

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras¹

6 de setiembre de 2013

XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICA EMALCA- VENEZUELA 2013

**Facultad de Ciencias - Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela
del 1 al 6 de setiembre de 2003**

Resumen

El curso de Teoría Ergódica de la XXVI de la Escuela Venezolana de Matemática estaba previsto que se desarrollara en la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes, y fue preparado desde el año 2012 en que fue aceptada por la Organización de la EMALCA- Venezuela 2013, mi propuesta para dictar dicho curso. Su temática sigue el libro [1], incluyendo una primera parte introductoria a la Teoría Ergódica de los Sistemas Dinámicos por iterados de una transformación, y una segunda parte enfocada a la Teoría Ergódica de los Atractores Topológicos y Estadísticos. Debido a un inesperado quebranto de salud, no he podido viajar desde Uruguay a Venezuela y lamentablemente no he podido cumplir con la presentación de dicho curso en forma presencial en la EMALCA- Venezuela- 2013. Por este motivo, he grabado en videos, con audio a tiempo real, todas las clases de este curso y las he publicado en Internet. En este documento incluyo los enlaces a dichos videos. Si bien estos videos no equivalen ni contienen la necesaria riqueza de las clases presenciales con interacción entre la expositora y los participantes de la Escuela, en forma directa y en vivo, quizás sean útiles para sustituir en parte dichas clases, teniendo en cuenta la circunstancia de mi imprevista ausencia en el evento.

¹ Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Rafael Laguardia” (IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Av. Herrera y Reissig 565, C.P.11300 Montevideo, URUGUAY
Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

1. INTRODUCCIÓN

Los videos de todas las clases del curso, cuyos enlaces se dan en este documento, incluyen imagen móvil con audio sincronizado a tiempo real . Se pueden ver y escuchar con Microsoft Multimedia o con Real Player por ejemplo, disponiendo de tarjeta de sonido y parlantes.

Por limitaciones de capacidad del servidor donde se subieron los videos, y por la elevada cantidad de memoria de cada video, se recomienda por favor bajar el archivo de cada video en vez de abrirlo en línea, y guardarlo en la computadora del usuario.

Además de los videos, se incluyen archivos con las fotos de los pizarrones (fijas sin audio), en formato pdf. Se pueden ver con Adobe Acrobat por ejemplo.

Los teoremas, definiciones, ejemplos, etc durante los videos están numerados con las mismas referencias de numeración del libro [1], correspondiente a este curso de Teoría Ergódica, de la XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas, entregado a los participantes de dicha escuela durante la misma.

El índice con enlaces a los videos, además de encontrarse en este documento, está publicado en el sitio web [2]. El programa previsto para el curso de Teoría Ergódica, y la bibliografía completa, así como los programas y bibliografía previstos para los otros tres cursos de la XXVI Escuela Venezolana de Matemática, se encuentra publicado en el sitio web [3] desde principios del año 2013. Además, la presentación general de dicha Escuela se encuentra publicada en el sitio web [4]. La bibliografía completa utilizada para diseñar este curso de Teoría Ergódica se encuentra en el libro [1] correspondiente a dicho curso entregado durante la XXVI Escuela Venezolana de Matemática.

2. VIDEOS DE LAS CLASES (CONTENIDOS Y ENLACES)

CLASE 1 - (lunes 2 Sept 2013 de mañana)

VIDEOS - [Clase 1 parte A](#) (19:54 minutos, 37Mb),

[Clase 1 parte B](#) (26:49 minutos, 47 Mb),

[Clase 1 parte C](#) (15:18 minutos, 27 Mb)

FOTOS FIJAS de pizarrones de la Clase1, archivo [TeoErgClase1.pdf](#) (541 Kb)

CONTENIDO

CLASE 1 Parte A Sistema dinámico por iterados de T. Medidas de probabilidad invariantes. Topología débil* en espacio de probabilidades. Teorema de existencia de medidas de prob. invariantes (enunciado y demostración)

CLASE 1 Parte B Definición de omega-límite y recurrencia Lema de recurrencia de Poincaré- versión medible y versión topológica (enunciados y demostración) Definición de Ergodicidad Caracterización de la ergodicidad Enunciado del teorema de existencia de medidas ergódicas Promedios temporales Enunciado del Teorema Ergódico de Birkhoff Singularidad mutua de medidas ergódicas

CLASE 1 Parte C Convexidad, Teorema de Krein Milman del Análisis Funcional (solo enunciado) Extremalidad de las medidas ergódicas Demostración del teorema de existencia de medida ergódicas.

