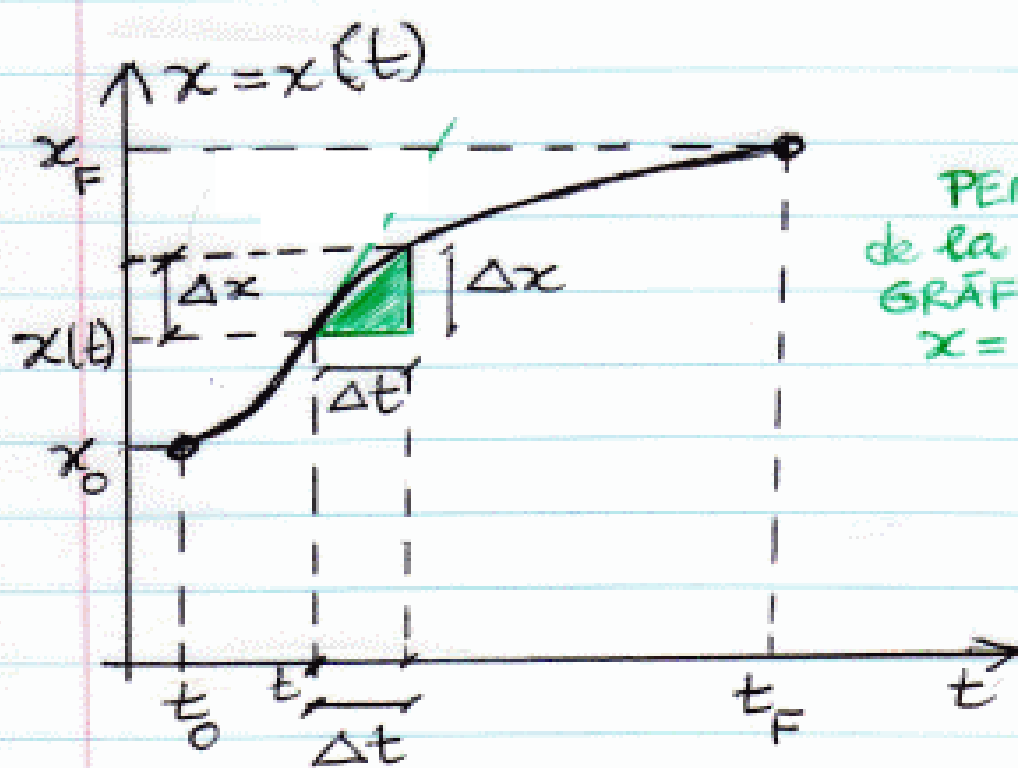
velocidad

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

distancia recorrida
(incremento en x)

tiempo transcurrido
(incremento en t)

variable que depende del tiempo t :



PENDIENTE
de la CURVA
GRÁFICA
 $x = x(t)$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

= DERIVADA DE LA
FUNCIÓN $x(t)$

Velocidad en función
del tiempo es la
derivada de la
función posición
respecto del tiempo
 $v(t) = x'(t)$

EJEMPLO: t en segundos, x en metros.

$$x(t) = 4 + t - \frac{t^3}{21} \Rightarrow v(t) = \left(4 + t - \frac{t^3}{21}\right)' =$$

$$v(t) = 4' + t' - \frac{(t^3)'}{21} = 0 + 1 - \frac{3t^2}{21} = 1 - \frac{t^2}{7}$$

$$v(t) = 1 - \frac{t^2}{7}$$

Al cabo de 2 segundos

$$v(2) = 1 - \frac{2^2}{7} = \frac{3}{7}$$

metros/seg

$$\text{aceleración} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

← incremento en la velocidad $v(t)$
← tiempo transcurrido (incremento en t)

variable $a = a(t)$ que también depende del tiempo
(en particular la aceleración a puede ser constante)

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN $v(t)$

aceleración en función del tiempo es la derivada de la función velocidad respecto del tiempo

$$a(t) = v'(t)$$

$$a(t) = v'(t) = (x'(t))' = x''(t)$$

aceleración en función del tiempo es la derivada segunda de la función posición respecto del tiempo.

En el ejemplo anterior

posición $x(t) = 4 + t - \frac{t^3}{21}$

velocidad $v(t) = 1 - \frac{t^2}{7}$

aceleración $a(t) = \left(1 - \frac{t^2}{7}\right)' = -\frac{1}{7} (t^2)' = -\frac{1}{7} \cdot 2t =$
 $= -\frac{2}{7} t$

Al cabo de 1 segundo la aceleración es

$$a(1) = -\frac{2}{7} \text{ metros/segundo}^2$$

Está frenando.

TABLA DE VELOCIDADES & CURVA GRÁFICA de VELOCIDAD

EJEMPLO

Recorrido de un ómnibus de línea debe respetar la siguiente tabla de velocidades

¿Cuál es la aceleración en cada tramo?

INSTANTE t	VELOCIDAD $v(t)$
instante inicial = t_0	0 km/hora
$t_1 = t_0 + 10 \text{ min.}$	60 km/hora
$t_2 = t_0 + 30 \text{ min}$	90 km/hora 90 km/hora
$t_3 = t_0 + 45 \text{ min}$	90 km/hora
$t_4 = t_0 + 55 \text{ min}$	30 km/hora.
instante final = $t_f = t_0 + 57 \text{ min}$	0 km/hora

TABLA DE VELOCIDADES & CURVA GRÁFICA de VELOCIDAD

EJEMPLO

Recorrido de un ómnibus de línea debe respetar la siguiente tabla de velocidades

¿Cuál es la aceleración en cada tramo?

