CURSO AUDIOVISUAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

(Cálculo en Varias Variables Reales)

INCOMPLETO

Autor: Eleonora Catsigeras
IMERL. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República.
Montevideo, Uruguay, 2007.

Los videos fueron subidos a YouTube en el año 2024. Están en el siguiente canal:

https://www.youtube.com/@eleonora17s/videos

ÍNDICE DE LA PARTE I (Clases A1 a A4 y 1 a 22)

(Cliquear en el número del capítulo buscado)

ÍNDICE DE LA PARTE II (Clase 23 a 40)

En construcción.

(Cliquear en el número del capítulo buscado)

BIBLIOGRAFÍA y EJERCICIOS.

CAPÍTULO 0. (Agregado) Ecuaciones Diferenciales.

Clase A1. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Definiciones. Ejemplos. Ecuaciones en variables separadas.

Pizarrones.

Videos: Clase A1 Parte 1 https://youtu.be/ALbHp6IkcLM

Clase A1 Parte 2 https://youtu.be/zkjEDP1NaC0

Clase A1 Parte 3 https://youtu.be/JixMZMv9mtw

Ir al índice

Clase A2. Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea y no homogénea. Método de variación de constante. Errata en la Parte 1: donde debería decir y' = by dice y' = bx.

Pizarrones.

Videos Clase A2 parte1 https://youtu.be/9-BmX7nW7bw

Clase A2 parte 2 https://youtu.be/EN0PViehd74

Clase A2 parte 3 https://youtu.be/yWgseXkOZ5s

Ir al índice

Clase A3. Ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes. Soluciones exponenciales. Ecuación característica y Solución general.

Pizarrones.

Videos Clase A3 parte 1 https://youtu.be/WeGqlxZ3Kj8

Clase A3 parte 2 https://youtu.be/Ieqc20EKN3M

Clase A3 parte 3 https://youtu.be/UOPyM-c6pPY

Ir al índice

Clase A4. Ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Método de selección.

Pizarrones.

Videos: Clase A4 parte 1 https://youtu.be/1Oxsz5zdW7Q

Clase A4 parte 2 https://youtu.be/G0PRuYRH4XM

Clase A4 parte 3 https://youtu.be/dmh0F5HNmjg

Ir al índice

CAPÍTULO 1. TOPOLOGÍA en Rq.

Clase 1. Norma y distancia en Rq. Bolas y entornos.

Pizarrones.

Videos Clase 1 parte 1 https://youtu.be/pBzQMAgQ0MY

Clase 1 parte 2 https://youtu.be/FbShywxgLwk

Ir al índice

Clase 2. Límite de sucesiones en Rq. Sucesiones Divergentes. Sucesiones de Cauchy.

Pizarrones.

Videos Clase 2 parte 1 https://youtu.be/z9KYRAjGLns

Clase 2 parte 1B https://youtu.be/q63W1iS4GL8

Clase 2 parte 2 https://youtu.be/D5NzZgGSfyQ

Clase 2 parte 3 https://youtu.be/GOc7p6sdeQY

Ir al índice

Clase 3. Subsucesiones y teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones.

Pizarrones.

Videos Clase 3 parte 1 https://youtu.be/r8kKzz156Jo

Clase 3 parte 2 https://youtu.be/HVv8MvkB_-E

Ir al índice

Clase 4. Interior, exterior, frontera y clausura de un conjunto. Abiertos y cerrados. Intersecciones y uniones de abiertos y cerrados. Conjuntos compactos.

Error: En el video de la clase 4 parte 1, al final del pizarrón dice D donde debería decir C.

Error: En el video de la clase 4 parte 3, donde dice a la derecha “demostración del Teorema 1”, debería decir “demostración del Teorema 2”.

Pizarrones.

Videos Clase 4 Parte 1 https://youtu.be/meWbek731Oo

Clase 4 Parte 2 https://youtu.be/vvsTpgqGGPs

Clase 4 Parte 3 https://youtu.be/VavfFx68B9Q

Clase 4 Parte 4 https://youtu.be/os1WNyT26Oo

Ir al índice

Clase 5. Puntos de acumulación y teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos.

Pizarrones.

Videos Clase 5 Parte 1 (única parte): https://youtu.be/yEc7gsKRcTw

Ir al índice

CAPÍTULO 2. LÍMITE Y CONTINUIDAD EN VARIAS VARIABLES.

Clase 6. Funciones de varias variables. Superficies gráficas y curvas de nivel de funciones reales de dos variables. Funciones vectoriales. Conjuntos imagen y preimagen. Funciones acotadas.

Pizarrones.

Videos Clase 6 Parte 1 https://youtu.be/F_FfsIFKdLA

Clase 6 Partes 2, 3 y 4 https://youtu.be/7m5xrwZBdM0

Ir al índice

Clase 7. Límite de funciones de varias variables: Definición, caracterización con límite de sucesiones. Límite infinito y cuando el punto tiende infinito. Propiedades de los límites. Límites direccionales. Ejemplos.

Errata: Clase7 parte 1 en la figura del 2do pizarrón y en el último pizarrón debe ser entorno reducido, falta el asterisco en B sub delta (0,0)

Pizarrones.

Videos Clase 7 Parte 1 https://youtu.be/WyRFxXmu0z8

Clase 7 Parte 2 https://youtu.be/voI_aFiQFfA

Clase 7 Parte 3 https://youtu.be/_xEcJYJU9bA

Clase 7 Parte 4 https://youtu.be/ENEbyYsirfY

Clase 7 Parte 5 https://youtu.be/5SuaBenLIVQ

Ir al índice

Clase 8. Continuidad de funciones de varias variables. Propiedades de la continuidad. Caracterización de la continuidad por la preimagen abierta de abiertos. Ejemplos.

Pizarrones.

Videos Clase 8 Parte 1 https://youtu.be/04bXn2fzCVE

Clase 8 Parte 2 https://youtu.be/YhWMzTQ1Xjk

Clase 8 Parte 3 https://youtu.be/gNMgmZxx-VE

Ir al índice

Clase 9. Imagen continua de un compacto. Teorema de Weierstrass. Continuidad uniforme. Propiedades de la continuidad uniforme y ejemplos. Continuidad uniforme en compactos (Teorema de Heine)

Pizarrones.

Videos Clase 9 Parte 1 https://youtu.be/XIwveoM55uo

Clase 9 Parte 2 https://youtu.be/o0ZIpr2VJVw

Clase 9 Parte 3 https://youtu.be/uHx8f1qQ1aY

Clase 9 Parte 4 https://youtu.be/zS2QBiXKliY

Clase 9 Parte 5 https://youtu.be/x7svXsWFCBw

Ir al índice

CAPÍTULO 3. DERIVADA Y DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES.

Clase 10. Derivadas parciales. Matriz Jacobiana. Derivadas parciales de orden superior y funciones de clase C^r.

Pizarrones.

Videos Clase 10 Parte 1 https://youtu.be/IT5UgGTh1is

Clase 10 Parte 2 https://youtu.be/5BIulJekB-A

Clase 10 Parte 3 https://youtu.be/usi_e5S4fzQ

Ir al índice

Clase 11. Derivadas direccionales. Interpretación gráfica. Ejemplos de funciones continuas sin derivadas direccionales, y de funciones no continuas con derivadas direccionales.

Pizarrones.

Videos Clase 11 Parte 1 https://youtu.be/GHGzeI5hYNI

Clase 11 Parte 2 https://youtu.be/QEoGrSAb53o

Ir al índice

Clase 12. Diferenciabilidad. Definición y cálculo del diferencial. Diferenciabilidad y continuidad. Diferenciabilidad y derivadas direccionales. Propidades de linealidad del diferencial.

Pizarrones.

Videos Clase 12 Parte 1 https://youtu.be/opns4y0VIFE

Clase 12 Parte 2 https://youtu.be/RLfLyFjhz_Y

Clase 12 Parte 3 https://youtu.be/mLmGMcywvdc

Ir al índice

Clase 13. Funciones reales de dos variables. Plano tangente. Funciones reales de varias variables. Vector gradiente. Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Desigualdad del valor medio para funciones vectoriales.

Pizarrones.

Videos Clase 13 Parte 1 https://youtu.be/p8xN2H3GhUE

Clase 13 Parte 2 https://youtu.be/-Q6_yjTWr6Q

Clase 13 Parte 3 https://youtu.be/ko0DcfGJIx0

Ir al índice

Clase 14. Funciones de clase C^1 y diferenciabilidad.

Pizarrones.

Videos Clase 14 Parte 1 https://youtu.be/ByAmWSL1ER8

Clase 14 Parte 2 https://youtu.be/qNsZiC5u-lk

Ir al índice

Clase 15. Derivada y diferencial de la función compuesta. Regla de la cadena.

Pizarrones.

Videos Clase 15 Parte 1 https://youtu.be/nTbhgEzC710

Clase 15 Parte 2 https://youtu.be/YvmaRDNtVE8

Ir al índice

CAPÍTULO 4. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. DESARROLLO DE TAYLOR.

Clase 16. Derivadas de orden superior. Teorema de Schwarz-Bonnet de igualdad de derivadas iteradas.

Error en Clase 16 parte 2: donde dice lim (xi, eta) = x_0, y_0

cuando h,k tiende a (0,0), debe decir lim (x_0 + xi, y_0 + eta) = (x_0, y_0)

Pizarrones.

Videos Clase 16 Parte 1 https://youtu.be/JkrOJtdlOfY

Clase 16 Parte 2 https://youtu.be/NZ9csNXUCDA

Ir al índice

Clase 17. Diferenciales de orden superior. Definiciones. Caso particular para dos variables. Expresión del diferencial con la fórmula del binomio de Newton. Ejemplos.

Error en Clase 17 parte 2: donde dice “clase C^r el diferencial de orden r”, debe decir “clase C^n el diferencial de orden n”.

Pizarrones.

Videos Clase 17 Parte 1 https://youtu.be/BRLu-bwRSDk

Clase 17 Parte 2 https://youtu.be/FpkxRdpqv34

Ir al índice

Clase 18. Desarrollo de Taylor en una variable. Enunciado y demostración. Fórmula de Lagrange para el resto en una variable. Ejemplo de aplicación al cálculo de límites.

Pizarrones.

Videos Clase 18 Parte 1 https://youtu.be/tuPMiwytNH0

Clase 18 Parte 2 https://youtu.be/xbim1mqU_DM

Ir al índice

Clase 19. Desarrollo de Taylor en varias variables. Enunciado, demostración y ejemplo. Fórmula de Lagrange para el resto en varias variables.

Error en Clase 19 parte 1: Al final del último pizarrón de esta parte, donde dice

lim (x,y) tiende (0,0) debería decir lim (x,y) tiende a (x_0, y_0)

Pizarrones.

Videos Clase 19 Parte 1 https://youtu.be/MXlEa1o8uFk

Clase 19 Parte 2 https://youtu.be/NcxtKI8A43U

Clase 19 Parte 3 https://youtu.be/c7ksPpkOmLE

Clase 19 Parte 4 https://youtu.be/DtU9KCJXuj8

Ir al índice

CAPÍTULO 5. FUNCIÓN INVERSA Y FUNCIÓN IMPLÍCITA.

Clase 20. Definición de función implícita local en una sola ecuación real. Teorema de la función implícita local (caso de una sola ecuación real). Enunciado, demostración y ejemplo.

Pizarrones.

Videos (en construcción)

Ir al índice

Clase 21. Definición de función implícita local en varias ecuaciones reales. Teorema de la función implícita local (caso de varias ecuaciones reales). Enunciado, demostración y ejemplo.

Pizarrones.

Videos (en construcción)

Ir al índice

Clase 22. Teorema de la función inversa local en varias variables. Enunciado, demostración y ejemplo. MOSTRAR O IMPRIMIR

Pizarrones.

Videos (en construcción)

Ir al índice

CAPÍTULO 6. EXTREMOS RELATIVOS, ABSOLUTOS Y CONDICIONADOS.

Clase 23. Extremos relativos de una función real de varias variables, y puntos críticos o estacionarios.

Pizarrones.

Videos (en construcción)

Ir al índice

Clase 24. Extremos absolutos de una función real de varias variables, y clasificación de los puntos críticos por el método del Hessiano.

Pizarrones.

Videos (en construcción)

Ir al índice

Clase 25. Extremos relativos y absolutos condicionados a ecuaciones de Ligadura. Métodos directo y de los multiplicadores de Lagrange.

Pizarrones.

Videos (en construcción)

Ir al índice

Clase 26. Máximo y mínimo absolutos de una función real de varias variables. Discusión de existencia y método de búsqueda.

Pizarrones.

Videos (en construcción)

Ir al índice

CAPÍTULO 7. INTEGRALES PARAMÉTRICAS. INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES ITERADAS.

Clase 27. En construcción.

Clase 28. En construcción.

Clase 29. En construcción.

Clase 30. En construcción.

Clase 31. En construcción.

Ir al índice

CAPÍTULO 8. CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES MÚLTIPLES.

Clase 32. En construcción.

Clase 33. En construcción.

Clase 34. En construcción.

Clase 35. En construcción.

Ir al índice

CAPÍTULO 9. INTEGRAL DE RIEMANN MÚLTIPLE e INTEGRALES MÚLTIPLES IMPROPIAS.

Clase 36. En construcción.

Clase 37. En construcción.

Clase 38. En construcción.

Clase 39. En construcción.

Clase 40. En construcción.

Ir al índice

BIBLIOGRAFÍA:

- El curso sigue la siguiente bibliografía:

  - Juan de Burgos. *Cálculo infinitesimal de varias variables.* Capítulos 1, 2 y 3. Editorial Mc. Graw-Hill. ISBN 84-481-1621-6. (1995).
  - Eleonora Catsigeras. *Integrales paramétricas e integrales dobles y triples. Notas para el curso de Cálculo 2.* (2006). Se pueden bajar del siguiente sitio (última conexión en marzo de 2024) http://www.fing.edu.uy/~eleonora/Recopilacion/Archivos/NotasEnsenanza/IntegralesDobles2006.pdf
  - Eleonora Catsigeras. Ecuaciones Diferenciales. Una introducción para los cursos de Cálculo. Se pueden bajar del siguiente sitio (última conexión en marzo de 2024) http://www.fing.edu.uy/~eleonora/Recopilacion/Archivos/NotasEnsenanza/Calcu2EcuacionesDiferenciales.pdf
  - Repartidos de ejercicios de prácticos de Cálculo 2 del año 2006. Se pueden bajar aquí: Practicos2006.pdf
  - Repartidos de ejercicio de prácticos de Cálculo 2 del año 2007. Se pueden bajar aquí: Practicos2007.pdf

- Como bibliografía alternativa y de consulta:

  - Ernesto Mordecki: *Notas para el curso de Cálculo 2.* (2004) Se pueden bajar del siguiente sitio (última conexión en marzo de 2024) http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/courses/calculo2/2004/teorico/

  - R. Courant: *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático.* Vol. II. Editorial LIMUSA. ISBN 968-18-0640-9. (1996).

  - Tom M. Apostol: *Calculus.* Vol II. Editorial Reverté.

Ir al índice

CLASE a1 PARTE 1:
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Bibliografía de la Clase A1:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clase A1

•Práctico 1 del año 2007

DEFINICIÓN: **Ecuación diferencial ordinaria de grado k es una igualdad en que:**

- **LA INCÓGNITA ES UNA FUNCIÓN**

$$y = f(x)$$

desconocida, definida y derivable para todo $x \in I$ donde I es un intervalo abierto de reales.

- APARECE ALGUNA(S) (no necesariamente todas) LAS DERIVADAS HASTA ORDEN $k \geq 1$ DE $y(x)$:

$$y', \; y'', \; y''', \; y^{(k)}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

EJEMPLO

$$y'' + y''' + e^x y = 4\cos x$$

LA INCÓGNITA es una FUNCIÓN $y = y(x)$

DESCONOCIDA, A ENCONTRAR

llamada **SOLUCIÓN**, porque sustituida en la ecuación donde dice y

LA TRANSFORMA EN UNA IDENTIDAD $\forall \quad x \in I$;

donde I es un Intervalo abierto de reales.

En el ejemplo:

$$y(x)'' + y(x)''' + e^x y(x) \equiv 4\cos x \quad \forall x \in I \subset \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

$$y' = (\cos x)y$$

Una solución es

$$y(x) = e^{\operatorname{sen} x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

pues

$$(e^{\operatorname{sen} x})' = (\cos x)(e^{\operatorname{sen} x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Otra solución es

$$y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Otra es:

$$y(x) = 5e^{\operatorname{sen} x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Todas las soluciones son de la forma:

$$y(x) = ke^{\operatorname{sen} x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

k es constante arbitraria real (para cada valor de k se obtiene una solución diferente.)

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

DEFINICIONES:

SOLUCIÓN GENERAL: Todas las funciones solución de la ec. dif. (usualmente son infinitas.)

RESOLVER: Hallar **TODAS** las soluciones

EJEMPLO

$$y'' - 2y' + y = 3$$

Solución general (después demostraremos) es:

$$y = 3 + C_1 e^t + C_2 t e^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Donde C_1 y C_2 **son constantes reales arbitrariamente elegibles.**

EXISTEN INFINITAS FUNCIONES SOLUCIÓN de este ejemplo de Ec. Dif.

Una solución para cada elección de los valores de las constantes.