CLASE de EJERCICIOS (lunes 2 de sept 2013 de tarde). Los ejercicios con sugerencias se encuentran en el libro [1] correspondiente a este curso, capítulo 1. Responderé dudas y preguntas por correo electrónico en la dirección que figura en la nota al pie de la primera página de este documento.

CLASE 2 - (martes 3 sept 2013 de mañana)

VIDEOS - [Clase 2 Parte A](#) (10:04 minutos, 18.7 Mb),

[Clase 2 Parte B](#) (17:02 minutos, 30.4 Mb),

[Clase 2 Parte C](#) (26:50 minutos, 50 Mb)

[Clase 2 Parte D](#) (13:58 minutos, 27 Mb)

FOTOS FIJAS de pizarrones de la Clase 2, archivo [TeoErgClase2.pdf](#) (1.1 Mb)

CONTENIDO

Clase 2 Parte A: Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin: Enunciado Corolarios: promedio de medida de transitividad, tiempo medio de estadía, caracterizaciones de la ergodicidad. Teorema ergódico subaditivo de Kingmann (solo enunciado)

Clase 2 Parte B (El contenido de la parte B de la clase 2 no está en el libro): Demostración del teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin, Teorema ergódico maximal (enunciado, demostración y corolarios)

Clase 2 Parte C: Ergodicidad única. Definición y teorema de caracterización de transformaciones únicamente ergódicas. Demostración que la rotación irracional del círculo es únicamente ergódica.

Clase 2 Parte D: Medidas mixing. Definición. Ejemplos: rotación irracional no es mixing. Tent map en $[0,1]$ es mixing. Teorema de descomposición ergódica (enunciado solo) Conjuntos de probabilidad total.

CLASE 3 (martes 3 sept 2013 de tarde)

VIDEOS - [Clase 3 Parte A](#) (16:10 minutos, 29.2 Mb),

[Clase 3 Parte B](#) (21:53 minutos, 39.6 Mb)

[Clase 3 Parte C](#) (20:01 minutos, 37 Mb)

FOTOS FIJAS de pizarrones de la Clase 3, archivo [TeoErgClase3.pdf](#) (771 Kb)

CONTENIDO

Clase 3 Parte A: Automorfismo lineal en el toro $2,1,1,1$.

Clase 3 Parte B: Difeomorfismos de Anosov y conjuntos uniformemente hiperbólicos Herradura de Smale. Teorema de subvariedades invariantes en conjuntos uniformemente hiperbólicos (solo enunciado)

Clase 3 Parte C: Definiciones de puntos regulares, exponentes de Lyapunov y subespacios de Oseledets. Teorema de Oseledets (enunciado solo) Definición de Región de Pesin y de medidas hiperbólicas. Teorema de subvariedades invariantes locales en Región de Pesin (solo enunciado).

CLASE de EJERCICIOS (miércoles 4 de sept 2013 de mañana) Los ejercicios con sugerencias se encuentran en el libro [1] correspondiente a este curso, capítulos 2 y 3. Responderé dudas y preguntas por correo electrónico en la dirección que figura en la nota al pie de la primera página de este documento.

CLASE 4 (miércoles 4 sept 2013 de tarde)

VIDEOS - [Clase 4 Parte A](#) (15:26 minutos, 28.8 Mb),

[Clase 4 Parte B](#) (20:40 minutos, 38.5 Mb),

[Clase 4 Parte C](#) (21:07 minutos, 39.7 Mb)

FOTOS FIJAS de pizarrones de la Clase 4, archivo [TeoErgClase4.pdf](#) (774 Kb)

CONTENIDO

Clase 4 Parte A: Definición de atractor topológico y estabilidad orbital. Ejemplos. Cuenca global de atracción topológica. Existencia de medidas invariantes y ergódicas soportadas en atractor topológico.