INSTANTE t	VELOCIDAD $v(t)$	ACELERACIÓN $a(t)$
instante inicial = t_0	0 km/hora	
$t_1 = t_0 + 10 \text{ min.}$	60 km/hora	$\frac{60 \text{ km/hora} - 0}{10 \text{ minutos}} = \frac{100 \text{ metros}}{\text{min}^2}$
$t_2 = t_0 + 30 \text{ min}$		
$t_3 = t_0 + 45 \text{ min}$		
$t_4 = t_0 + 55 \text{ min}$		
instante final = $t_f = t_0 + 57 \text{ min}$		

cálculo de aceleración en 1er tramo

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60 - 0}{t_0 + 10 - t_0} = \frac{60 \text{ km/hora}}{10 \text{ minutos}} = \frac{60 \text{ km} / 60 \text{ minutos}}{10 \text{ minutos}} \\
 &= \frac{1}{10} \text{ km/min}^2 = \frac{1000 \text{ metros/min}^2}{10} = 100 \text{ metros/min}^2
 \end{aligned}$$

TABLA DE VELOCIDADES & CURVA GRÁFICA de VELOCIDAD

EJEMPLO

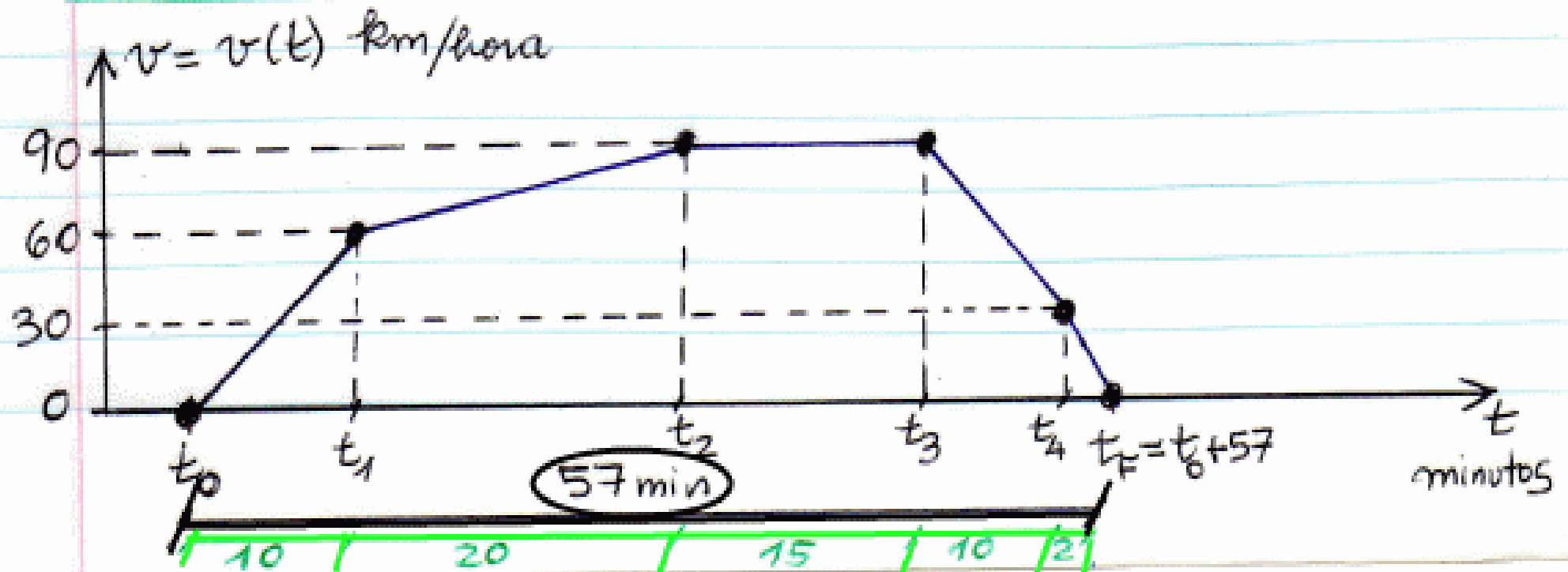
Recorrido de un ómnibus de línea debe respetar la siguiente tabla de velocidades

¿Cuál es la aceleración en cada tramo?

INSTANTE t	VELOCIDAD $v(t)$	ACELERACIÓN $a(t)$
instante inicial = t_0	0 km/hora	
$t_1 = t_0 + 10 \text{ min.}$	60 km/hora	$\frac{60 \text{ km/hora} - 0}{10 \text{ minutos}} = 100 \text{ metros/min}^2$
$t_2 = t_0 + 30 \text{ min}$	90 km/hora	$\frac{30 \text{ km/hora} - 60 \text{ km/hora}}{20 \text{ minutos}} = 25 \text{ metros/min}^2$
$t_3 = t_0 + 45 \text{ min}$	90 km/hora	$\frac{0 \text{ km/hora} - 90 \text{ km/hora}}{15 \text{ min}} = 0 \text{ metros/min}^2$
$t_4 = t_0 + 55 \text{ min}$	30 km/hora	$\frac{-60 \text{ km/hora} - 90 \text{ km/hora}}{10 \text{ minutos}} = -100 \text{ metros/min}^2$
instante final = $t_f = t_0 + 57 \text{ min}$	0 km/hora	$\frac{-30 \text{ km/hora} - 30 \text{ km/hora}}{2 \text{ minutos}} = -250 \text{ metros/min}^2$

INSTANTE t	VELOCIDAD $v(t)$
instante inicial $= t_0$	0 km/hora
$t_1 = t_0 + 10 \text{ min.}$	60 km/hora
$t_2 = t_0 + 30 \text{ min}$	90 km/hora
$t_3 = t_0 + 45 \text{ min}$	90 km/hora
$t_4 = t_0 + 55 \text{ min}$	30 km/hora
instante final $= t_F = t_0 + 57 \text{ min}$	0 km/hora