CLASE a1 PARTE 2:
ECUACIONES DIFERENCIALES CON DATOS INICIALES

Bibliografía de la Clase A1:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clase A1

•Práctico 1 del año 2007

Datos o condiciones iniciales:

Si la ecuación es de primer orden : $\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ \text{donde} \\ x_0, \quad y_0 \\ \text{son números dados.} \end{array} \right.$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Si la ecuación es de segundo orden: $\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = u_0 \\ \text{donde} \\ x_0, \quad y_0, \quad u_0 \\ \text{son números dados.} \end{array} \right.$

SOLUCIÓN CON DATOS INICIALES:

Entre todas las soluciones (solución general) encontrar aquella que cumple con los datos iniciales.

EJEMPLO: Hallar la solución de:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 3 \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

DATOS INICIALES

Solución general sin datos iniciales: **(después probaremos)**

$$y(x) = 3 + C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} y(0) = 4 \\ y(x) = 3 + C_1 e^x + C_2 x e^x \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} 4 = 3 + C_1 \\ \left.\begin{array}{l} y'(0) = 5 \\ y'(x) = C_1 e^x + (C_2 x + C_2) e^x. \end{array}\right\} 5 = C_1 + C_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = 4 \end{array}$$

Respuesta: $y(x) = 3 + e^x + 4xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$

CLASE a1 PARTE 3: ECUACIONES DIFERENCIALES de VARIABLES SEPARADAS

Bibliografía de la Clase A1:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clase A1

•Práctico 1 del año 2007

ECUACIÓN DIF. DE VARIABLES SEPARADAS ES

$$y' = A(y)B(x)$$

Ejemplo 1: $y' = (\operatorname{sen} x)(1+y^2)$ es de variables separadas, $A(y) = 1 + y^2$ y $B(x) = \operatorname{sen} x$.

No ejemplo 2: $y' = \operatorname{sen}(x+y)$ no es

SOLUCIONES: 1) Cada real α tal que $A(\alpha) = 0$ da un función solución $y(x) = \alpha$ constante, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) Si $A(y) \neq 0$

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{A(y(x))}\,dx = \int B(x)\,dx \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de variable } y = y(x) \\ dy = y'(x)\,dx \\ \displaystyle\int \frac{dy}{A(y)} = \int B(x)\,dx \qquad (1) \end{array} \right.$$

se perdieron las soluciones constantes.

$$\int \frac{dy}{A(y)} = \int B(x)\,dx \qquad (1)$$

$$P(y) = C + Q(x) \qquad (2)$$

Donde C es una constante real arbitraria.

De (2), si se puede, se despeja y en función de x.

Para cada valor de la constante C una solución.

Además están las soluciones constantes

$$y(x) = \alpha.$$

encontradas al principio y perdidas al pasar dividiendo A(y).

Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea

$$y' + a(x)y = 0$$

es de variables separadas, ya que es:

$$y' = -a(x) \cdot y$$

CLASE a2 PARTE 1:
ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 1er. ORDEN HOMOGÉNEA

Bibliografía de la Clase A2:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clase A2

•Práctico 1 del año 2007

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea

$$y' + a(x)y = 0$$

es de variables separadas, ya que es:

$$y' = -a(x) \cdot y$$

La solución general se encuentra con el método general visto para las ecuaciones de Variables Separadas.

CASO PARTICULAR: Coeficiente -a(x) = b constante dada.

Ecuación diferencial lineal De 1er. Orden Homogénea y De Coeficiente constante:

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

y'=by; b constante real

TEOREMA:
Su solución general es:

$$y(x) = Ce^{bx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

C constante real arbitraria.

Demostración:

$$y' = by \quad \Rightarrow \quad y \equiv 0 \quad \text{ó}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int b\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = C + bx \quad \Rightarrow$$

$$\log|y| = C + bx \quad \Rightarrow$$

$$|y| = e^{C}e^{bx} \quad \Rightarrow$$

$$y = \pm e^{C}e^{bx}$$

Definiendo k así:

$$k = \pm e^{C} \text{ ó } k = 0 \text{ si la solución es } y \equiv 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm e^{C}e^{bx} \\ \quad\text{ó} \\ y \equiv 0 \end{array}\right\}$$

y = k e^{bx}

siendo k una constante real arbitraria. □

CLASE a2 PARTE 2: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 1er. ORDEN NO HOMOGÉNEA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Bibliografía de la Clase A1:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clase 1

- **Práctico 1 del año 2007**

Cálculo Diferencial e Integral II. Eleonora Catsigeras.
IMERL. Fac. de Ingeniería. UdelaR. J. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay. Agosto 2007.

Ecuación diferencial lineal
De 1er. Orden
NO HOMOGÉNEA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

$$y' + a(x)y = r(x) \qquad (NH)$$

Ecuación homogénea asociada:

$$y_H' + a(x)y_H = 0 \qquad (H)$$

TEOREMA:

$$\left.\begin{array}{l} y(x) \text{ solución general de (NH)} \\ y_P(x) \text{ una (y una sola) solución particular de (NH)} \\ y_H(x) \text{ solución general de (H)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_P(x)}$$

La solución general de (NH) es la SUMA de
La solución general de (H) más
una (cualquiera pero una sola) solución particular de (NH)

Dem.

$$y_H'(x) + a(x)y_H(x) = 0 \qquad (1)$$

$$y_P'(x) + a(x)y_P(x) = r(x) \qquad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow$$

$$(y_H(x) + y_P(x))'(x) + a(x)(y_H(x) + y_P(x)) = r(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = (y_H(x) + y_P(x)) \text{ es solución de (NH)}$$

¿Son todas? $y(x)$ es solución de (NH)

$$\Rightarrow \quad y'(x) + a(x)y(x) = r(x) \qquad (3)$$

$$y_P'(x) + a(x)y_P(x) = r(x) \qquad (4)$$

$$(3) - (4)$$

$$(y(x) - y_P(x))'(x) + a(x)(y(x) - y_P(x)) = 0$$

$$y(x) - y_P(x) = y_H(x) \text{ es solución de (H).}$$

$$\Rightarrow y(x) = (y_H(x) + y_P(x)) \quad \square$$

CLASE a2 PARTE 3:
MÉTODO DE VARIACIÓN DE CONSTANTE.

Bibliografía de la Clase A1:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clase 1

•Práctico 1 del año 2007

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$y' + a(x)y = r(x) \qquad (NH)$$

$$y'_H + a(x)y_H = 0 \qquad (H)$$

La solución general de (NH) es la SUMA de
La solución general de (H) más
una (cualquiera pero una sola) solución particular de (NH)

¿Cómo encuentro alguna solución particular $y_P(x)$ de (NH)?

ALTER-
NATIVA

Probando, o a ojo, o como sea para encontrar alguna $y_P(x)$

ó

por el **"Método de Variación de Constante"**
que consiste en:

1) Escribir una $y_P(x)$ igual a $y_H(x)$, excepto que en donde esté la constante C escribo una función desconocida, a determinar, C(x)

2) Determinar la función C(x) sustituyendo esa $y_P(x)$ en la ec. dif. (NH) para que $y_P(x)$ la verifique.

EJEMPLO: Resolver $\boxed{y' = (\cos x)y + \cos x \qquad (NH)}$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

con el dato inicial: $\boxed{y(0) = 4.}$

Homogénea asociada: $y'_H - (\cos x)y_H = 0 \qquad (H).$

Resuelta por Variable separadas: $y_H = Ce^{\operatorname{sen} x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

C constante arbitraria real

Solución general de (NH) $\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}$

Encontrar alguna $y_P(x)$ de (NH) por el

"Método de Variación de Constante": $y_P(x) = C(x)e^{\operatorname{sen} x}$ de (NH)

$$(C(x)e^{\operatorname{sen} x})' = (\cos x)(C(x)e^{\operatorname{sen} x}) + \cos x$$

$$(C'(x) + C(x)\cos x)e^{\operatorname{sen} x} = C(x)(\cos x)e^{\operatorname{sen} x} + \cos x$$

$$C'(x) = e^{-\operatorname{sen} x}\cos x \Rightarrow \quad C(x) = \int e^{-\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$$

$$= \left(\int e^{-u}\,du\right)\Big|_{u=\operatorname{sen} x} = -e^{-u} + k\Big|_{u=\operatorname{sen} x} = -e^{-\operatorname{sen} x} + k$$

$$y' = (\cos x)y + \cos x \qquad (NH)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

con el dato inicial: $\boxed{y(0) = 4.}$

Homogénea asociada: $y'_H - (\cos x)y_H = 0 \qquad (H).$

$$y_H = Ce^{\operatorname{sen} x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

C constante arbitraria real

Solución general de (NH) $\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}$

Encontrar alguna $y_P(x)$ de (NH) por el

"Método de Variación de Constante": $y_P(x) = C(x)e^{\operatorname{sen} x}$ **de (NH)**

$$C(x) = -e^{-\operatorname{sen} x} + k$$

Una sola $y_P(x) \Leftrightarrow$ un solo k, por ejemplo $k = 0$:

$$C(x) = -e^{-\operatorname{sen} x} \quad \Rightarrow$$

$$y_P(x) = -e^{-\operatorname{sen} x}e^{\operatorname{sen} x}$$

$$y_P(x) = -1$$

SOLUCIÓN GRAL. DE (NH) es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{\operatorname{sen} x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

C constante arbitraria real.

$$y' = (\cos x)y + \cos x \qquad (NH)$$

con el dato inicial: $\boxed{y(0) = 4.}$

SOLUCIÓN GRAL. DE (NH) es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{\operatorname{sen} x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

C constante arbitraria real.

DETERMINAR LA CONSTANTE C PARA QUE CUMPLA CON EL DATO INICIAL:

$$4 = Ce^{\operatorname{sen} 0} - 1 = C - 1 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow$$

Respuesta:

$$y(x) = 5e^{\operatorname{sen} x} - 1$$

CLASE a3 PARTE 1:
ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA
Soluciones Exponenciales.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Bibliografía de la Clase A3:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

- **Práctico 1 del año 2007**

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Ecuación diferencial LINEAL DE 2do. ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

a y b constantes

TEOREMA

Las funciones solución de (H) forman un espacio vectorial de dimensión dos.

Dem. que forman un espacio vectorial: Si dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (H) entonces su suma también (verificarlo) y el producto de una de ellas por un escalar real también. (verificarlo).

COROLARIO

Si dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (H) y son Linealm. Independ. entonces forman una base del espacio vectorial de soluciones de (H); y la solución general de (H) es:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes arbitrarias.} \end{array}}$$

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

SOLUCIONES EXPONENCIALES DE (H):
Buscar si existen soluciones de (H) de la forma:

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x} \quad \text{con } \lambda \text{ constante real}}$$

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ y(x) &= e^{\lambda x} \\ y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow \\ & (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0, \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (EC) \end{aligned}$$

CONCLUSIÓN: $y(x) = e^{\lambda x}$

es solución de (H) si y solo sí λ
es raíz de la Ecuación Característica (EC)

3 CASOS
- (EC) tiene dos raíces reales diferentes. (2 soluciones exponenciales L.I.)
- (EC) tiene una sola raíz real doble. (1 sola solución exponencial)
- (EC) tiene dos raíces complejas conjugadas no reales. (Ninguna sol.exp.)

CLASE a3 PARTE 2:
ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA
Solución General

Bibliografía de la Clase A3:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

•Práctico 1 del año 2007

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (EC)$$

3 CASOS
- (EC) tiene dos raíces reales diferentes. (2 soluciones exponenciales L.I.)
- (EC) tiene una sola raíz real doble. (1 sola solución exponencial)
- (EC) tiene dos raíces complejas conjugadas no reales. (Ninguna sol.exp.)

1er. Caso: Existen dos raíces reales $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **de la (EC)** $\Rightarrow$

Existen dos soluciones $e^{\lambda_1 x}$ $e^{\lambda_2 x}$ L.I. (verficar que son L.I.) de (H)

$\Rightarrow$ **La solución general de (H) es**

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes reales arbitrarias} \end{array}}$$

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (EC)$$

2do. Caso: Existe una raiz real doble λ_1 **de la (EC)** $\Longrightarrow$

Existe una solución $e^{\lambda_1 x}$ de (H)

Afirmamos que $xe^{\lambda_1 x}$ **también es solución de (H) (A probar (*))**

Existen dos soluciones $e^{\lambda_1 x}$ y $xe^{\lambda_1 x}$ L.I. (Verificar que son L.I.)

$\Rightarrow$ **La solución general de (H) es**

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes reales arbitrarias} \end{array}}$$

Prueba de (*)

$a^2 - 4b = 0$

$\lambda_1 = -a/2$

¿ $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ es solución de (H)?

¿$y_2(x)'' + ay_2(x)' + by_2(x) = 0$?

¿$(\lambda_1^2 x + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 x} + a(1 + \lambda_1 x)e^{\lambda_1 x} + bxe^{\lambda_1 x} = 0$?

¿$[(\lambda_1^2)x - a + a(1 + (\lambda_1)x) + bx]e^{\lambda_1 x} = 0$?

¿$(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)xe^{\lambda_1 x} = 0$?

Sí, porque λ_1 es raíz de (EC). $\square$

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (EC)$$

3er. Caso: Raíces complejas no reales $\alpha \pm i\beta$ **de la (EC)**

Afirmamos que $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$; $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ **son soluciones de (H) (A probar (*))**

Existen dos soluciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ L.I. (Verificar que son L.I.)

$\Rightarrow$ **La solución general de (H) es**

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \operatorname{sen}(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)\right) \\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes reales arbitrarias.} \end{array}}$$

Prueba de (*)

¿ $\begin{array}{l} e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \end{array}$ soluciones de (H)?

Defino función auxiliar compleja: $y_A(x)$ es solución de (H) si y solo si sus partes Real e Imaginaria lo son.

$$\boxed{y_A(x) = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x)\right)}$$

$$y_A(x)' = e^{\alpha x}(\alpha + \beta i)\left(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x)\right)$$

$$y_A(x)'' = e^{\alpha x}(\alpha + \beta i)^2\left(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x)\right)$$

¿$y_A(x)$ es solución de (H) ?

¿$y_A(x)'' + a y_A(x)' + b y_A(x) = 0$?

¿$e^{\alpha x}\left[(\alpha+\beta i)^2 + a(\alpha+\beta i) + b\right]\left(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x)\right) = 0$?

Sí, porque $\alpha + i\beta$ es raíz de (EC) $\square$

CLASE a3 PARTE 3:
ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA
Ejemplos.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Bibliografía de la Clase A3:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

- **Práctico 1 del año 2007**

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

EJEMPLOS:

A) $y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (H1)$

B) $y'' + 2y' + y = 0 \quad (H2)$

C) $y'' + 2y + 2y = 0 \quad ; \; (H3)$

A) $(EC)\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$

Solución general de (H1):

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

$C_1, \ C_2$ constantes reales

B) $(EC) : \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1$

única raíz real, doble.

Solución general de (H2)

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$C_1, \ C_2$ constantes reales

C) $(EC)\ \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1 \pm i$

raíces complejas no reales

Solución general de (H3)

$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

$C_1, \ C_2$ constantes reales

CLASE a4 PARTE 1: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA Método de Selección.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Bibliografía de la Clase A4:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

•Práctico 1 del año 2007

Ecuación diferencial lineal De 2do. Orden NO HOMOGÉNEA

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + ay' + by = r(x) \qquad\qquad (NH) \\ a \text{ y } b \text{ constantes} \end{array}}$$

Ecuación diferencial lineal
De 2do. Orden
NO HOMOGÉNEA

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (NH)$$

a y b constantes

Ecuación homogénea asociada:

$$y_H'' + ay_H' + by_H = 0 \quad (H)$$

Ecuación diferencial lineal
De 2do. Orden
NO HOMOGÉNEA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (NH)$$

a y b constantes

Ecuación homogénea asociada: $y_H'' + ay_H' + by_H = 0 \quad (H)$

TEOREMA:

$y(x)$ solución general de (NH)

$y_P(x)$ una (y una sola) solución particular de (NH)

$y_H(x)$ solución general de (H)

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = y_h(x) + y_P(x)}$$

La solución general de (NH) es la SUMA de

La solución general de (H) más

una (cualquiera pero una sola) solución particular de (NH)

Dem. **Idem. Demostración que para la ecuación lineal de primer orden, Clase 2.**

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$\boxed{y'' + ay' + by = r(x) \quad (NH)}$$

$$y_H'' + ay_H' + by_H = 0 \quad (H)$$

La solución general de (NH) es la SUMA de
La solución general de (H) más
una (cualquiera pero una sola) solución particular de (NH)

¿Cómo encuentro alguna solución particular de (NH)?

ALTER-
NATIVA

Probando, o a ojo, o como sea para encontrar alguna $y_P(x)$

ó

por el **"Método de Selección"**

que tiene como hipótesis la siguiente:

$r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\operatorname{sen}(qx))$

p y q constantes dadas

$A(x)$ y $B(x)$ polinomios dados

de grado $\leq$ **k** o alguno de ellos es $\equiv 0$

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (NH)$$
$$y''_H + ay'_H + by_H = 0 \quad (H)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Método de Selección:

Hipótesis:

$r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\,\mathrm{sen}(qx))$
p y q constantes dadas
$A(x)$ y $B(x)$ polinomios dados
de grado $\leq$ **k** o alguno de ellos es $\equiv 0$

$k =$ mayor de los grados de $A(x)$ y $B(x)$

k=0 si A y B fueran constantes.

Tesis:

1er. Caso: **p + i q** **no es raiz de la EC de (H).**

$$y_P(x) = e^{px}(\overline{A}(x)\cos(qx) + \overline{B}(x)\,\mathrm{sen}(qx)) \quad (*)$$

p y q las mismas constantes dadas en $r(x)$
$\overline{A}(x)$ y $\overline{B}(x)$ polinomios desconocidos,
ambos de grado $\leq k$
con coeficientes indeterminados, a determinar.