Clase 4 Parte B: Atractores de Milnor, alfa observabilidad y alfa-obs. minimalidad: definiciones y ejemplos (advertencia: hay un error en el libro en la definición 6.1.1, donde dice $m(E(K))=1$ debe decir $m(E(K))>0$.) Teorema de existencia de atractores de Milnor alfa-obs. minimales (enunciado y demostración)

Clase 4 Parte C: Atractores ergódicos (definición y ejemplos) Atracción estadística y medidas SRB o físicas (definiciones)

CLASE de EJERCICIOS (jueves 5 de sept 2013 de mañana) Los ejercicios con sugerencias se encuentran en el libro [1] correspondiente a este curso, capítulo 4. Responderé dudas y preguntas por correo electrónico en la dirección que figura en la nota al pie de la primera página de este documento.

CLASE 5 (jueves 5 sept 2013 de tarde)

VIDEOS - [Clase 5 Parte A](#) (21:34 minutos, 41 Mb),

[Clase 5 Parte B](#) (16:53 minutos, 32.5 Mb),

FOTOS FIJAS de pizarrones de la Clase 5, archivo [TeoErgClase5.pdf](#) (685 Kb)

CONTENIDO

Clase 5 Parte A: Atractores estadísticos o de Ilyashenko (Definición) Caracterización de la atracción estadística (enunciado y demostración) Relación entre medidas SRB o físicas (cuando existen) y los atractores estadísticos (enunciado, demostración y ejemplo)

Clase 5 Parte B: Ejemplos de atractores estadísticos (automorfismo lineal en el toro, ejemplos de Hu-Young y ojo de Bowen). Alfa-obs. minimalidad de atractores estadísticos (definición) Teorema de existencia de atractores estadísticos alfa-observable minimales.

CLASE 6 (viernes 6 sept 2013 de mañana)

VIDEOS - [Clase 6 Parte A](#) (16:22 minutos, 31 Mb),

[Clase 6 Parte B](#) (8:26 minutos, 15.8 Mb),

[Clase 6 Parte C](#) (9:16 minutos, 17.7 Mb)

FOTOS FIJAS de pizarrones de la Clase 6, archivo [TeoErgClase6.pdf](#) (563 Kb)

CONTENIDO

Clase 6 Parte A: Definición de cuenca de atracción estadística epsilon-débil de una medida de probabilidad. Medidas SRB-like o pseudo-físicas (definición). Teorema de existencia de medidas SRB-like (enunciado y demostración)

Clase 6 Parte B: Teorema de optimalidad estadística del conjunto de medidas SRB-like (enunciado y demostración).

Clase 6 Parte C: Teorema de caracterización de atractores estadísticos o de Ilyashenko por medidas SRB-like (enunciado y demostración).

CLASE de EJERCICIOS y de CONSULTA sobre todo el curso (viernes 6 de sept 2013 de tarde) Los ejercicios con sugerencias se encuentran en el libro [1] correspondiente a este curso, capítulos 1 al 6. Responderé dudas y preguntas por correo electrónico en la dirección que figura en la nota al pie de la primera página de este documento.

REFERENCIAS

[1] Eleonora Catsigeras: "*Teoría Ergódica de los Atractores Topológicos y Estadísticos*" - XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas ISBN 978-980-261-144-7 Publicado por Ediciones IVIC, Caracas, 2013 - Prepublicación electrónica en <http://arxiv.org/abs/1305.1869> (último acceso 06 Sept. 2013)

[2] Eleonora Catsigeras: "*Videos y Fotos de los Pizarrones del Curso de Teoría Ergódica*" Página personal con presentaciones en eventos científicos. Evento XXVI Escuela Venezolana de Matemática, 2013. <http://eleonora.wikispaces.com/TeoriaErgodica2013> (último acceso 06 Sept. 2013)

[3] Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA), Asociación Matemática Venezolana y Escuela Venezolana de Matemáticas: "*XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas Emalca - Venezuela 2013, Universidad de Los Andes, Merida, 1 al 6 de septiembre, 2013*" Publicación electrónica en http://www.umalca.org/web/wp-content/uploads/Informes-Emalcas/EMALCA2013/EVM_EmalcaVenezuela_2013%20final.pdf (último acceso 06 Sept. 2013)

[4] Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC - Gobierno de la República Bolivariana de Venezuela): "*Escuela Venezolana de Matemáticas*" publicado en el sitio web <http://evm.ivic.gob.ve/> (último acceso 06 Sept. 2013)