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



EN EL EJEMPLO DEL RECORRIDO DE ÓMNIBUS

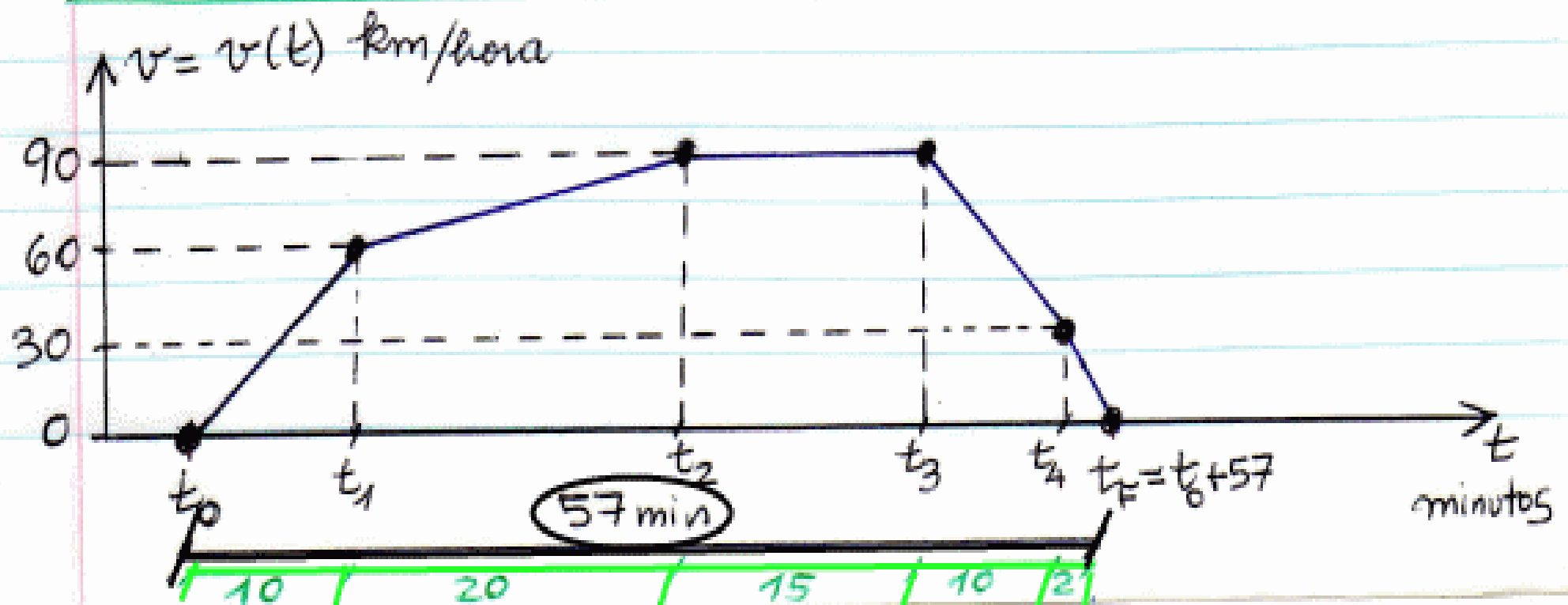
$$\boxed{\text{DISTANCIA RECORRIDA}} = \boxed{\text{ÁREA ABATO DE LA CURVA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN VELOCIDAD } v = v(t)}$$

$x_{\text{FINAL}} - x_{\text{INICIAL}}$

Integral de $v(t)$

Demstración
geométrica

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



EN EL EJEMPLO DEL RECORRIDO DE ÓMNIBUS

$$\left[\text{DISTANCIA RECORRIDA} \right] = \left[\text{ÁREA ABATO DE LA CURVA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN VELOCIDAD } v = v(t) \right]$$

$x_{\text{FINAL}} - x_{\text{INICIAL}}$

Integral de $v(t)$

Demstración geométrica

En el 1er tramo desde instante inicial t_0 hasta instante $t_1 = t_0 + 10 \text{ minutos}$

Velocidad $v(t)$ crece

desde $v(t_0) = 0 \text{ km/hora}$

↓ velocidad inicial

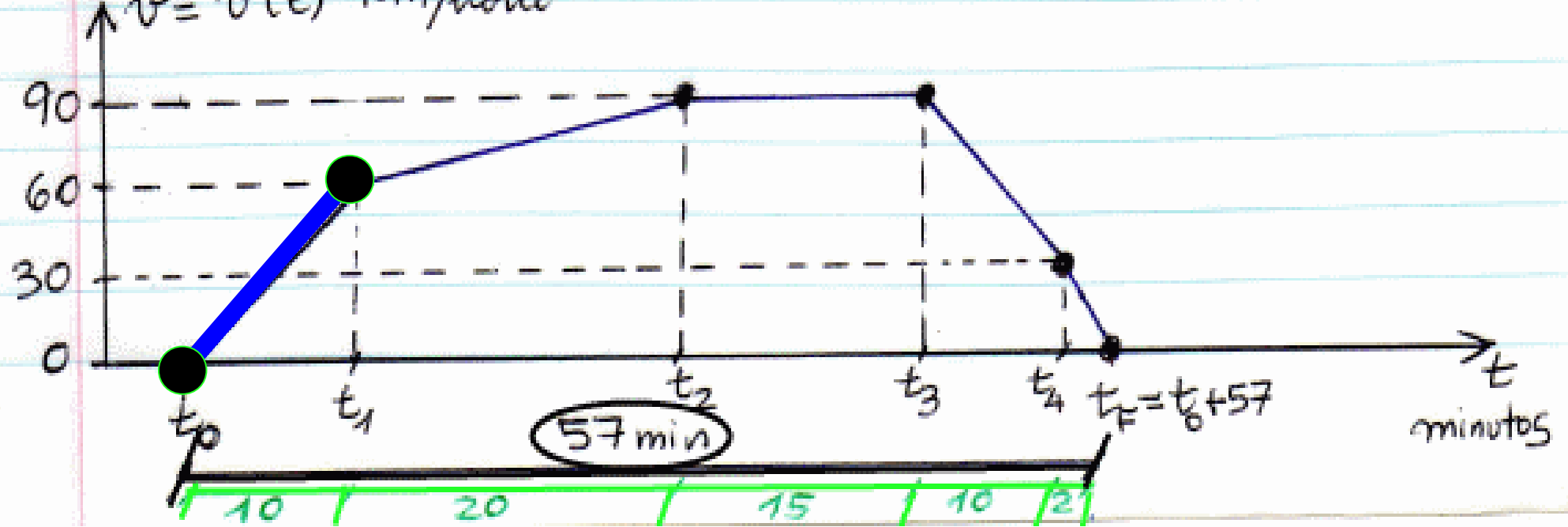
hasta $v(t_1) = 60 \text{ km/hora}$

1. ¿qué distancia recorrió en el 1er tramo?