2do. Caso: **p + i q** **es raiz simple de la EC de (H).**

3er. Caso: **p es raiz doble de la EC y q= 0.**

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (NH)$$
$$y_H'' + ay_H' + by_H = 0 \quad (H)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Método de Selección:

Hipótesis:

$$r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\operatorname{sen}(qx))$$
p y q constantes dadas
$A(x)$ y $B(x)$ polinomios dados
de grado $\leq$ **k** o alguno de ellos es $\equiv 0$

$k =$ mayor de los grados de $A(x)$ y $B(x)$

k=0 si A y B fueran constantes.

Tesis:

1er. Caso: p + i q no es raiz de la EC de (H). (ver pizarrón anterior)

2do. Caso: p + i q es raiz simple de la EC de (H).

$$y_P(x) = xe^{px}(\overline{A}(x)\cos(qx) + \overline{B}(x)\operatorname{sen}(qx)) \quad (*)$$
p y q las mismas constantes dadas en $r(x)$
$\overline{A}(x)$ y $\overline{B}(x)$ polinomios desconocidos,
ambos de grado $\leq k$

3er. Caso: p es raiz doble de la EC y q= 0.

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (NH)$$
$$y_H'' + ay_H' + by_H = 0 \quad (H)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Método de Selección:

Hipótesis:

$$\boxed{\begin{array}{l} r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\,\mathrm{sen}(qx)) \\ p \text{ y } q \text{ constantes dadas} \\ A(x) \text{ y } B(x) \text{ polinomios dados} \\ \text{de grado} \leq \mathbf{k} \text{ o alguno de ellos es} \equiv 0 \end{array}}$$

$k =$ mayor de los grados de $A(x)$ y $B(x)$

k=0 si A y B fueran constantes.

Tesis:

1er. Caso: p + i q no es raiz de la EC de (H). (ver pizarrón ante-anterior)

2do. Caso: p + i q es raiz simple de la EC de (H). (ver pizarrón anterior)

3er. Caso: p es raiz doble de la EC y q= 0.

$$\boxed{\begin{array}{l} y_P(x) = x^2 e^{px}(\overline{A}(x)\cos(0x) + \overline{B}(x)\,\mathrm{sen}(0x)) \quad (*) \\ p \text{ y } q = 0 \text{ las mismas constantes dadas en } r(x) \\ \overline{A}(x) \text{ polinomio desconocido,} \\ \text{de grado} \leq k \\ \text{con coeficientes indeterminados, a determinar.} \end{array}}$$

OBSERVAR QUE: $(*) \iff y_P(x) = x^2 e^{px}\overline{A}(x)$

Los coeficientes indeterminados en los polinomios desconocidos

$$\breve{\overline{A}}(x) \text{ y } \overline{B}(x)$$

del método de Selección se determinan sustituyendo en la ecuación diferencial (NH) la función

$$y_P(x)$$

que tiene la expresión dada por la fórmula (*) en cada uno de los tres casos diferentes vistos antes.

CLASE a4 PARTE 2:
ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA
Ejemplos.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Bibliografía de la Clase A4:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

- **Práctico 1 del año 2007**

EJEMPLO 1 Resolver

$$y'' + 2y' + y = 3 \qquad (NH)$$

con dato inicial $y(0) = 3, \quad y'(0) = 4$

$$y_H'' + 2y_H' + y_H = 0 \qquad (H)$$

Solución general de (NH) es: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$y_P(x) = 3$ (descubierta a ojo)

$\Rightarrow \quad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3$

$C_1, \quad C_2$ constantes reales arbitrarias.

Dato inicial: $y(0) = 3, \quad y'(0) = 4:$

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3 \\ y'(x) = -C_1 e^{-x} + (C_2 - C_2 x) e^{-x} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = C_1 + 3 \\ y'(0) = -C_1 + C_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Rightarrow 3 = C_1 + 3 \\ 4 := -C_1 + C_2 \\ C_2 = 4 , \ C_1 = 0 \end{array}\right.$$

Respuesta:

$$y(x) = 4 x e^{-x} + 3$$

EJEMPLO 2 **Resolver**

$$y'' + y = 3x^2 + 5x \quad (NH).$$

$$y_H'' + y_H = 0, \quad (H)$$

$$(EC): \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i$$

$$y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$r(x) = 3x^2 + 5x = e^{0x}((3x^2+5x)\cos(0x) + 0\operatorname{sen}(0x))$$

Método de selección, $p = 0, \quad q = 0,$

$A(x) = 3x^2 + 5x, \quad B = 0.$ Grado k = 2

$$y_P(x) = \tilde{A}(x)\cos(0x) + \tilde{B}(x)\operatorname{sen}(0x) = \tilde{A}(x)$$

$\tilde{A}(x)$ polinomio de grado 2

con coeficientes indeterminados:

$$\tilde{A}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Sustituyo en (NH):

$y_P(x)' = 2\alpha x + \beta, \quad y_P(x)'' = 2\alpha,$

$y_P'' + y_p = 3x^2 + 5x, \quad \Rightarrow$

$2\alpha + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 3x^2 + 5x$

$\alpha = 3, \quad \beta = 5, \quad 2\alpha + \gamma = 0,$

$\gamma = -6 \quad \Rightarrow \quad y_P(x) = 3x^2 + 5x - 6$

RESPUESTA: La solución general de (NH) es:

$$\begin{cases} y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \\ \qquad + 3x^2 + 5x - 6 \\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes reales} \end{cases}$$

CLASE a4 PARTE 3:
ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA
Otro Ejemplo.

Bibliografía de la Clase A4:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

•Práctico 1 del año 2007

EJEMPLO 3 **Resolver**

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \qquad (NH)$$

$$y_H'' + 2y_H' + y_H = 0 \qquad (H)$$

E.C. tiene raíz real doble $\lambda = -1$

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

Método de selección:

$$r(x) = 2e^{-x} = e^{-x}(2\cos(0x) + 0\,\mathrm{sen}(0x))$$

$$p = -1, \quad q = 0, \quad A(x) = 2, \quad B(x) = 0$$

Grado de $A(x)$ es 0 (es un polinomio constante)

$p + iq = -1$ es raíz doble de (EC)

$$y_P(x) = x^2 e^{-x}\alpha \qquad (*)$$

Sustituyo (*) en (NH):

$$y_P(x)' = (-x^2 + 2x)e^{-x}\alpha$$

$$y_P(x)'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}\alpha$$

$$¿y_P(x)'' + 2y_P(x)' + y_P(x) = 2e^{-x}?$$

$$¿(x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x + x^2)e^{-x}\alpha = 2e^{-x}?$$

$¿2\alpha e^{-x} = 2e^{-x} \ \forall x \in \mathbb{R}$? Sí, si $\alpha = 1$

$$\boxed{y_P(x) = x^2 e^{-x}}$$

Respuesta:

Solución general de (NH)

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

$C_1, \quad C_2$ constantes reales

CLASE 1 PARTE 1:
NORMA Y DISTANCIA EN Rq

Bibliografía de la Clase1Parte1:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafos 01 y 02.

•Ernesto Mordecki: Notas para el curso de Cálculo 2 de la Facultad de Ciencias. Capítulo 1. Nociones topológicas elementales en Rn. Secciones 1 y 2.

Ejercicios para la Clase1Parte1:

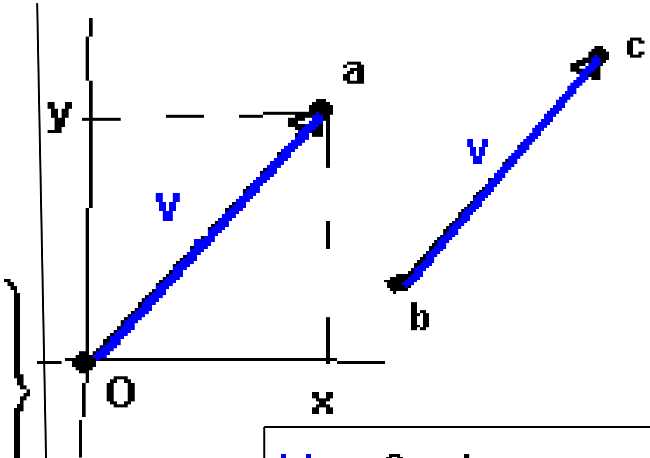
•Práctico 1 del año 2006, ejercicio 1 parte a)

Clase 1 parte 1. Normas y topología en $\mathbb{R}^q$

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \underbrace{(x,y)}_{\text{pareja ordenada de números reales}} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \underbrace{(x,y,z)}_{\text{terna ordenada de números reales}} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{R}^q = \left\{ \underbrace{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_q)}_{q-\text{upla ordenada de números reales}} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$



V= a-O=c-b

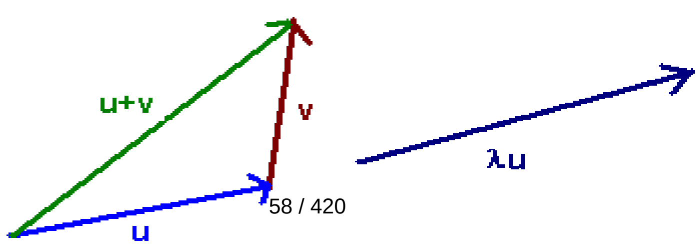
V= (x,y) componentes del vector

a=O+V=(x,y) coordendas del punto a

ESPACIO VECTORIAL:

Suma de vectores: sumar componente a componente

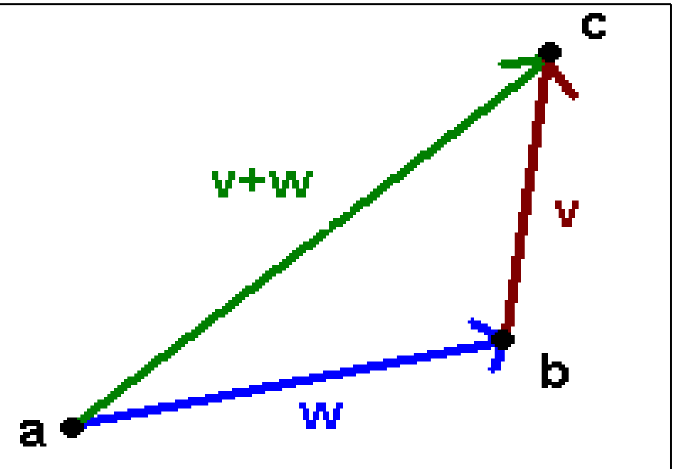
Producto de un vector por escalar λ: multiplicar componentes por λ



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

DEFINICIÓN: Se llama **Norma del vector V**, denotada como **||V||** a un número REAL, no negativo tal que:

- $||V|| > 0$ si $V \neq \bar{0}$, y $||V|| = 0$ si $V = \bar{0}$.
- $||\lambda V|| = |\lambda| \cdot ||V||$.
- Propiedad triangular: $||V + W|| \leq ||V|| + ||W||$.



NORMA USUAL:

$$V = (x, y), \quad ||V|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$V = (x, y, z), \quad ||V|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$V = (x_1, x_2, \ldots, x_q), \quad ||V|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS :

$$\text{dist}(b, c) = ||c - b||,$$

OTRA NORMA (no usual) en R2:

$$V = (x, y), \quad ||V|| = \text{máx}\{|x|, |y|\}$$

PROPIEDADES DE LA DISTANCIA:

- $\text{dist}(b, c) > 0$ si $b \neq c$, y $\text{dist}(b, c) = 0$ si $b = c$.
- $\text{dist}(b, c) = \text{dist}(c, b)$
- Propiedad triangular: $\text{dist}(a, c) \leq \text{dist}(a, b) + \text{dist}(b, c)$.

DISTANCIA USUAL en R2 :

$$b = (x_b, y_b), \quad c = (x_c, y_c),$$

$$c - b = V = (x_c - x_b, y_c - y_b)$$

$$\text{dist}(b, c) = ||c - b|| = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}$$

CLASE 1 PARTE 2:
BOLAS Y ENTORNOS EN Rq

Bibliografía de la Clase1Parte2:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafos 01 y 02.**

- **Ernesto Mordecki: Notas para el curso de Cálculo 2 de la Facultad de Ciencias. Capítulo 1. Nociones topológicas elementales en Rn. Secciones 1 y 2.**

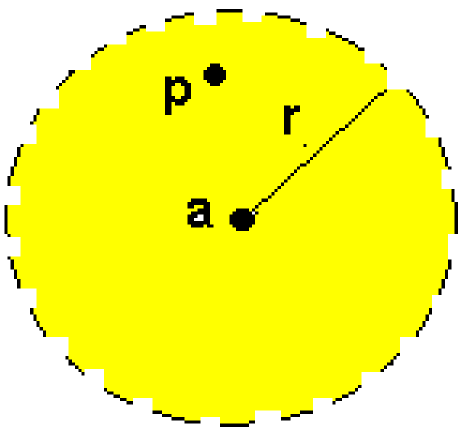
Ejercicios para la Clase1Parte2:

- **Práctico 1 del año 2006, ejercicio 1 parte B)**

DEFINICIÓN: BOLA (ABIERTA) de radio r y centro a. $B_r(a)$

Dado fijo el real r>0

$$B_r(a) = \left\{ p \in \mathbb{R}^q : \underbrace{\|p - a\| < r}_{\text{dist}(a,p)<r} \right\}$$

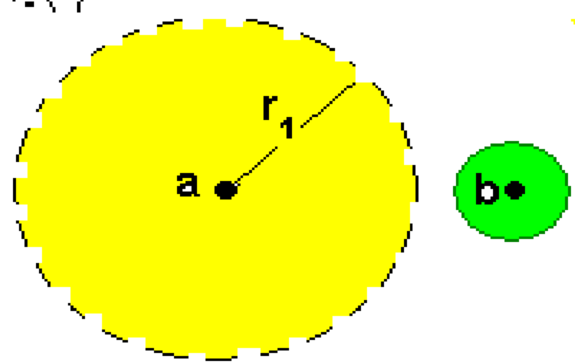


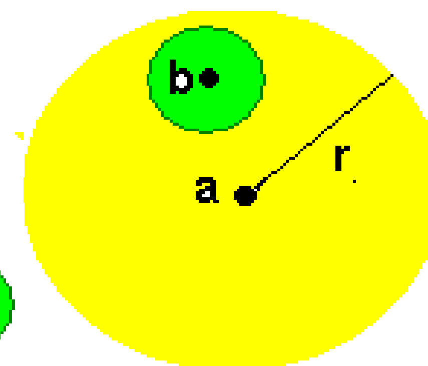
BOLA CERRADA

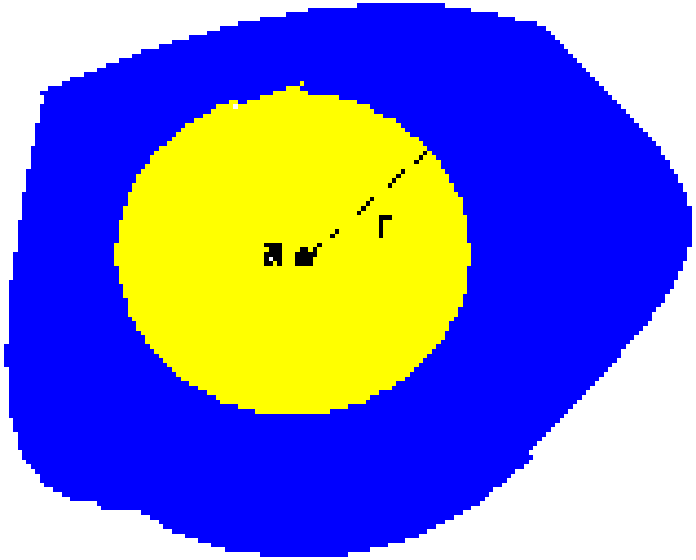
$$\overline{B_r(a)} = \left\{ p \in \mathbb{R}^q : \underbrace{\|p - a\| \leq r}_{\text{dist}(a,p)\leq r} \right\}$$

ALGUNAS PROPIEDADES

- $a \neq b \Rightarrow \exists r_1 > 0, \exists r_2 > 0$ t.q. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(b) = \emptyset$
- $b \in B_r(a) \Rightarrow \exists r_2 > 0$ t.q. $B_{r_2}(b) \subset B_r(a)$

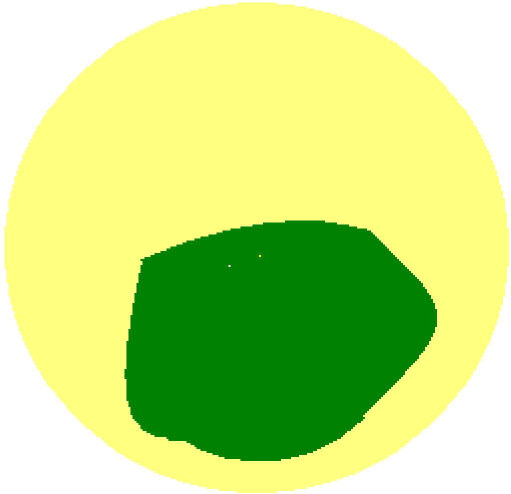






ENTORNO DEL PUNTO a:

Cualquier conjunto que contenga a alguna bola abierta de centro a.