← FALTA DATO de cómo fue acelerando

2. Supongamos que fue acelerando

de manera "uniforme" para pasar de 0 a 60 km/hora en el 1er tramo



Supongamos que fue acelerando de manera "uniforme" para pasar de 0 a 60 km/hora

durante el primer tramo

VELOCIDAD PROMEDIO en el 1er tramo:

• veloc promedio: 30 km/hora en ese tramo

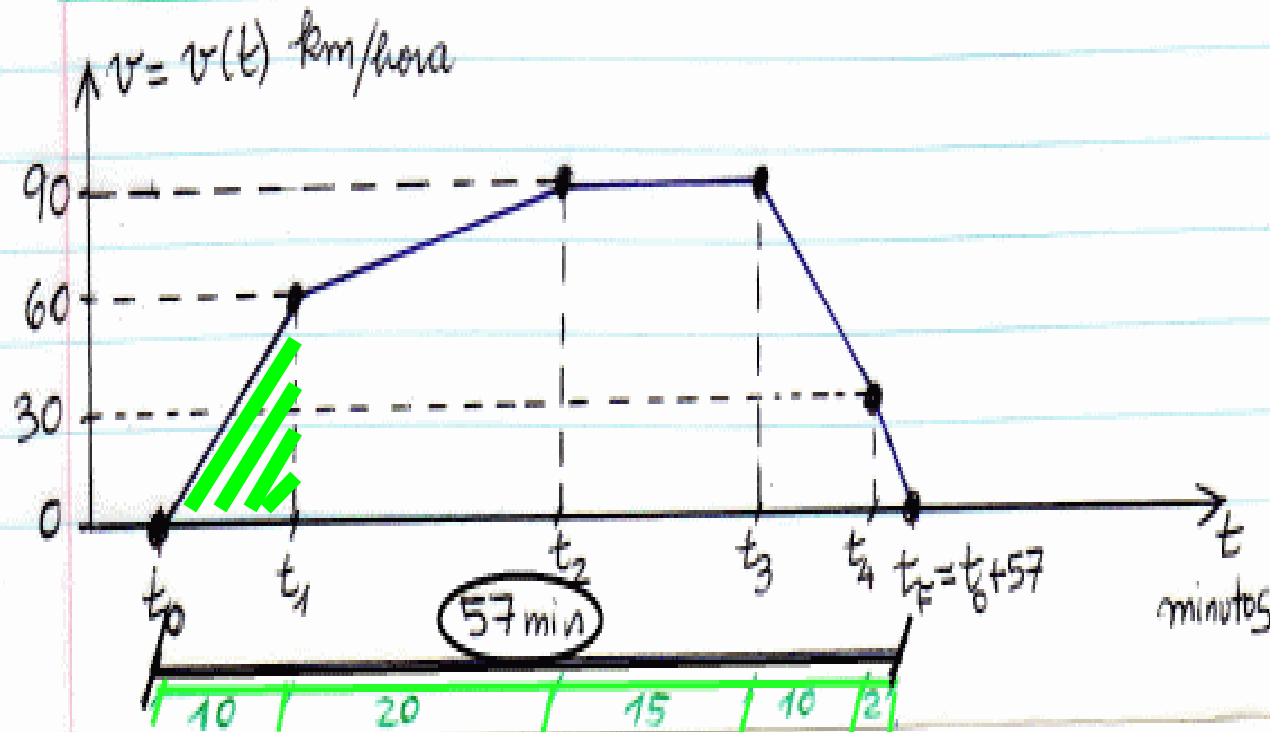
• Duración del tramo 10 minutos

• * Distancia recorrida en el 1er tramo = 30 km/hora • 10 min *

$$= \frac{30 \text{ km}}{60 \text{ minutos}} \cdot 10 \text{ minutos} = \frac{300}{60} \text{ km} = 5 \text{ km}$$

DISTANCIA RECORRIDA EN EL 1ER. TRAMO = 30 Km/hora • 10 minutos

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



ÁREA ABajo de CURVA
GRÁFICA de la
FUNCIÓN velocidad
en el 1er tramo

=
ÁREA del TRIÁNGULO
de BASE $\Delta t = 10 \text{ minutos}$
ALTURA $60 \frac{\text{km}}{\text{hora}}$

son iguales

Área triángulo

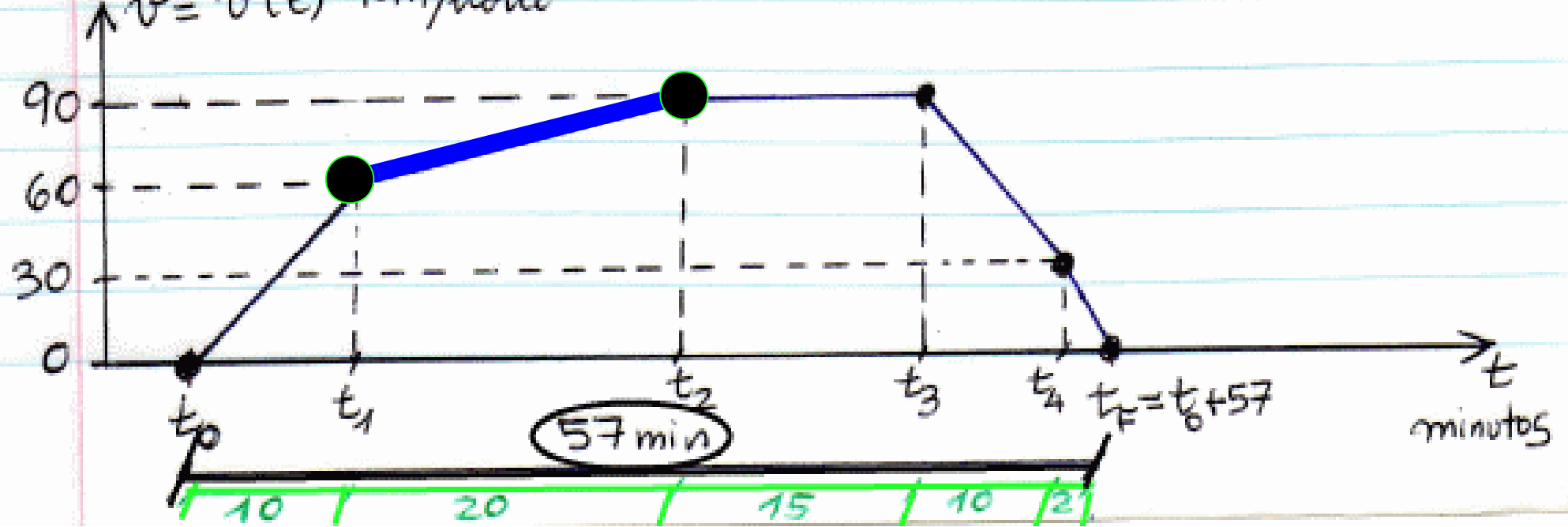


$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{10 \text{ minutos}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{60 \frac{\text{km}}{\text{hora}}}_{\text{altura}} \right) = 30 \frac{\text{km}}{\text{hora}} \cdot 10 \text{ min}$$

Área triángulo



= Distancia recorrida en el primer tramo



VELOCIDAD PROMEDIO en 2do tramo:

- $\text{veloc. promedio} = 60 + \frac{90 - 60}{2} = 60 + 15 = 75 \text{ km/hora}$

- $\text{tiempo transcurrido} = 20 \text{ minutos} = \frac{1}{3} \text{ hora}$
(Duración del 2do tramo)

- $\text{Distancia recorrida en el 2do tramo} = 75 \text{ km/hora} \cdot 20 \text{ minutos}$

$$= 75 \frac{\text{km}}{\text{hora}} \cdot \frac{1}{3} \text{ hora} = 25 \text{ km.}$$