CONJUNTO ACOTADO:

Si está contenido en alguna bola

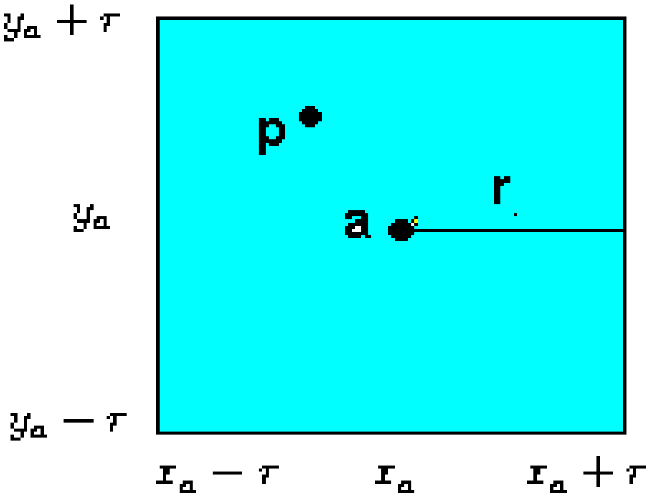
(con centro a cualquiera, y radio r >0 real finito).

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

BOLA DE CENTRO a Y RADIO r CON OTRA NORMA (no usual):

$$||(x,y)|| = \text{máx}\{|x|,|y|\}$$

$$\text{dist}(a,p) = ||p-a|| = ||(x-x_a, y-y_a)|| = \text{máx}\{|x-x_a|,|y-y_a|\}$$



$$p = (x,y), \quad a = (x_a, y_a)$$

$$B_r(a) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ \text{máx}\{|x-x_a|,|y-y_a|\} < r\}$$

$$\text{máx}\{|x-x_a|,|y-y_a|\} < r \iff |x-x_a| < r, \ |y-y_a| < r \iff$$

$$x \in (x_a - r, x_a + r), \quad y \in (y_a - r, y_a + r)$$

CLASE 2 PARTE 1:
LÍMITE DE SUCESIONES EN Rq

Bibliografía de la Clase2Parte1:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 03.**

Ejercicios para la Clase2Parte1:

- **Práctico 1 del año 2006, ejercicios 2 Y 4**

SUCESIÓN EN $\mathbb{R}^q$

$$\mathbb{R}^2: \quad a_n = (x_n, y_n)$$

$$\mathbb{R}^3: \quad a_n = (x_n, y_n, z_n)$$

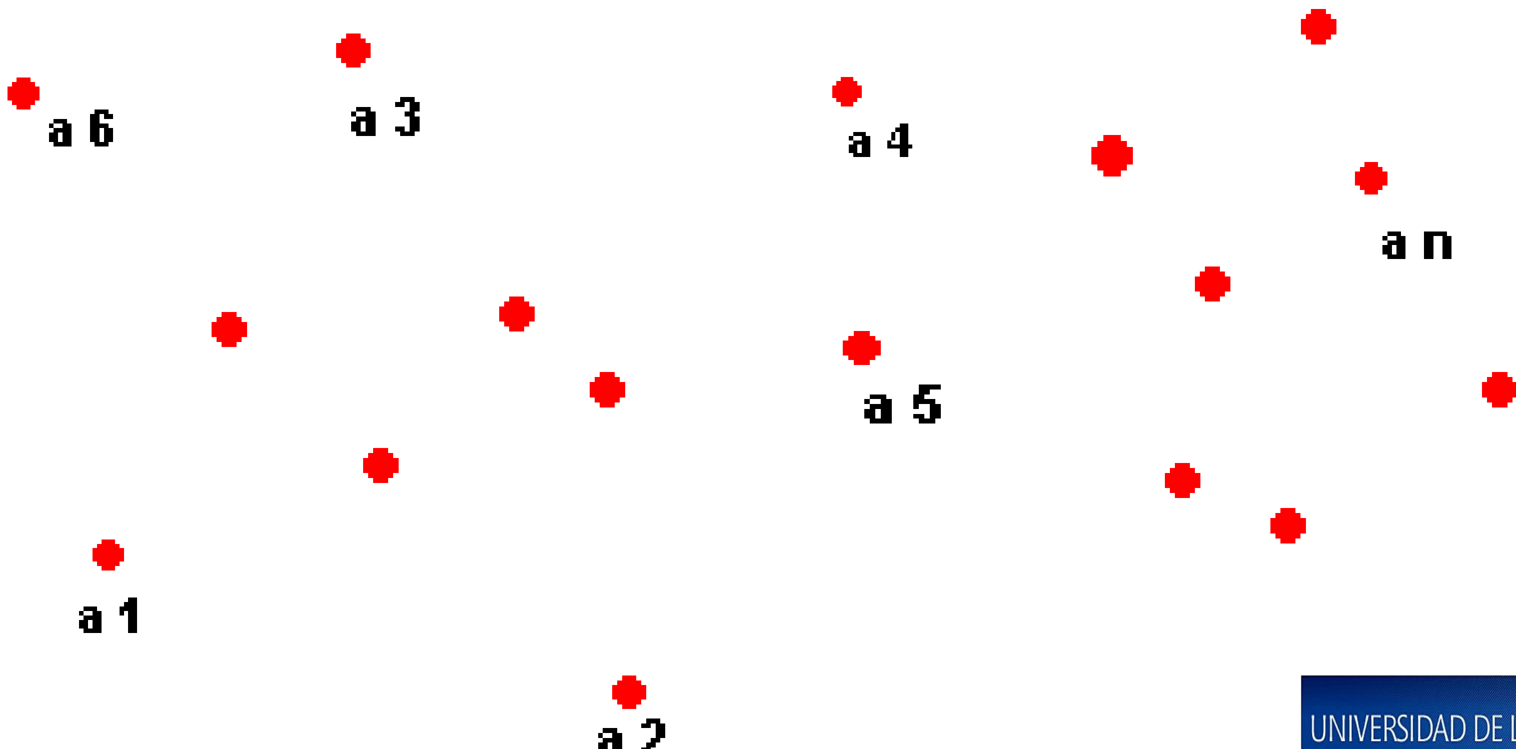
$$\mathbb{R}^q \quad a_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}, \ldots, x_{q,n})$$

EJEMPLO EN R2

$$a_n = \left(3 + \frac{1}{n}, \ \frac{2n^2}{n^2+1}\right)$$

Está dada con fórmulas en función de n.

No toda sucesión está dada con fórmulas.

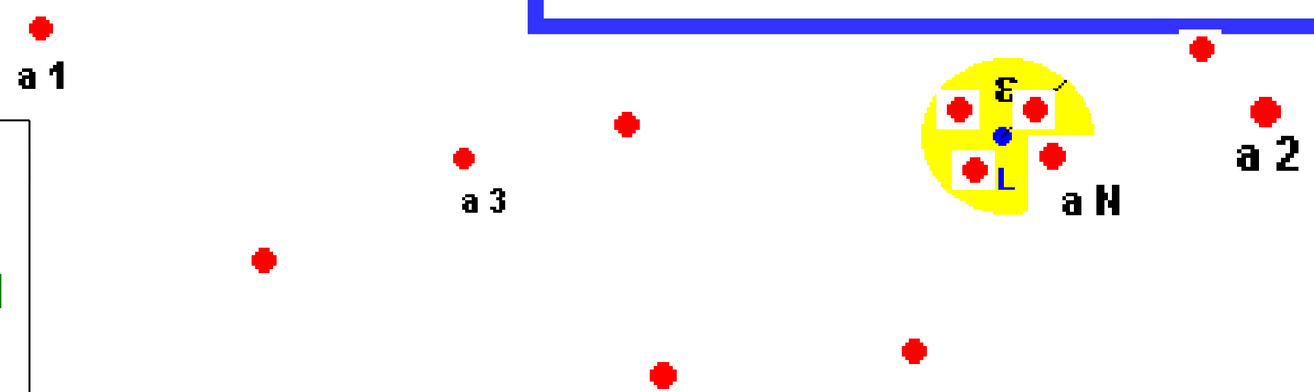


DEFINICIÓN: LÍMITE L de la sucesión a_n en Rq

$$\lim a_n = L, \qquad a_n \to L$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \text{ t.q.}$$

$$n \geq N \Rightarrow \|a_n - L\| < \epsilon$$



CONDICIONES EQUIVALENTES A LA DEFINICIÓN DE LÍMITE L

1 $\lim a_n = L$ en $\mathbb{R}^q \Leftrightarrow x_{i,n} \to L_i$ en $\mathbb{R}$ componente a componente

2 $\lim a_n = L$ en $\mathbb{R}^q \Leftrightarrow \lim \|a_n - L\| = 0$ en $\mathbb{R}$

Dem. 1

$$|x_{i,n} - L_i| \leq \sqrt{(x_{1,n} - L_1)^2 + \ldots + (x_{q,n} - L_q)^2} = \|a_n - L\|$$

$$|x_{i,n} - L_i| \leq \|a_n - L\| < \epsilon \quad \forall n > N$$

Recíproco de 1. $\Rightarrow \quad x_{i,n} \to L_i$

$$\|a_n - L\| = \sqrt{(x_{1,n} - L_1)^2 + \ldots + (x_{q,n} - L_q)^2} \to 0 \quad \square$$

Dem.2

$$\|a_n - L\| = \big|\|a_n - L\| - 0\big| < \epsilon \quad \forall n > N$$

$$\Leftrightarrow \quad \|a_n - L\| \to 0 \quad \square$$

CLASE 2 PARTE 2:
SUCESIONES DIVERGENTES Y ARITMÉTICA DE LÍMITES EN Rq

Bibliografía de la Clase2Parte2:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 04 y parágrafo 06 inicio.

Ejercicios para la Clase2Parte2:

•Práctico 1 del año 2006, ejercicios 2 Y 4

SUCESIÓN CONVERGENTE: QUE TIENE LÍMITE L EN Rq. Ejemplo:

$$\lim a_n = L = (3,2) \text{ pues } \left(3+\frac{1}{n}, \ \frac{2n^2}{n^2+1}\right) \to (3,2)$$

$$\|a_n - L\| = \sqrt{\left(3+\frac{1}{n}-3\right)^2 + \left(\frac{2n^2}{n^2+1}-2\right)^2}$$

$$\|a_n - L\| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{-2}{n^2+1}\right)^2} \to 0$$

SUCESIÓN NO CONVERGENTE: QUE NO TIENE LÍMITE L EN Rq. Ejemplos:

$$a_n = (1+(-1)^n, 1/n)$$

$$a_n = (1/n, n^2)$$

SUCESIÓN NO CONVERGENTE: **QUE NO TIENE LÍMITE L EN Rq.**

Puede ser DIVERGENTE (tiende a Infinito) o
OSCILANTE (no tiende a Infinito ni a L en Rq)

DEFINICIÓN:
SUCESIÓN DIVERGENTE
(que tiende a Infinito).

$$a_n \to \infty, \quad \lim a_n = \infty$$

$$\forall K > 0 \quad \exists N \text{ t. q. } n \geq N \Rightarrow \|a_n\| > K$$

SUCESIÓN DIVERGENTE: **QUE TIENDE A INFINITO. Ejemplos:**

$$a_n = (1/n, n^2)$$

$$a_n = (n(-1)^n, 1) \to \infty$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

SUCESIÓN OSCILANTE. Ejemplo:

$$a_n = (1 + (-1)^n, 1/n)$$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

1 $\lim a_n = L,\ \lim a_n = L' \ \Rightarrow L = L'$

2 $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^q \ \Rightarrow \{a_n\}$ es acotado

3 $\lim a_n = a,\ \lim b_n = b \ \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$

4 $\lim a_n = a,\ \lim \lambda_n = \lambda \ \Rightarrow \lim \lambda_n a_n = \lambda a$

Demostración de 2.

$$\lim a_n = L \Rightarrow ||a_n - L|| < \epsilon \ \forall n > N$$

$$||a_n - L|| \leq M \ \forall n = 0, 1, 2 \ldots, N$$

$$\Rightarrow ||a_n - L|| < K \ \ \forall n \ \ \Rightarrow \ \ a_n \in B_K(L) \ \square$$

CLASE 2 PARTE 3:
SUCESIONES DE CAUCHY EN Rq

Bibliografía de la Clase2Parte3:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 04.

Ejercicios para la Clase2Parte3:

•Práctico 1 del año 2006, ejercicios 2 y 4.

DEFINICIÓN: **Sucesión de Cauchy en Rq**

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \text{ t.q. } m \geq n \geq N \Rightarrow \|a_m - a_n\| < \epsilon$$

TEOREMA: Rq ES UN ESPACIO MÉTRICO COMPLETO
Es decir:
a_n convergente si y solo si a_n es de Cauchy

Demostración:

Directo:

$$a_n \to L \Rightarrow \forall \epsilon' > 0 \ \exists N \text{ t.q}$$

$$n \geq N \Rightarrow \|a_n - L\| < \epsilon' \quad \Rightarrow \quad \|a_m - a_n\| \leq \|a_m - L\| + \|a_n - L\| < 2\epsilon' = \epsilon$$

Recíproco: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \text{ t.q. } m \geq n \geq N \Rightarrow \|a_m - a_n\| < \epsilon \Rightarrow$

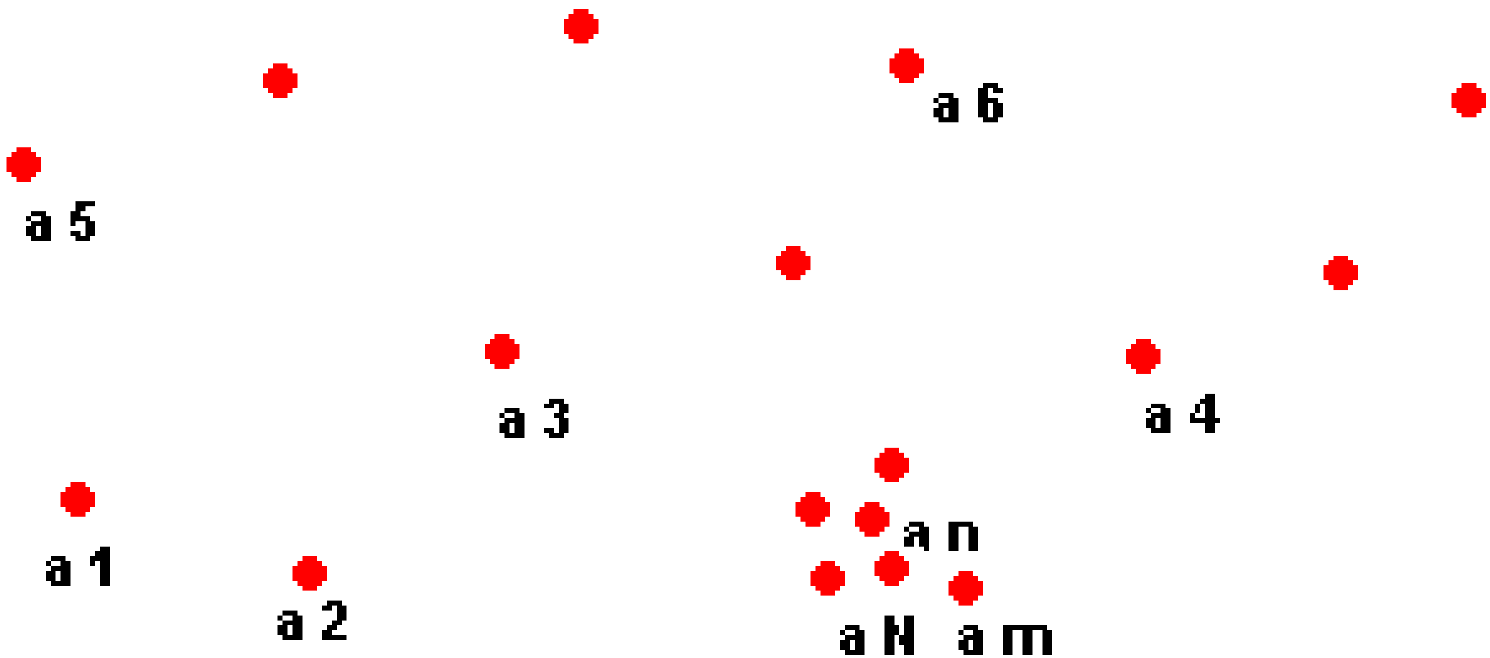
$$|x_{i,n} - x_{i,n}| \leq \|a_n - a_m\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad x_{i,n} \text{ es una sucesión de Cauchy en } \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \text{ es completo} \Rightarrow \exists L_i = \lim x_{i,n} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists L = (L_1, L_2, \ldots, L_q) \in \mathbb{R}^q \quad L = \lim a_n \quad \square$$

DEFINICIÓN: Sucesión de Cauchy en Rq

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \text{ t.q. } m \geq n \geq N \Rightarrow \|a_m - a_n\| < \epsilon$$



CLASE 3 PARTE 1:
SUBSUCESIONES

Bibliografía de la Clase3Parte1:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 04.

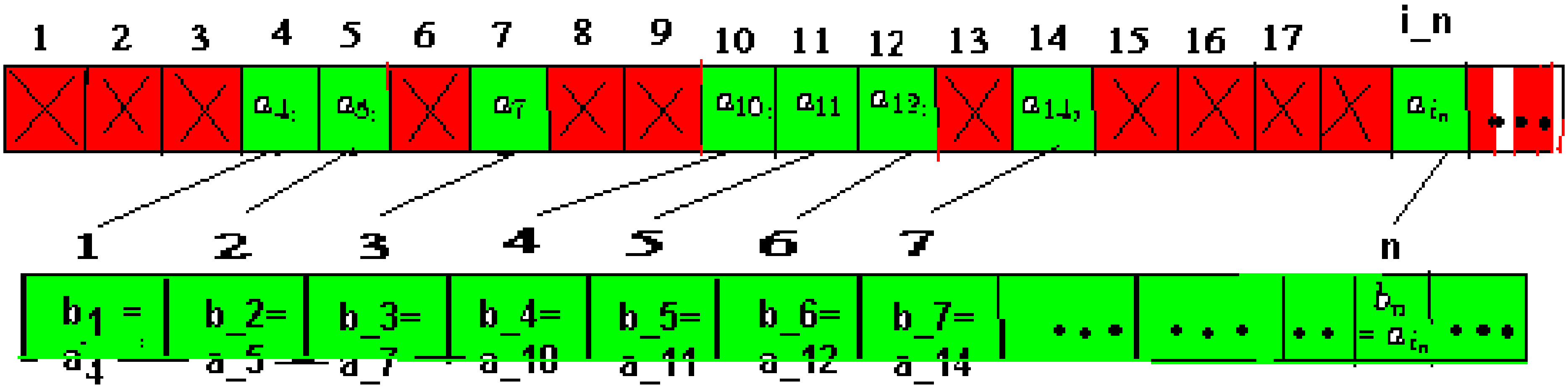
Ejercicios para la Clase3Parte1:

•Práctico 1 del año 2006, ejercicio 3

DEFINICIÓN: **Subsucesión** $b_n = a_{i_n}$ **de** a_n **es la que se obtiene seleccionando algunos términos de** a_n **(en infinitas posiciones) .**

$$b_n = a_{i_n}$$

$$i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < \dots < i_n < i_{n+1} < \dots$$



$$b_n = \{a_4, a_5, a_7, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{14}, \dots\}$$

EJEMPLOS DE SUBSUCESIONES:

$$b_n = a_{i_n} = a_{2n}$$

$$b_n = a_{i_n} = a_{2n+1}$$

$$b_n = a_{i_n} = \{a_3, a_8, a_{15}, a_{24}, a_{35}, \dots, a_{n^2-1}, \dots\}$$

TEOREMA: Si una sucesión converge con límite L, entonces toda subsucesión de ella converge al mismo límite L.

$$a_n \to L \quad \Rightarrow \quad b_n = a_{i_n} \to L$$

Dem.

$$\left.\begin{array}{r} \forall \epsilon > 0 \ \exists N \text{ t.q.} \\ n \geq N \ \Rightarrow \ \|a_n - L\| < \epsilon \\ b_n = a_{i_n} \quad n \geq M \ \Rightarrow i_n > N \end{array}\right\} \Rightarrow \|a_{i_n} - L\| < \epsilon \ \ \forall n \geq M$$

$\square$

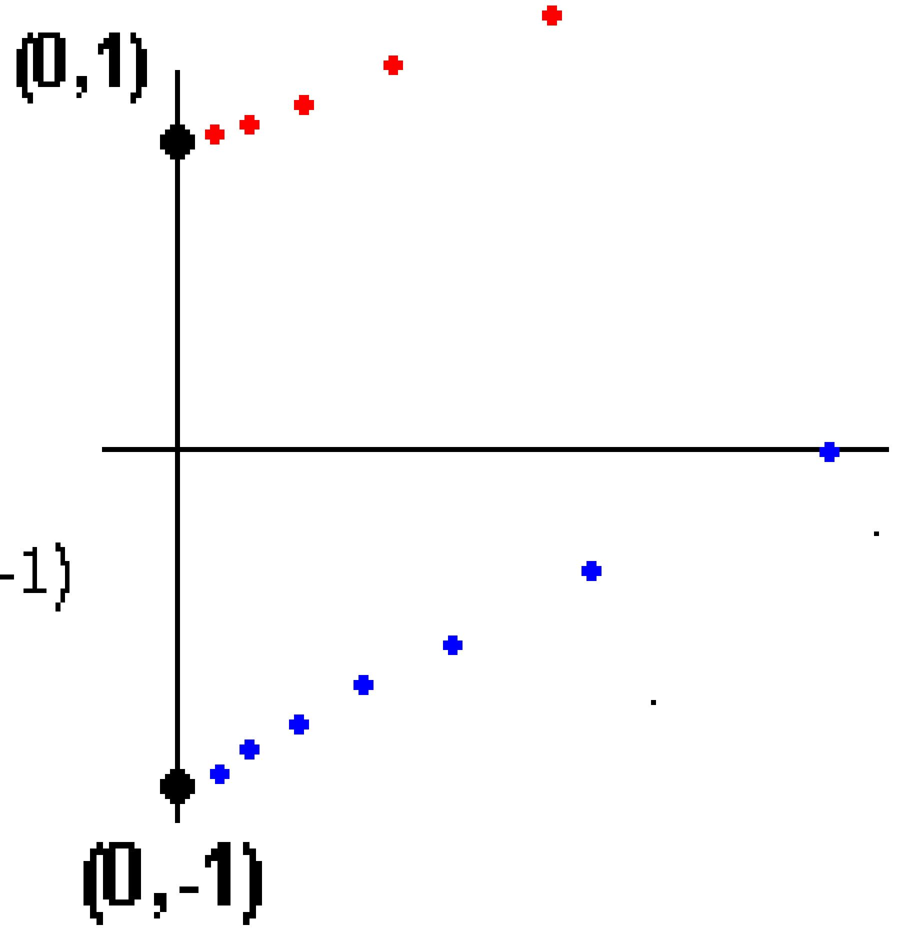
EJEMPLO:

$$a_n = \left(\frac{1}{n^2}, (-1)^n + \frac{1}{n} \right)$$

$$a_{2n} = \left(\frac{1}{(2n)^2}, 1 + \frac{1}{(2n)} \right) \to (0,1)$$

$$a_{2n+1} = \left(\frac{1}{(2n+1)^2}, -1 + \frac{1}{(2n+1)} \right) \to (0,-1)$$

$$(0,1) \neq (0,-1) \Rightarrow \nexists \lim a_n$$



CLASE 3 PARTE 2:
TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS PARA SUCESIONES.

Bibliografía de la Clase3Parte2:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 05.

TEOREMA BOLZANO-WEIERSTRASS PARA SUCESIONES

a_n acotada $\Rightarrow$ $\exists$ subsucesión a_{i_n} convergente.

Dem.

$$a_n = \left((x_1)_n, (x_2)_n, (x_3)_n, (x_4)_n, \dots, (x_q)_n\right)$$

$$\left.\begin{array}{c} a_n \text{ acotada} \Rightarrow a_n \in B_r(a)\ \forall n \Rightarrow \\ \|a_n - a\| \le r\ \forall n \Rightarrow \|a_n\| \le \|a\| + r = k\ \forall n \\ |(x_i)_n| \le \|a_n\| \le k\ \forall n \\ \Downarrow \\ (x_i)_n \text{ acotada en } \mathbb{R}\ \forall n \end{array}\right\} \quad (x_i)_n \text{ acotada en } \mathbb{R}\ \forall n$$

sigue dem.

$(x_i)_n$ acotada en $\mathbb{R}$ $\forall n$ $\Rightarrow$

- $\exists$ 1ª subsucesión $i_n = (1, n)$ tal que $(x_1)_{1,n} \to L_1$ en $\mathbb{R}$
- $\exists$ 2ª subsucesión $i_n = (2, n)$, subsucesión de la 1ª, tal que $(x_2)_{2,n} \to L_2$ en $\mathbb{R}$
- $\exists$ 3ª subsucesión $i_n = (3, n)$, subsucesión de la 2ª y de la 1ª, tal que $(x_3)_{3,n} \to L_3$ en $\mathbb{R}$
- $\exists$ qª subsucesión $i_n = (q, n)$, subsucesión de las anteriores, tal que $(x_i)_{q,n} \to L_q$ en $\mathbb{R}$

Para esta última subsucesión, converge a L_i la componente i-ésima. Luego converge a

$$L = (L_1, L_2, \dots, L_q)$$

la subsucesión a_{i_n} $\square$

CLASE 4 PARTE 1:
INTERIOR, EXTERIOR, FRONTERA Y CLAUSURA

Bibliografía de la Clase4Parte1:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 07.

Ejercicios para la Clase4Parte1:

•Práctico 1 del año 2006, ejercicioS 5 a 10

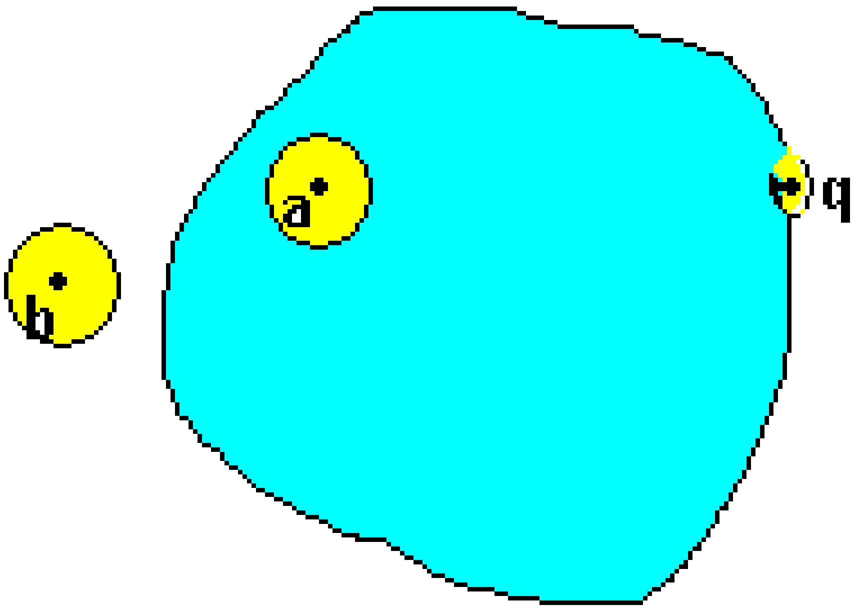
DEFINICIONES::

Interior de C $\quad a \in intC \iff \exists B_r(a) \subset C$

Exterior de C $\quad b \in extC \iff \exists B_r(b) \subset C^c$

Frontera de C $\quad q \in \partial C \iff \forall B_r(q) : \ B_r(q)$ intersecta C y C^c

Clausura o Adherencia de C $\quad \overline{C} = intC \cup \partial C$



OBSERVACIONES:

$a \in intC \Rightarrow a \in C$

$p \in C \mapsto p$ puede ser o no ser interior a C

$q \in C,\ q \notin intC \Rightarrow q \in \partial C$

$b \in extC \Rightarrow b \notin C$

$p \notin C \mapsto p$ puede ser o no ser exterior a C

$q \notin C,\ q \notin ext\mathbf{C} \Rightarrow q \in \partial C$

$q \in \partial C \mapsto q$ puede ser o no ser perteneciente a C

CLASE 4 PARTE 2:
ABIERTOS Y CERRADOS

Bibliografía de la Clase4Parte2:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 07.

Ejercicios para la Clase4Parte2:

•Práctico 1 del año 2006, ejercicioS 5 a 10

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

DEFINICIONES:

C es un conjunto ABIERTO si intC=C

C es un conjunto CERRADO si $\overline{C}$ =C

o lo que es lo mismo si el complemento de C es abierto.

Importante: Un conjunto puede no ser abierto ni cerrado.

ABIERTO: Si y solo si no contiene a ninguno de sus puntos frontera.

CERRADO: Si y solo si contiene a todos sus puntos frontera.

NI ABIERTO NI CERRADO: Contiene a algunos pero no todos sus puntos frontera.

ABIERTO Y CERRADO A LA VEZ: Su frontera es vacía. Solo son el conjunto vacío o todo Rq.

TEOREMA: Sucesiones convergentes en conjuntos cerrados

$$a_n \in C, \quad \lim a_n = L \in \mathbb{R}^q$$

$$C \text{ cerrado} \Rightarrow L \in C$$

Dem.

Por absurdo, si L no perteneciera a C, como C es cerrado L pertenecería al exterior de C.

Existe una bola de centro L y radio epsilon >0 que no corta a C.

Entonces ningún elemento de a_n pertenece a esa bola.

Por lo tanto límite de a_n no es L. Absurdo. $\square$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE 4 PARTE 3:
UNIONES E INTERSECCIONES DE ABIERTOS Y CERRADOS

Bibliografía de la Clase4Parte3:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 07.

Ejercicios para la Clase4Parte3:

•Práctico 1 del año 2006, ejercicioS 5 a 10

TEOREMA 1.

La unión (finita o infinita) de conjuntos abiertos es abierta.

La intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.

TEOREMA 2.

La intersección (finita o infinita) de conjuntos cerrados es cerrada.

La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

Observación:

La intersección infinita de conjuntos abiertos puede ser o no ser abierta. En el siguiente ejemplo no es abierta:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(a) = \{a\} \text{ no es abierto}$$

Observación:

La unión infinita de conjuntos cerrados puede ser o no ser cerrada. En el siguiente ejemplo no es cerrada:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_{2-1/n}(a)} = B_2(a) \text{ no es cerrado}$$

Dem. Teorema 1.
Primera parte:

Unión cualquiera de abiertos

$$p \in \bigcup_t U_t \iff p \in U_t \text{ para algún } t$$

$$U_t \text{ abierto} \iff \forall p \in U_t \quad \exists B_r(p) \subset U_t$$

$$\Rightarrow \quad \forall p \in \bigcup_t U_t \quad \exists B_r(p) \subset U_t \subset \bigcup_t U_t$$

$$\Rightarrow \quad \bigcup_t U_t \text{ abierto.} \quad \square$$

Dem. Teorema 2.
Segunda parte:

Intersección finita de abiertos

$$p \in \bigcap_{n=1}^{N} U_n \iff p \in U_n \ \forall n = 1, 2, \ldots, N$$

$$U_n \text{ abierto} \iff \forall p \in U_n \quad \exists B_{r_n}(p) \subset U_n$$

$$\text{Elijo } 0 < r \leq r_n \quad \forall n = 1, 2 \ldots, N$$

$$B_r(p) \subset U_n \quad \forall n = 1, 2 \ldots, N \quad \Rightarrow B_r(p) \subset \bigcap_{n=1}^{N} U_n$$

$$\Rightarrow \quad \forall p \in \bigcap_{n=1}^{N} U_n \quad \exists B_r(p) \subset \bigcap_{n=1}^{N} U_n$$

$$\Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{N} U_n \text{ abierto.} \quad \square$$

Dem. Teorema 2. Primera parte:

Intersección cualquiera de cerrados

$$C \text{ cerrado} \Leftrightarrow C^c \text{ abierto}$$

$$\left(\bigcap_i C_i\right)^c = \bigcup_i C_i^c \text{ abierto}$$

$$\Rightarrow \bigcap_i C_i \text{ cerrado.} \quad \square$$

Dem. Teorema 1. Segunda parte:

Unión finita de cerrados

$$C \text{ cerrado} \Leftrightarrow C^c \text{ abierto}$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{N} C_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{N} C_n^c \text{ abierto}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{N} C_n \text{ cerrado.} \quad \square$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

CLASE 4 PARTE 4:
CONJUNTOS COMPACTOS

Bibliografía de la Clase4Parte4:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 08.

Ejercicios para la Clase4Parte4:

•Práctico 1 del año 2006, ejercicioS 11 Y 12

DEFINICIÓN: Un conjunto de Rq se dice **COMPACTO** si es **CERRADO y ACOTADO.** (1)

TEOREMA: Sucesiones en compactos de Rq.
Toda sucesión de puntos de un compacto contiene alguna subsucesión convergente a un límite que pertenece al compacto.

Dem.

- C compacto $\Rightarrow$ C acotado $\Rightarrow$ La sucesión tiene una subsucesión convergente a un límite L en Rq.

- C compacto $\Rightarrow$ C cerrado $\Rightarrow$ La subsucesión convergente a L es tal que L pertenece a C.

$\square$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

DEFINICIÓN: Un conjunto de Rq se dice **COMPACTO** si es **CERRADO y ACOTADO.** (1)

CUBRIMIENTO $\mathcal{V}$ **de C:**

Colección de abiertos cuya unión contiene a C.

SUBCUBRIMIENTO de :

Otro cubrimiento de C que se obtiene tomando algunos pero no necesariamente todos los abiertos de

$$\mathcal{V}$$

TEOREMA:

Cubrimientos de compactos.

Si K es compacto entonces todo cubrimiento de K por abiertos contiene algún subcubrimiento **finito.**

Dem.

$$\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_j, \ldots\}$$

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots$$

A probar: $\bigcup_{j=1}^{N} V_j \supset K$

Por absurdo, suponemos que

$$a_n \in K, \quad a_n \notin \bigcup_{j=1}^{n} V_j$$

$$a_n \to a \in K, \quad a \in V_{j_0} \text{ para algún } j_0$$

$$a_n \in V_{j_0} \ \forall n \geq N \geq j_0 \Longrightarrow$$

$$a_n \in V_{j_0} \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_j \text{ absurdo.} \quad \square$$

CLASE 5 PARTE 1:
PUNTOS DE ACUMULACIÓN

Bibliografía de la Clase5Parte1:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.1, parágrafo 09.