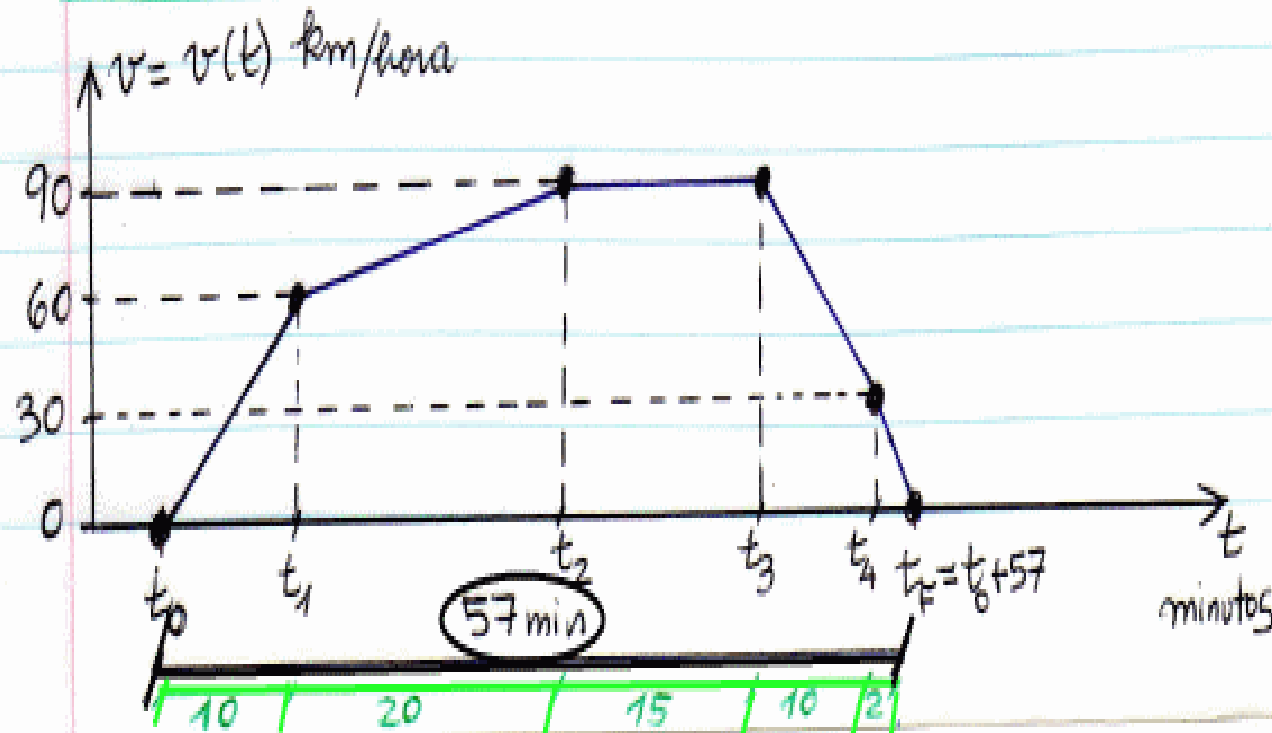


DISTANCIA RECORRIDA EN EL 2do.TRAMO = 75 Km/hora ● 20 minutos



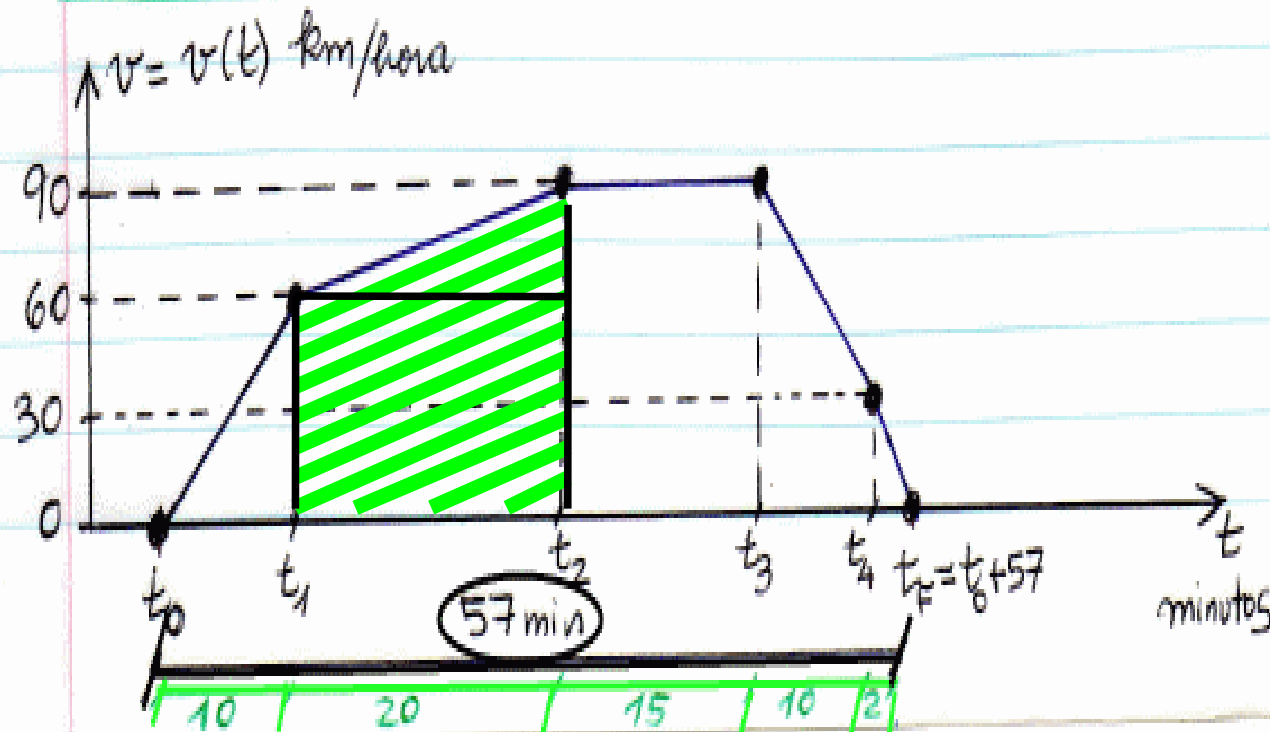
DISTANCIA RECORRIDA EN EL 2do. TRAMO = 75 Km/hora • 20 minutos

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



DISTANCIA RECORRIDA EN EL 2do. TRAMO = 75 Km/hora • 20 minutos

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



ÁREA ABajo de CURVA
GRÁFICA de la
FUNCIÓN velocidad
en el 2d tramo

Área del TRAPÉCIO  = $75 \frac{\text{km}}{\text{hora}} \cdot 20 \text{ minutos}$

  $\Rightarrow$ Área del trapecio  = Distancia recorrida
en el 2do tramo

Análogamente, tramo por tramo:

Área abajo de curva
GRÁFICA de la
FUNCIÓN VELOCIDAD
en CADA TRAMO

=

Distancia
recorrida en
CADA TRAMO

"Integrando" todos los tramos (sumando
las áreas abajo de cada tramo y sumando
las distancias recorridas en cada tramo:

ÁREA ABAJO de CURVA
GRÁFICA de la
FUNCIÓN VELOCIDAD $v = v(t)$
dependiendo del tiempo,
entre INSTANTE INICIAL t_0
e INSTANTE FINAL t_f

=

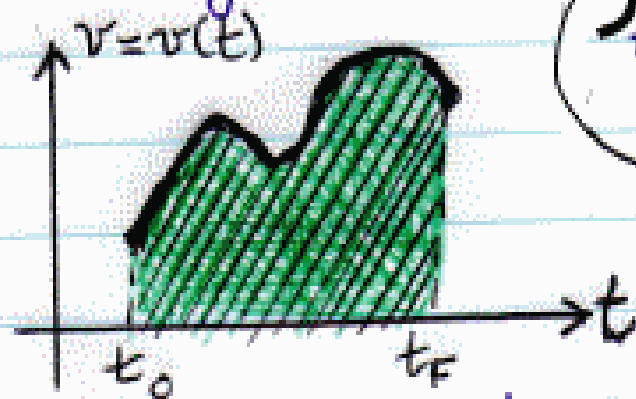
Distancia
recorrida
total =
POSICIÓN FINAL x_f
- POSICIÓN INICIAL x_0

ÁREA, INTEGRAL, PRIMITIVA Y REGLA DE BARROW

Ya tenemos:

① **ÁREA** abajo de la curva gráfica de la función velocidad $v(t)$ = **DISTANCIA** recorrida total

Esta **ÁREA** se llama **INTEGRAL** de $v(t)$ y se denota



$$\int_{t_0}^{t_F} v(t) dt$$

t_0 = instante inicial

t_F = instante final

$$x(t_F) - x(t_0)$$

$$\text{Área} \text{ (shaded green)} = \int_{t_0}^{t_F} v(t) dt = x(t_F) - x(t_0) = x_F - x_0$$