Ejercicios para la Clase5Parte1:

•Práctico 1 del año 2006, ejercicioS 5 a 12

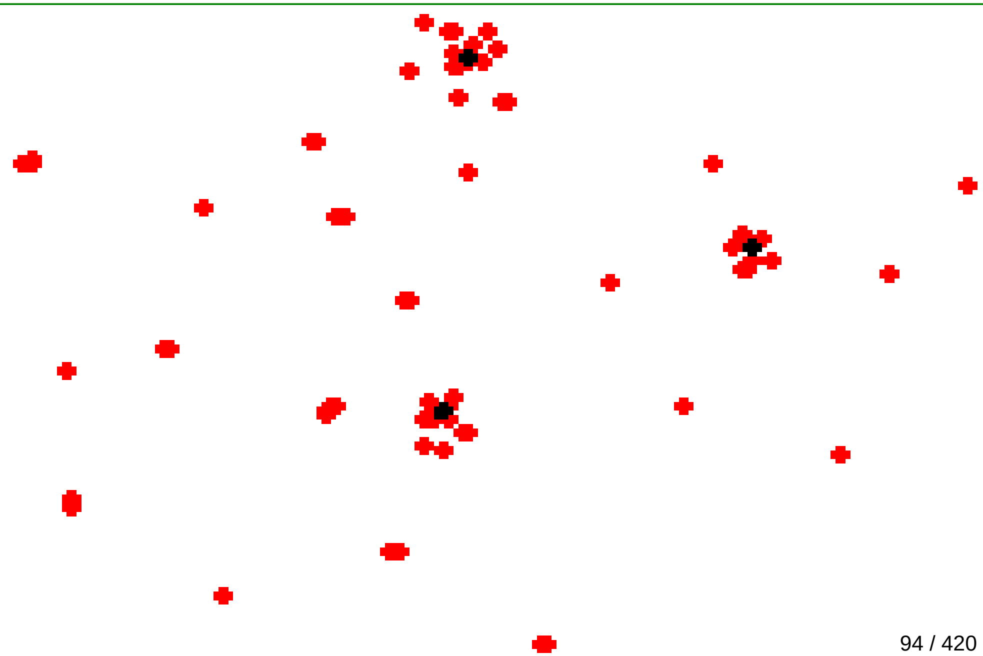
DEFINICIÓN: a es un punto de acumulación del conjunto $C \subset \mathbb{R}^q$ si en todo entorno de a existen infinitos puntos de C.

$$\boxed{\exists\, a_n \in C \setminus \{a\} \text{ t.q. } \lim a_n = a}$$

$$\text{Elijo } a_n \neq a \text{ t.q. } a_n \in B_{1/n}(a) \cap C$$

$$\Rightarrow \lim a_n = a$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



OBSERVACIÓN:
El o los puntos de acumulación de C
No tienen necesariamente que pertenecer a C.

NOTACIÓN:
C' = el conjunto de puntos de acumulación de C

TEOREMA de BOLZANO-WEIERSTRASS para CONJUNTOS:
Si C es un conjunto infinito y acotado entonces existe algún punto de acumulación de C.

Dem.

$$C \text{ infinito} \Rightarrow \exists a_n \in C$$

de elementos todos diferentes entre sí

$$C \text{ acotado}, \quad a_n \in C \Rightarrow$$

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones

$$\Rightarrow \exists \text{ subsucesión } a_{i_n} \to a \in \mathbb{R}^q$$

a es un punto de acumulación de C $\square$

CLASE 6 PARTE 1:
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Bibliografía de la Clase6Parte1:

- **Ernesto Mordecki: Funciones de Rn a R. Desde el principio hasta la sección 1 excluida.**
- **Courant: Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Volumen 2. capítulo 1, sección 1.2**

Ejercicios para las clase 6

- **Práctico 2 del año 2006, ejercicios 1 y 2**

Función real: si el codominio (donde toma valores f) está contenido en los reales. $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$

Función vectorial: si el codominio está contenido en $\mathbb{R}^s$ con s >1. $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$

Función de varias variables reales: q > 1

$$p = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

$$f(p) = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

$$p = \mathbf{x} = (x, y, z)$$

$$f(p) = f(\mathbf{x}) = f(x, y, z)$$

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$p = \mathbf{x} = (x, y)$$

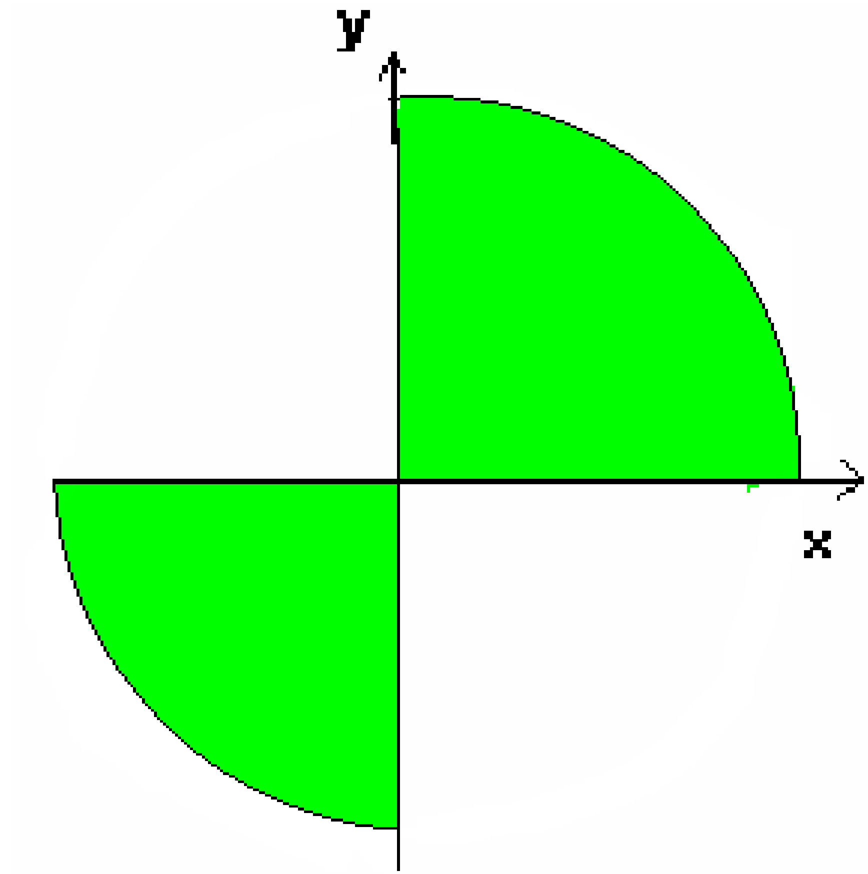
$$f(p) = f(\mathbf{x}) = f(x, y)$$

Ejemplo: Función real de dos variables.

$$z = f(x, y)$$

$$z = \frac{L(xy)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Dominio D



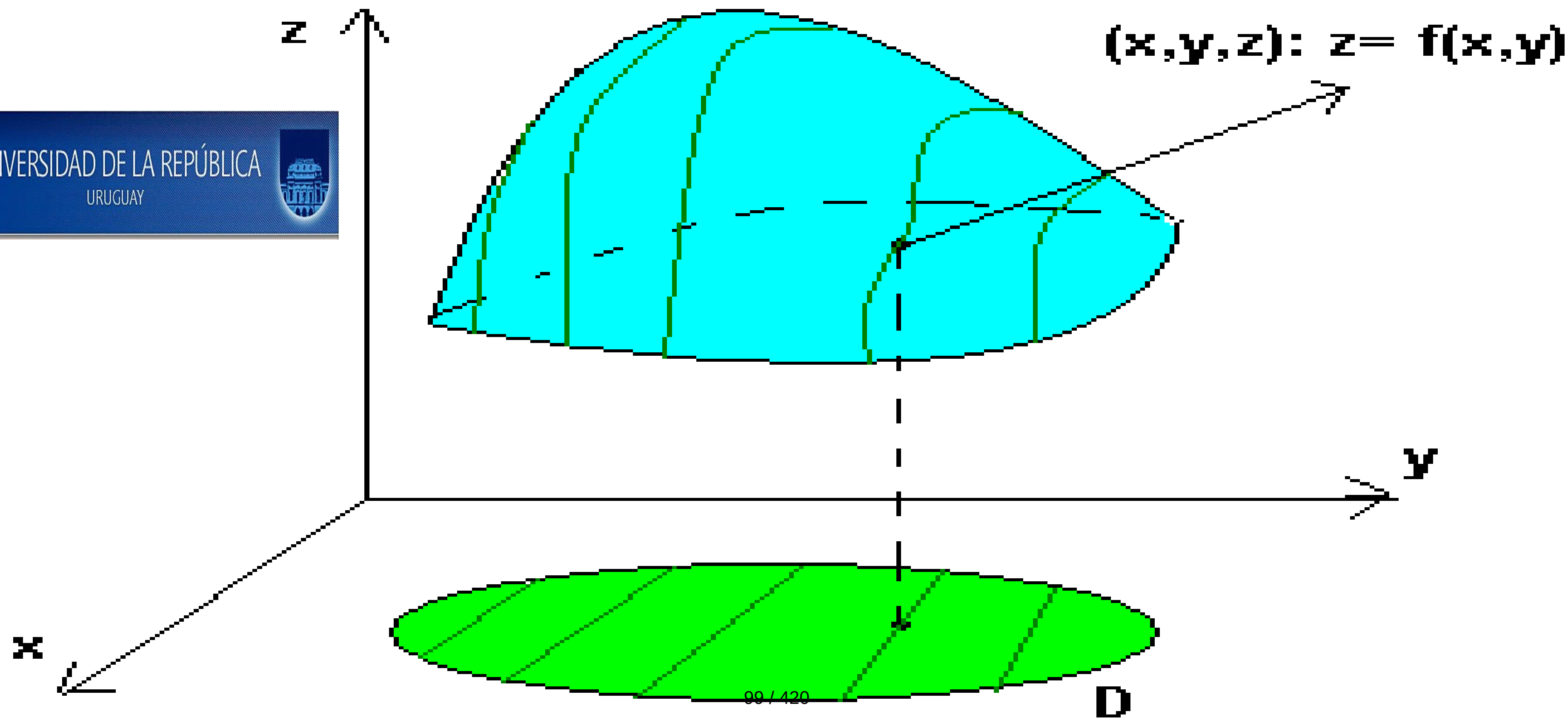
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad xy > 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$$

SUPERFICIE GRÁFICA de FUNCIÓN REAL de 2 VARIABLES

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}: \qquad z = f(x, y)$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}$$



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE 6 PARTE 2:
CURVAS DE NIVEL

Bibliografía de la Clase6:

- **Ernesto Mordecki: Funciones de Rn a R. Desde el principio hasta la sección 1 excluida.**
- **Courant: Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Volumen 2. capítulo 1, sección 1.2**

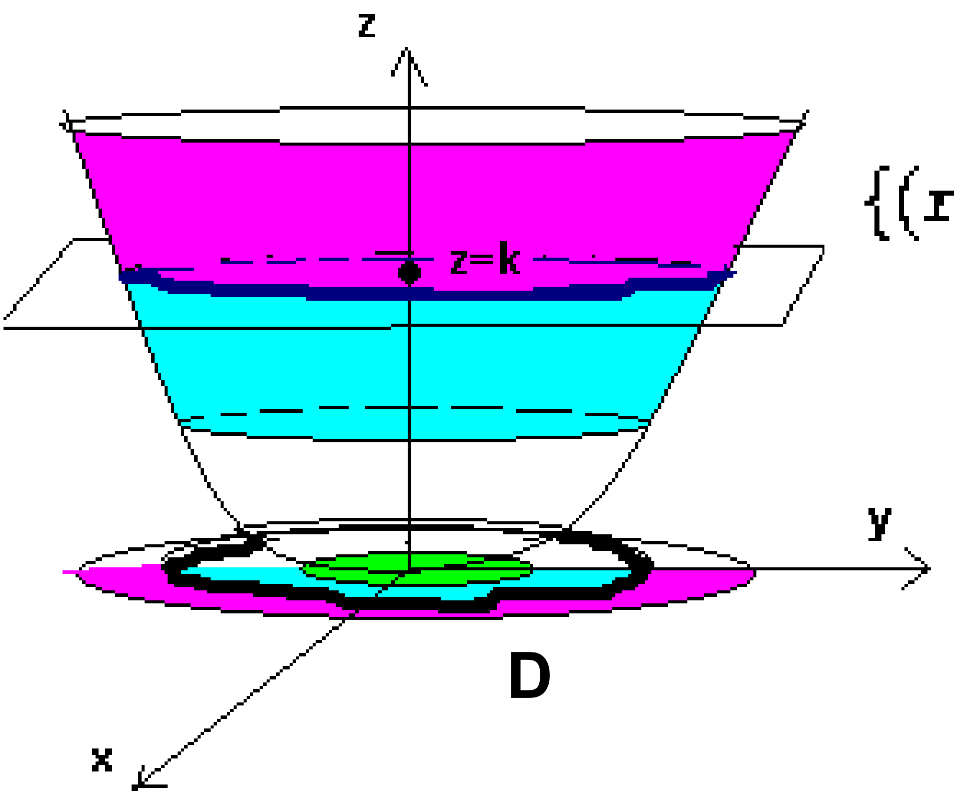
Ejercicios para las clase 6

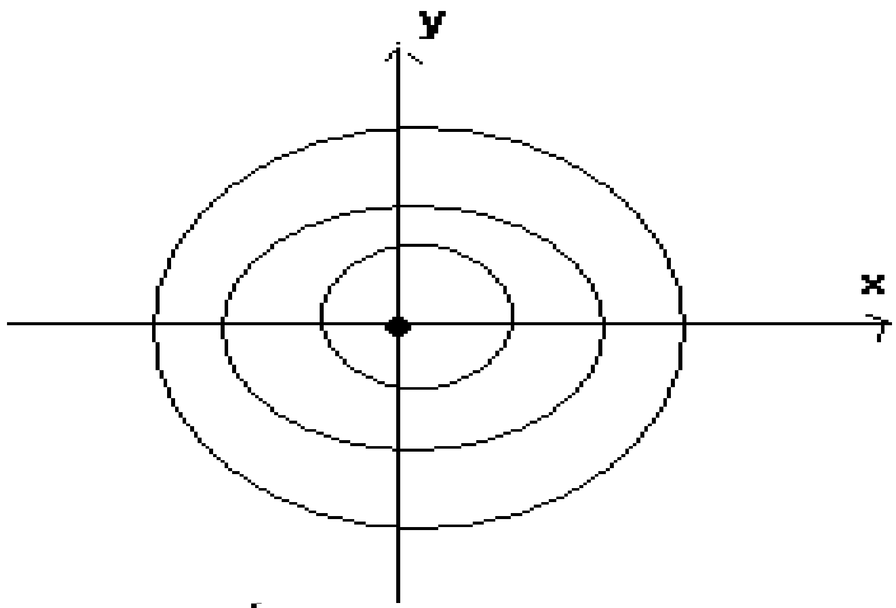
- **Práctico 2 del año 2006, ejercicios 1 y 2**

$$z = x^2 + y^2$$

CURVAS DE NIVEL:
Lugar de puntos en el plano dentro del dominio D tales que f(x,y) = k

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k\} \quad k \text{ cte.}$$





$k > 0: \quad x^2 + y^2 = k$ cfa. de radio $\sqrt{k}$

$k = 0: \quad x^2 + y^2 = 0$ punto $(0,0)$

$k < 0: \quad x^2 + y^2 = k$ es el conjunto vacío.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE 6 PARTE 3:
FUNCIONES VECTORIALES

Bibliografía de la Clase6:

•Ernesto Mordecki: Funciones de Rn a R. Desde el principio hasta la sección 1 excluida.
•Courant: Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Volumen 2. capítulo 1, sección 1.2

Ejercicios para las clase 6

•Práctico 2 del año 2006, ejercicios 1 y 2

$$\boxed{f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^r}$$

$$p = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q)$$

$$f(p) = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^r$$

$$f(p) = (f_1(p), f_2(p), \ldots, f_r(p)) \in \mathbb{R}^r$$

$$f(p) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_q), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_q), \ldots, f_r(x_1, x_2, \ldots, x_q))$$

EJEMPLO: $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$f(p) = f(x, y) = (\underbrace{x^2 y}_{f_1(x,y)}, \underbrace{x + y + xy}_{f_2(x,y)}, \underbrace{x e^{x+y}}_{f_3(x,y)})$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

CLASE 6 PARTE 4:
CONJUNTOS IMAGEN Y PREIMAGEN
FUNCIONES ACOTADAS

Bibliografía de la Clase6:

•Ernesto Mordecki: Funciones de Rn a R. Desde el principio hasta la sección 1 excluida.
•Courant: Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Volumen 2. capítulo 1, sección 1.2