② FUNCIÓN VELOCIDAD $v(t)$ que depende del tiempo t = DERIVADA de la función posición $x = x(t)$ con respecto del tiempo t

$$v(t) = x'(t)$$

Problema : Conozco la función posición $x(t)$ y quiero encontrar la función velocidad $v(t)$

Solución : derivar $x(t)$ $v(t) = x'(t)$

ejemplo $x(t) = 4 + t + \frac{t^2}{5} + \frac{t^3}{9}$

$$\Rightarrow v(t) = 1 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{3}t^2$$

Problema : Conozco la función posición $x(t)$
y quiero encontrar la función
velocidad $v(t)$

Solución : derivar $x(t)$ $\boxed{v(t) = x'(t)}$

Problema inverso Conozco la función velocidad $v(t)$
y quiero encontrar la distancia recorrida
 $x(t) - x_0$

Problema : Conozco la función posición $x(t)$
y quiero encontrar la función
velocidad $v(t)$

Solución : derivar $x(t)$ $\boxed{v(t) = x'(t)}$

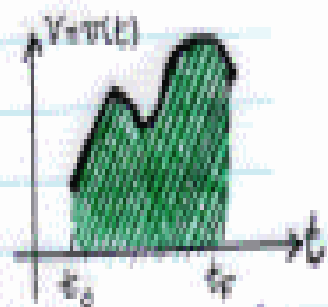
Problema inverso Conozco la función velocidad $v(t)$
y quiero encontrar la distancia recorrida
 $x(t) - x_0$

Solución : Calculo el área abajo de la gráfica de $v(t)$

Es decir, "integrar" $v(t)$: $x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v(t) dt$

Pero ¿cómo hago para calcular esa área?

¿Cómo hago para calcular el área verde?
Es decir para calcular



$$\int_{t_0}^{t_f} v(t) dt \quad \text{"INTEGRAL"}$$

de la
función $v(t)$

Idea: En el ejemplo del recorrido del ómnibus
la calculamos geométricamente como **suma**
de áreas de rectángulos, triángulos, trapecios

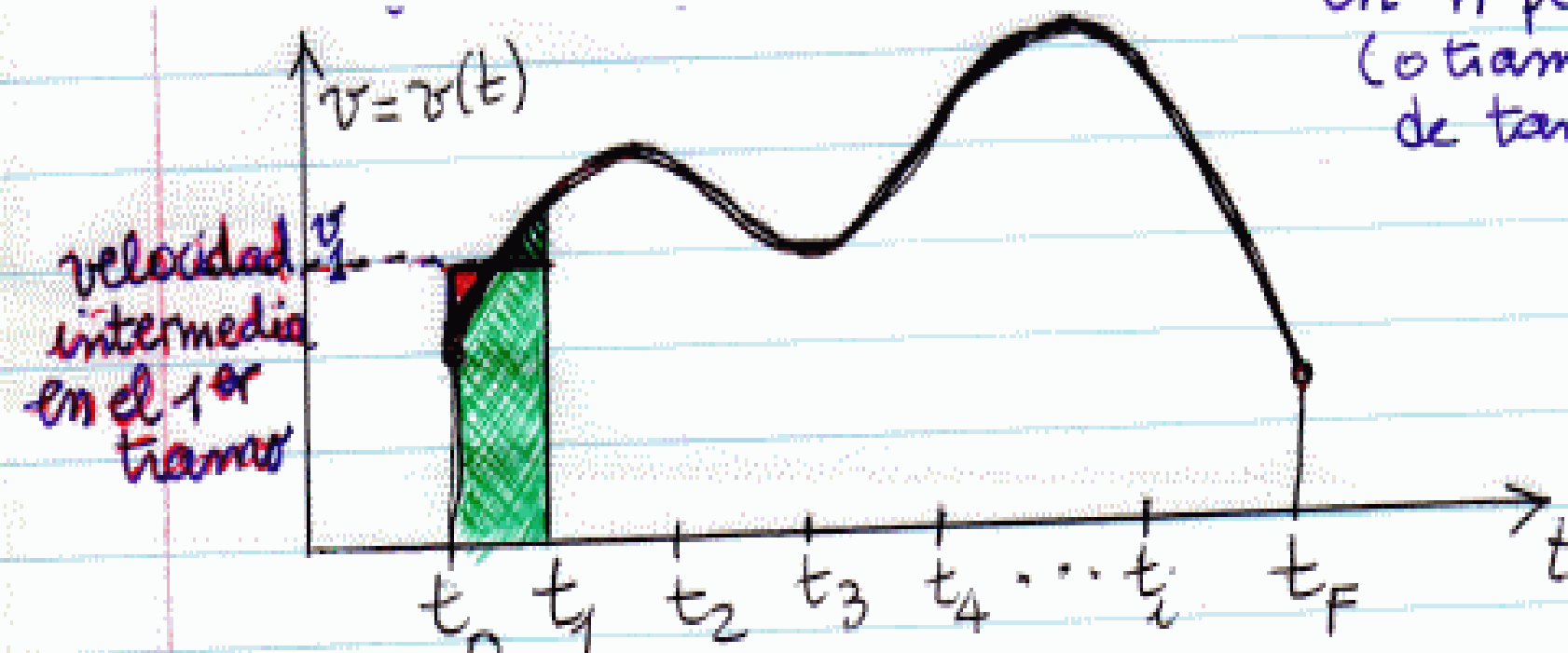
Obstrucción:

Pero ahora la curva gráfica no forma
figuras geométricas cuyas áreas
sepa calcular! (rectángulos,
triángulos, etc)