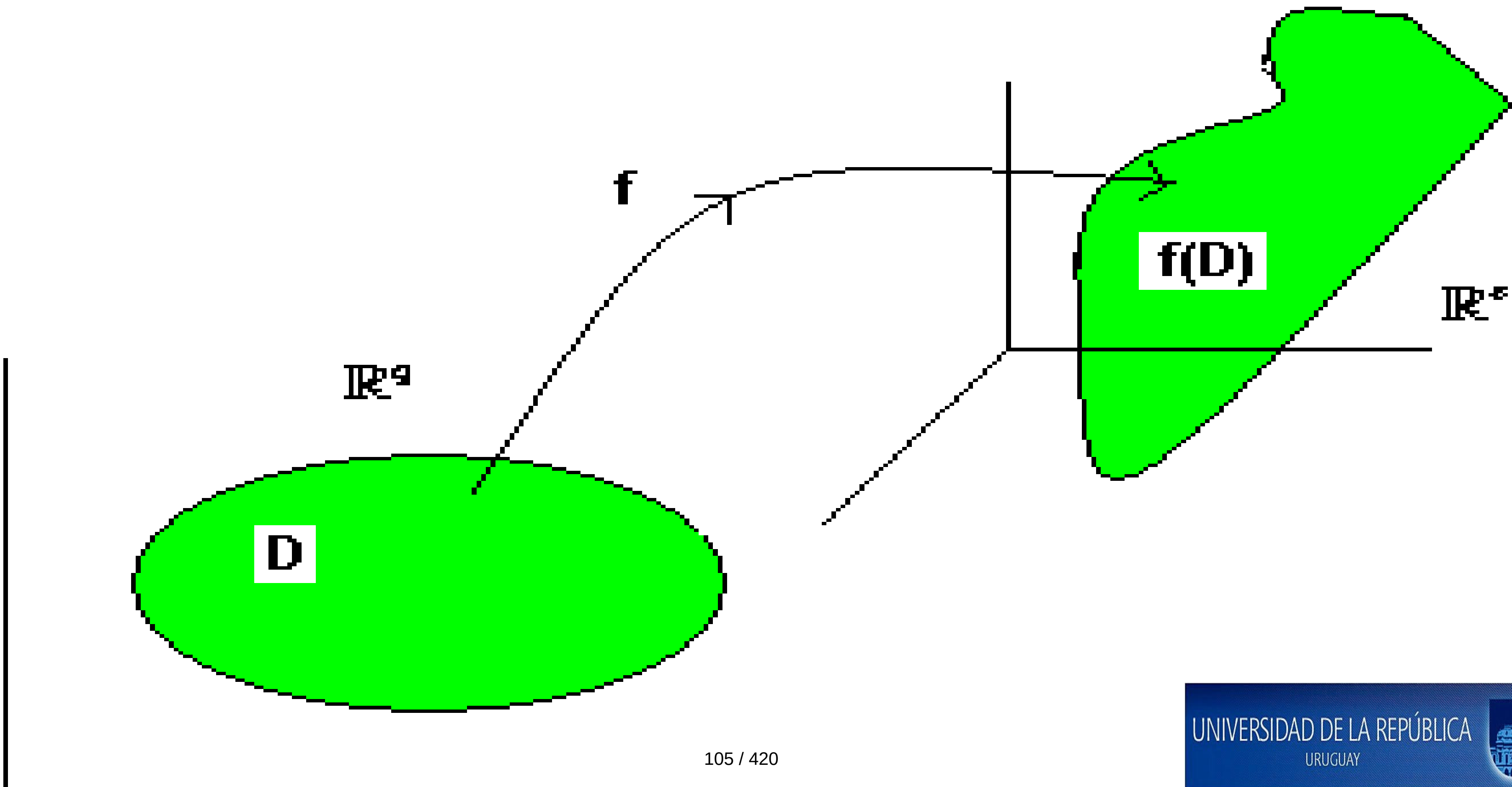
Ejercicios para las clase 6

•Práctico 2 del año 2006, ejercicios 1 y 2

Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^r$

CONJUNTO IMAGEN es

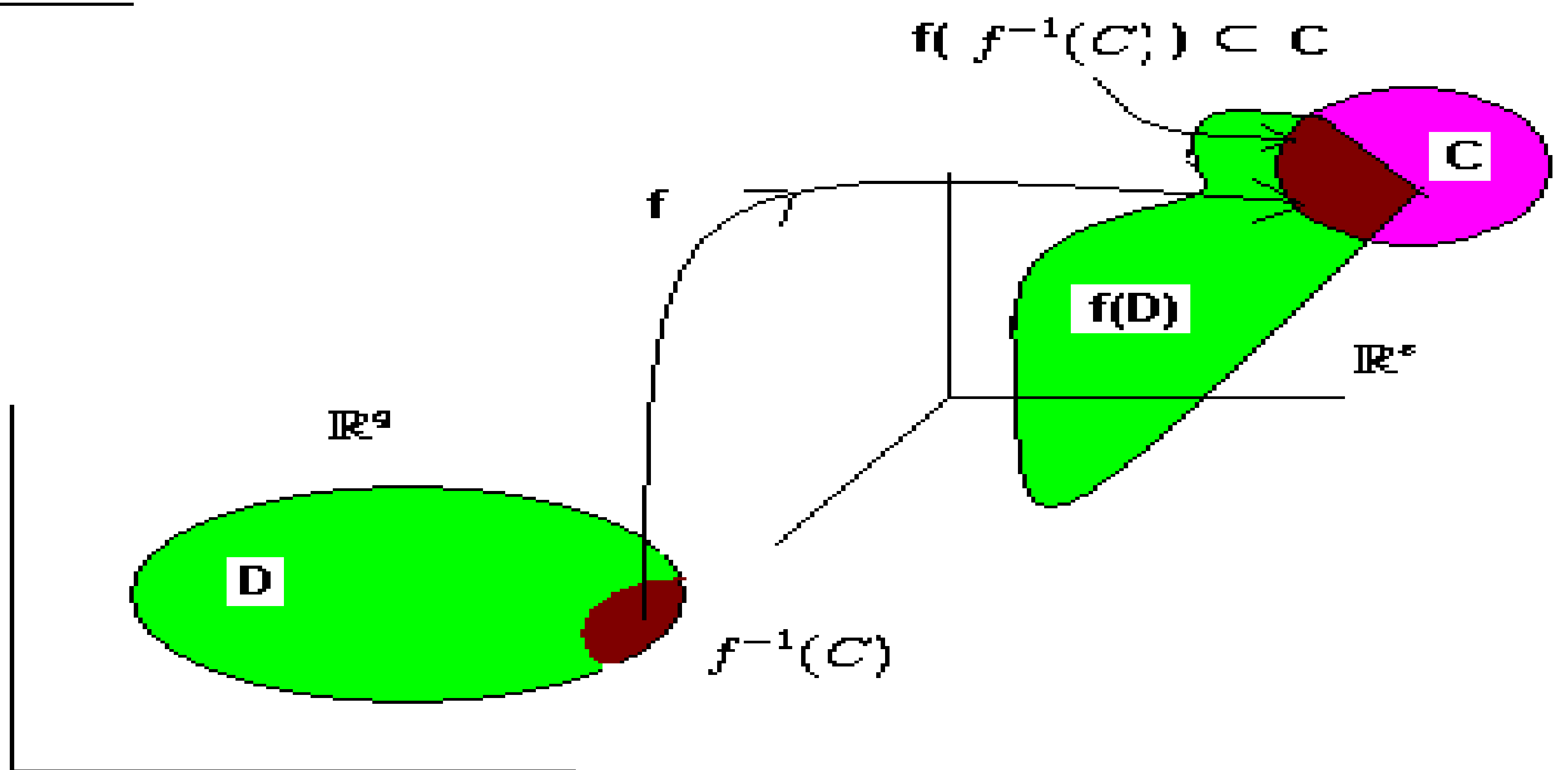
$$f(D) = \{y \in \mathbb{R}^r : y = f(x) \text{ para algún } x \in D\}$$



Dado un conjunto C contenido en el codominio

CONJUNTO PREIMAGEN de C es

$$f^{-1}(C) = \{\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^q : \ f(\mathbf{x} \in C \}$$



DEFINICIÓN: Una función real $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$ es acotada si

$$|f(\mathbf{x})| < K \quad \forall \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^q$$

DEFINICIÓN: Una función $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^p$ es acotada si

$$\|f(\mathbf{x})\| < K \quad \forall \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^q$$

OBSERVACIÓN: La función es acotada si y solo si el conjunto imagen es acotado.

$$\|f(\mathbf{x})\| < K \quad \forall \mathbf{x} \in D \quad \Leftrightarrow$$

$$f(D) \subset B_K(0) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(D) \text{ es un conjunto acotado de } \mathbb{R}^p$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE 7 PARTE 1:
LÍMITES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Bibliografía de la Clase7:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.2, parágrafos 11, 12 y 13.**

Ejercicios para las clase 7

- **Práctico 2 del año 2006, ejercicios 3 a 11**

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^r$$

$$p = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_q) \in D$$

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_q) \in D'$$

DEFINICIÓN: Se dice que

$$\lim_{p \to a} f(p) = L \in \mathbb{R}^r, \quad f(p) \to_{p \to a} L \in \mathbb{R}^r$$

cuando

$$\boxed{\begin{gathered} \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t. q.} \\ p \in D, \ \underbrace{0 < \|p - a\| < \delta}_{p \in B_\delta^*(a)} \Rightarrow \underbrace{\|f(p) - L\| < \epsilon}_{f(p) \in B_\epsilon(L)} \end{gathered}}$$

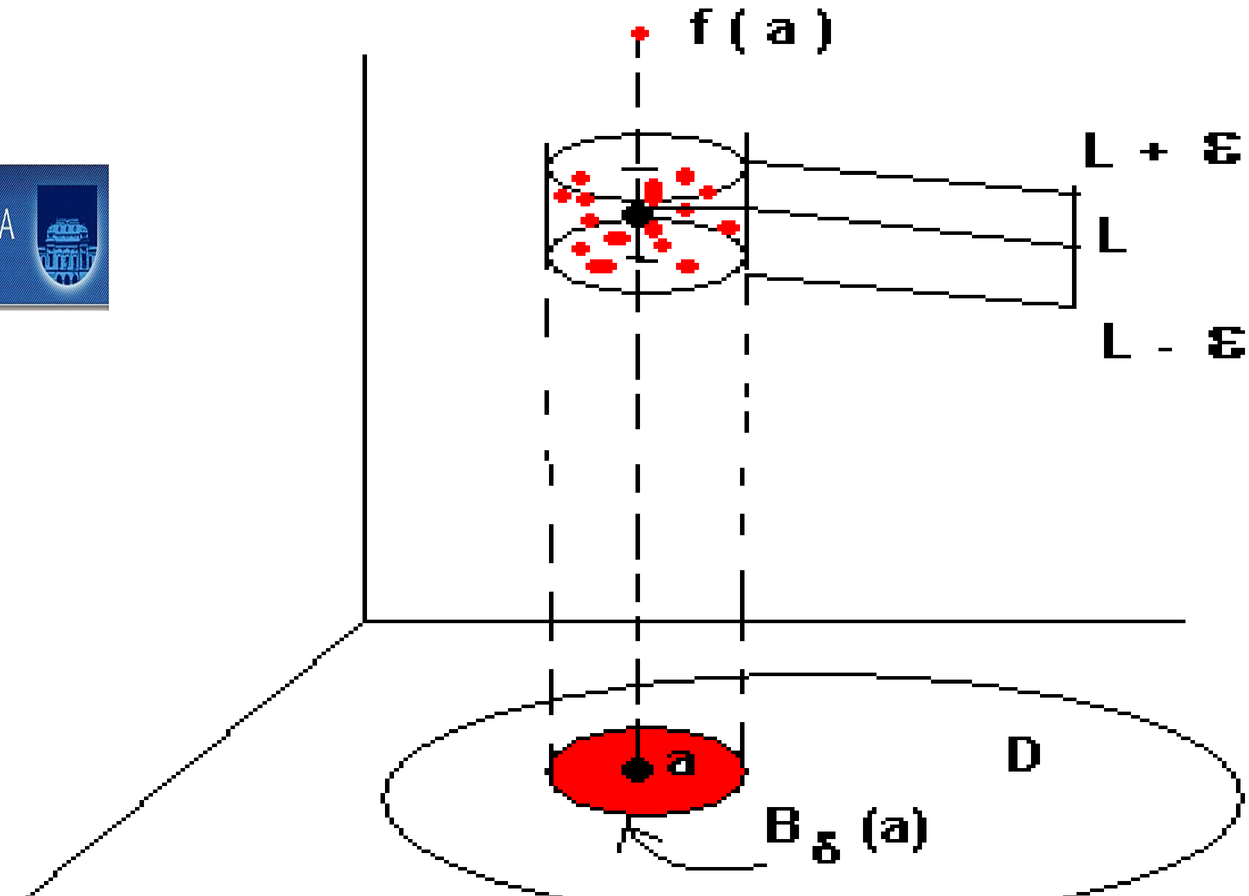
Nota: Bola reducida de centro a, radio delta, es la bola abierta sin su centro a:

$$B_\delta^*(a) = B_\delta(a) \setminus \{a\}$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t. q.}$$

$$p \in D, \ \underbrace{0 < \|p - a\| < \delta}_{p \in B_\delta(a)} \Rightarrow \underbrace{\|f(p) - L\| < \epsilon}_{f(p) \in B_\epsilon(L)}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



EJEMPLO. Probar que existe y es igual a cero el siguiente Límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

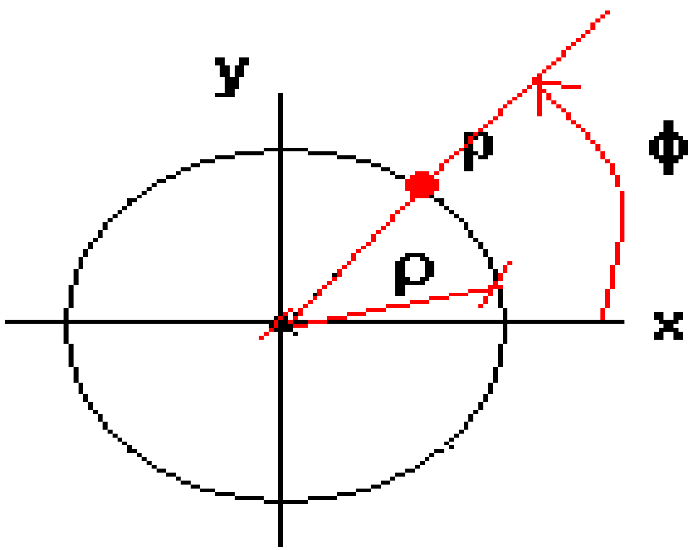
$$¿(x,y) \in B^*_\delta((0,0)) \Rightarrow \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| < \epsilon?$$

COORDENADAS POLARES: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$(x,y) \neq (0,0)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

$$x = \rho\cos\varphi, \; y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$



$$¿(x,y) \in B_\delta((0,0)) \Rightarrow \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| < \epsilon?$$

$$(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$xy^2 = \rho^3 \cos\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

$$¿\rho < \delta \Rightarrow \left|\frac{\rho^3\cos\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi}{\rho^2}\right| < \epsilon?$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\rho < \delta \Rightarrow \rho\left|\cos\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right| \leq \rho \cdot 1 < \delta = \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \text{ elijo } \delta = \epsilon \quad \square$$

CLASE 7 PARTE 2:
LÍMITE DE FUNCIONES
COMO LÍMITE DE SUCESIONES

Bibliografía de la Clase7:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.2, parágrafos 11, 12 y 13.

Ejercicios para las clase 7

•Práctico 2 del año 2006, ejercicios 3 a 11

Recordemos la definición de límite de una función:

Se dice que $\lim_{p \to a} f(p) = L \in \mathbb{R}^{c}, \quad f(p) \to_{p \to a} L \in \mathbb{R}^{c}$

cuando

$$\boxed{\begin{gathered} \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t. q.} \\ p \in D, \ \underbrace{0 < \|p - a\| < \delta}_{p \in B^*_\delta(a)} \Rightarrow \underbrace{\|f(p) - L\| < \epsilon}_{f(p) \in B_\epsilon(L)} \end{gathered}}$$

TEOREMA: Límite de funciones como límite de sucesiones.

$$\lim_{p \to a} f(p) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall a_n \in D \text{ t.q. } a_n \to a, \ a_n \neq a$$

$$\text{se cumple: } f(a_n) \to L$$

Dem. Directo

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.q.}$$
$$p \in D, 0 < ||p - a|| < \delta \ \Rightarrow \ ||f(p) - L|| < \epsilon \qquad (1)$$

$$a_n \in D, \ a_n \neq a, \ a_n \to a \ \Rightarrow$$
$$\exists N \text{ t.q. } n \geq N \ \Rightarrow \ 0 < ||a_n - a|| < \delta, \ a_n \in D \qquad (2)$$

$(2), (1) \Rightarrow$

$$n \geq N \ \Rightarrow \ 0 < ||a_n - a|| < \delta, \ a_n \in D \ \Rightarrow \ ||f(a_n) - L|| < \epsilon$$

Hemos probado que

$$\left.\begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \ \exists N \text{ t.q.} \\ n \geq N \ \Rightarrow \ ||f(a_n) - L|| < \epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \ \lim f(a_n) = L$$

$\square$

Dem. Recíproco Por absurdo, si

$$\lim_{p \to a} f(p) \neq L$$

$\exists \epsilon_0 > 0$ t.q. $\forall \delta > 0$, en particular $\delta = 1/n$ se cumple:

$$\exists a_n \in D,\ 0 < \|a_n - a\| < 1/n,\ \ \|f(a_n) - L\| \geq \epsilon_0 > 0 \quad (3)$$

Lo anterior se obtiene NEGANDO la definición de límite de f igual a L.

$$a_n \in D,\ 0 < \|a_n - a\| < 1/n \ \Rightarrow\ a_n \in D,\ a_n \neq a,\ a_n \to a$$

Hipótesis $\quad f(a_n) \to L \quad (4)$

$$(3), (4) \ \Rightarrow$$

$$\|L - L\| \geq \epsilon_0 > 0 \ \Rightarrow\ 0 > 0 \text{ absurdo.} \quad \square$$

CLASE 7 PARTE 3:
LÍMITE INFINITO Y
LÍMITE CUANDO P TIENDE A INFINITO

Bibliografía de la Clase7:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.2, parágrafos 11, 12 y 13.**