SOLUCIÓN: Varios métodos

Integración por SUMA de RIEMANN

Parto el INTERVALO de tiempo $[t_0, t_F]$
en n pedacitos
(o tramos)
de tamaño Δt



1er tramo Δt

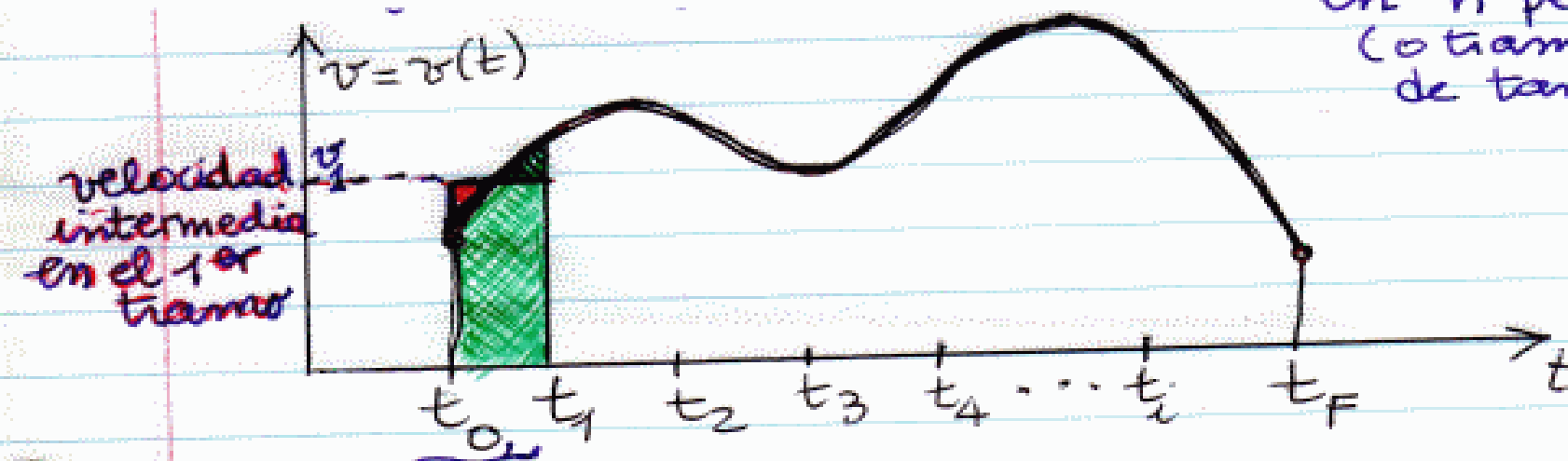
Área verde  = área rectángulo 

error $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{l} - \text{área "esquina" izquierda superior} \\ + \text{área "esquina" derecha superior} \end{array} \right)$

SOLUCIÓN: Varios métodos

Integración por SUMA de RIEMANN

Parto el INTERVALO de tiempo $[t_0, t_F]$
en n pedacitos
(o tramos)
de tamaño Δt



$$\text{SUMA de ÁREAS VERDES} = \int_{t_0}^{t_F} v(t) dt$$

$$\approx \text{SUMA de Áreas de RECTÁNGULOS}$$

$$= \text{SUMA de (Bases} \cdot \text{alturas)}$$

$$= \text{SUMA de } \underbrace{\text{alturas}}_{v_i} \cdot \Delta t$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t \quad \leftarrow \text{"SUMA de RIEMANN"}$$

MÉTODO
de

INTEGRACIÓN POR SUMAS de RIEMANN

Método de INTEGRACIÓN por PRIMITIVA y REGLA de BARROW

Recordemos el planteo del problema:

- Sabemos que $x'(t) = v(t)$ (velocidad = derivado de posición)
- Conocemos $v(t)$
- Queremos hallar la distancia recorrida que es $x(t_f) - x(t_0)$ pero no conocemos la función $x(t)$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

• Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$ dada

Ejemplo: Si $v(t) = 45 - t^2$

Método de INTEGRACIÓN por PRIMITIVA y REGLA de BARROW

Recordemos el planteo del problema:

- Sabemos que $x'(t) = v(t)$ (velocidad = derivado de posición)
- Conocemos $v(t)$
- Queremos hallar la distancia recorrida que es $x(t_f) - x(t_0)$ pero no conocemos la función $x(t)$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

• Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$ dada

Ejemplo: Si $v(t) = 45 - t^2$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

● Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$ dada

Ejemplo: Si $v(t) = 45 - t^2$

Entonces puedo elegir

$$x(t) = 45t - \frac{t^3}{3} + \sqrt{2}$$

"Primitiva"
de $v(t)$

HAY MUCHAS

porque $x'(t) = \left(45t - \frac{t^3}{3} + \sqrt{2}\right)' =$

$$= 45t' - \frac{(t^3)'}{3} + (\sqrt{2})' =$$

$$= 45 \cdot 1 - \frac{3t^2}{3} + 0$$

$$= 45 - t^2$$

Método de INTEGRACIÓN por PRIMITIVA y REGLA de BARROW

Recordemos el planteo del problema:

- Sabemos que $x'(t) = v(t)$ (velocidad = derivado de posición)
- Conocemos $v(t)$
- Queremos hallar la distancia recorrida que es $x(t_f) - x(t_0)$ pero no conocemos la función $x(t)$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

- Encontrar (ingeniárselas) alguna función $x(t)$ cuya DERIVADA sea la función $v(t)$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

● Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$ dada

2do paso

REGLA DE BARROW

● En la función $x(t)$ encontrada

SUSTITUYO $t = t_f$

y SUSTITUYO $t = t_0$

y RESTO: $x(t_f) - x(t_0)$

DISTANCIA
RECORRIDA $= x(t_f) - x(t_0)$

CONCLUSIÓN

$$\int_{t_0}^{t_f} v(t) dt = x(t_f) - x(t_0)$$

DONDE $x(t)$ es UNA primitiva
de $v(t)$