Ejercicios para las clase 7

- **Práctico 2 del año 2006, ejercicios 3 a 11**

1 **Vimos la Definición de Límite L en Rs Cuando p tiende a a en Rq:**

$$\lim_{p \to a \in \mathbb{R}^q} f(p) = L \in \mathbb{R}^s \qquad f(p) \longrightarrow_{p \to a} = L$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.q.}$$

$$p \in D,\ 0 < ||p - a|| < \delta \Rightarrow ||f(p) - L|| < \epsilon$$

---

2 **DEFINICIÓN: Límite Infinito cuando p tiende a a en Rq**

$$\lim_{p \to a \in \mathbb{R}^q} f(p) = \infty \notin \mathbb{R}^s \qquad f(p) \longrightarrow_{p \to a} = \infty$$

$$\forall K > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.q.}$$

$$p \in D,\ 0 < ||p - a|| < \delta \Rightarrow ||f(p)|| > K$$

3 DEFINICIÓN: Límite L en Rs cuando p tiende a infinito.

$$\lim_{p \to \infty} f(p) = L \in \mathbb{R}^s \qquad f(p) \longrightarrow_{p \to \infty} = L$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists H > 0 \text{ t.q.}$$

$$p \in D, \; \|p\| > H \; \Rightarrow \; \|f(p) - L\| < \epsilon$$

---

4 DEFINICIÓN: Límite infinito cuando p tiende a infinito.

$$\lim_{p \to \infty} f(p) = \infty \qquad f(p) \longrightarrow_{p \to \infty} = \infty$$

$$\forall K > 0 \; \exists H > 0 \text{ t.q.}$$

$$p \in D, \; \|p\| > H \; \Rightarrow \; \|f(p)\| > K$$

CLASE 7 PARTE 4: PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE FUNCIONES

Bibliografía de la Clase7:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.2, parágrafos 11, 12 y 13.**

Ejercicios para las clase 7

- **Práctico 2 del año 2006, ejercicios 3 a 11**

1. UNICIDAD DEL LÍMITE:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{p\to a} f(p) &= L\\ \lim_{p\to a} f(p) &= L'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad L = L'$$

2. Si el límite L existe en Rs entonces la función es acotada en un entorno de a.

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{p\to a} f(p) = L \in \mathbb{R}^s\\ \Rightarrow\ & f \text{ acotada en } B_\delta(a)\cap D\end{aligned}}$$

3. Límite de funciones Vectoriales

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$$

$$\left.\begin{aligned}&f(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), \ldots, f_s(p))\\ &\lim_{p\to a} f(p) = L = (L_1, L_2, \ldots, L_s) \in \mathbb{R}^s\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \lim_{p\to a} f_i(p) = L_i$$

4. LÍMITE DE LA SUMA DE FUNCIONES

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{p\to a} f(p) = L \\ \lim_{p\to a} g(p) = M\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{p\to a} f(p) + g(p) = L + M$$

5. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN POR UN ESCALAR

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{p\to a} f(p) = L \in \mathbb{R}^q \\ \lim_{p\to a} \lambda(p) = \lambda \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{p\to a} \lambda(p) f(p) = \lambda L$$

6. DESIGUALDADES DE LÍMITES PARA FUNC. REALES.

$$\left.\begin{array}{l}f, g : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R} \\ \lim_{p\to a} f(p) = L \\ \lim_{p\to a} g(p) = M\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f(x) \leq g(x)\ \forall x \neq a \\ \Rightarrow L \leq M \end{array}$$

EJEMPLO. Calcular si existe, el siguiente límite:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+xy^2}$$

$$\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+xy^2} = \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy^2}$$

$$\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\log(1+\rho^2)}{\rho^2} \quad \xrightarrow[\rho\to 0]{} 1 = L_1$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy^2} \to L_2$$

$$\boxed{L = L_1 \cdot L_2}$$

sigue

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy^2} = 1/\left(1+\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Vimos en el ejemplo de la primera parte de esta clase:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+xy^2} = 1/(1+0) = 1 = L_2$$

$$\boxed{L = L_1 \cdot L_2 = 1 \times 1 = 1}$$

CLASE 7 PARTE 5:
LÍMITES DIRECCIONALES

Bibliografía de la Clase7:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.2, parágrafos 11, 12 y 13.

Ejercicios para las clase 7

•Práctico 2 del año 2006, ejercicios 3 a 11

Sea una función real de dos variables: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$$a = (0,0) \in D'$$

Límite de f cuando p tiende al origen a=(0,0)

Dirección por el origen: rectas del plano x,y
que pasan por el origen y tienen pendiente Lambda,
o recta vertical x=0 (pendiente infinita). $y = \lambda x, \qquad x = 0$

DEFINICIÓN: Límite direccional de f según la dirección con pendiente Lambda es:

$$\lim_{x \to 0} f(x, \lambda x)$$

En particular si la pendiente es 0 :

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0)$$

Límite direccional según la dirección x=0

$$\lim_{y \to 0} f(0, y)$$

TEOREMA: Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \text{ límites direccionales y son todos iguales a } L$$

LÍMITE A LO LARGO DE CURVAS CONTINUAS:

$$\alpha : \ y = y(x) \text{ continua }, \quad y_a = y(x_a)$$

$$L_\alpha = \lim_{x\to x_a} f(x, y(x))$$

TEOREMA: Límite a lo largo de curvas

$$\lim_{(x,y)\to a} f(x,y) = L \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists L_\alpha \text{ y es igual a } L$$

Dem. Teorema de límites direccionales.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ t.q.}$$

$$(x,y) \in D \;\; 0 < \|(x,y)\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x,y) - L\| < \epsilon \quad (1)$$

$$y = \lambda x, \quad \|(x,y)\| = \boxed{\|(x,\lambda x)\| = \sqrt{1+\lambda^2} \cdot |x|}$$

$$\text{Elijo } \delta_1 = \delta / \sqrt{1+\lambda^2}$$

$$0 < |x| < \delta_1 \;\Rightarrow$$

$$0 < \sqrt{1+\lambda^2} \cdot |x| < \delta \;\Rightarrow$$

$$0 < \|(x,\lambda x)\| < \delta$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{por } (1)} \quad \|f(x,\lambda x) - L\| < \epsilon$$

sigue

Hemos probado:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \text{ t.q.}$$

$$(r, \lambda r) \in D, \quad 0 < |r| < \delta_1 \Rightarrow \| f(r, \lambda r) - L \| < \epsilon$$

$$\lim_{r \to 0} f(r, \lambda r) = L \quad \square$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE 8 PARTE 1: CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Bibliografía de la Clase 8:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.3, parágrafos 15, 16 y 17.

Ejercicios para las clase 8

•Práctico 3 del año 2006.

Sea dada $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^p, \quad a \in D$

(no se define continuidad en puntos a que no pertenecen al dominio de D)

DEFINICIÓN. Continuidad de f en el punto a:

f continua en $a \in D$ **si**

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ t.q.}$$

$$\underbrace{p \in D, \; \|p - a\| < \delta}_{p \in B_\delta(a) \cap D} \; \Rightarrow \; \underbrace{\|f(p) - f(a)\| < \epsilon}_{f(p) \in B_\epsilon(f(a))}$$

DEFINICIÓN. Continuidad de f en el conjunto D

f continua en D **si**

$$\boxed{f \text{ continua en } a \quad \forall a \in D}$$

TEOREMA

$$\boxed{f \text{ continua en } a \in D' \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(p) = f(a)}$$

OBSERVACIÓN:

$$f \text{ no continua en } a \quad \rightarrow \quad \left.\lim_{p \to a} f(p)\right\}$$

puede o no existir, pero si existe, es diferente de f(a)

EJEMPLO: Encontrar los puntos de continuidad y discontinuidad de la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x + y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+2y-1 & \text{si } x\geq 0 \\ 3x+y^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$A=\{x\geq 0\}$

$B=\{x<0\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,b) \text{ en } A} f(x,y)=2b-1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,b) \text{ en } B} f(x,y)=b^2$$

$$2b-1=b^2 \quad\Leftrightarrow\quad b=1$$

$$f \text{ continua en } \{(x,y):\ x\neq 0\},\ \text{y en } (0,1)$$

$$f \text{ discontinua en } (0,b) \text{ si } b\neq 1$$

CLASE 8 PARTE 2: PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

Bibliografía de la Clase 8:

•**Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.3, parágrafos 15, 16 y 17.**

Ejercicios para las clase 8

•**Práctico 3 del año 2006.**

1. FUNCIONES VECTORIALES CONTINUAS

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \longmapsto \mathbb{R}^r$$

$$f(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), \ldots, f_r(p)) \in \mathbb{R}^r$$

$$f \text{ continua} \iff f_1, f_2, \ldots, f_r \text{ continuas}$$

2. FUNCIÓN REAL CONTINUA CONSERVA EL SIGNO EN UN ENTORNO DEL PUNTO DONDE ES NO NULA

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \longmapsto \mathbb{R}$$

$$f \text{ continua en } a, \quad f(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(p) \neq 0 \ \forall p \in B_\delta(a)$$

3. La suma de funciones continuas es continua.

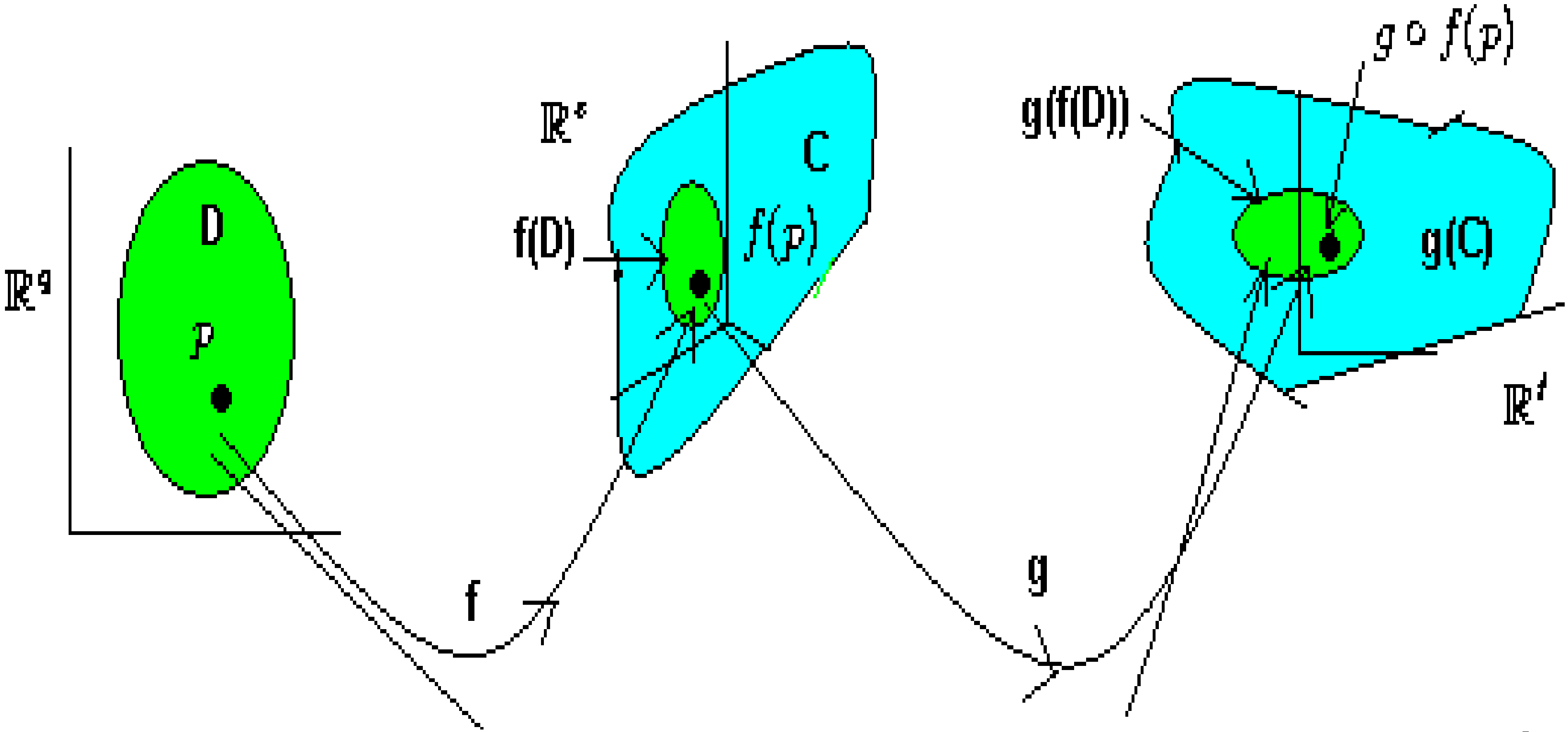
4. El producto de una función continua por el escalar $\lambda(p)$ continuo, es continuo.

5. La composición de funciones continuas es continua.

$$g \circ f(p) = g(f(p))$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES: $g \circ f(p) = g(f(p))$



$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s \quad f(D) \subset C \qquad g : C \subset \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^t$

Dem. que la composición de funciones continuas es continua.

$$a_n \to a \in D \quad \underbrace{\Rightarrow}_{f \text{ continua}} \quad f(a_n) \to f(a) \in C$$

$$f(a_n) \to f(a) \in C \quad \underbrace{\Rightarrow}_{g \text{ continua}} \quad g(f(a_n)) \to g(f(a))$$

$$a_n \to a \in D \;\Rightarrow\; g(f(a_n)) \to g(f(a)) \;\Rightarrow\; g \circ f \text{ continua} \quad \square$$

CLASE 8 PARTE 3: CARACTERIZACIÓN DE LA CONTINUIDAD

Bibliografía de la Clase 8:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.3, parágrafos 15, 16 y 17.

Ejercicios para las clase 8

•Práctico 3 del año 2006.

TEOREMA (Caracterización de la continuidad por abiertos.)

Una función es continua si y solo si la preimagen de cualquier abierto es un conjunto abierto.

$$f : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^p \text{ continua}$$

$$\Updownarrow$$

$$f^{-1}(V) \text{ abierto } \quad \forall V \subset \mathbb{R}^p \text{ abierto}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Dem. Directo:

$$a \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(a) \in V$$

$$f(a) \in V \quad V \text{ abierto} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(f(a)) \subset V$$

$$f \text{ continua} \Rightarrow \exists B_\delta(a) \text{ t.q.}$$

$$p \in B_\delta(a) \Rightarrow f(p) \in B_\varepsilon(f(a))$$

$$p \in B_\delta(a) \Rightarrow f(p) \in B_\varepsilon(f(a)) \subset V$$

$$p \in B_\delta(a) \Rightarrow f(p) \in V \Rightarrow p \in f^{-1}(V)$$

$$B_\delta(a) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow a \text{ interior a } f^{-1}(V)$$

$$f^{-1}(V) \text{ abierto} \quad \square$$

Dem. Recíproco:

$$f^{-1}(V) \text{ abierto } \forall V \text{ abierto },$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \text{ abierto}$$

$$f(a) \in B_\varepsilon(f(a)) \Rightarrow a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \text{ abierto} \Rightarrow$$

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$$

$$p \in B_\delta(a) \Rightarrow f(p) \in B_\varepsilon(f(a))$$

$$f \text{ continua } \square$$

CLASE 9 PARTE 1:
IMAGEN CONTINUA DE UN COMPACTO

Bibliografía de la Clase 9:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.3, parágrafos 18, 20 y 21.

Ejercicios para las clase 9

•Práctico 3 del año 2006.

TEOREMA. La imagen por una función continua de un conjunto compacto, es un conjunto compacto.

f continua $\quad K$ compacto

$\Rightarrow \quad f(K)$ compacto

Dem.

1ª parte: demostrar que $\quad f(K)$ acotado

Por absurdo si f(K) no fuera acotado:

$$\exists\, y_n \in f(K) \quad \text{t.q.} \quad \|y_n\| > n$$

$$y_n \to \infty, \qquad y_{i_n} \to \infty$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

sigue

Teníamos: $q_{i_n} \longrightarrow \infty$

$$q_n \in f(K) \Rightarrow q_n = f(p_n) \quad p_n \in K$$

$$K \text{ compacto}, \; p_n \in K \Rightarrow \exists p_{i_n} \text{ t.q. } \lim p_{i_n} = p \in K$$

$$\lim f(p_{i_n}) = \lim q_{i_n} = f(p) \in f(K) \text{ absurdo } \square$$

2ª parte: Demostrar que f(K) es cerrado. Por absurdo:

$$\exists q \in \partial f(K), \; q \notin f(K)$$

$$\exists q_n \in f(K) \text{ t.q. } q_n \longrightarrow q \notin f(K) \quad q_{i_n} \longrightarrow q \notin f(K)$$

Repetimos el mismo argumento recuadrado en verde. $\square$

CLASE 9 PARTE 2:
TEOREMA DE WEIERSTRASS

Bibliografía de la Clase 9:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.3, parágrafos 18, 20 y 21.

Ejercicios para las clase 9

•Práctico 3 del año 2006.

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$$

Máximos y mínimos (absolutos) de funciones reales.

DEFINICIÓN: **El VALOR de la función f en el punto a** $\in D$

$$M = f(a)$$

se llama MAXIMO (absoluto) de f en D si

$$f(a) \geq f(p) \ \forall p \in D$$

OBSERVACIÓN: El máximo existe cuando el supremo se alcanza en algún(os) punto(s) de D.

$$S = \sup_{p \in D} f(p) = f(a)$$

OBSERVACIÓN: El máximo (absoluto) si existe ES ÚNICO.

Se puede alcanzar en uno o muchos puntos a del Conjunto D.

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$$

Máximos y mínimos (absolutos) de funciones reales.

DEFINICIÓN: El VALOR de la función f en el punto b $\in D$

$$m = f(b)$$

se llama MÍNIMO (absoluto) de f en D si

$$f(b) \leq f(p) \quad \forall p \in D$$

OBSERVACIÓN: El mínimo existe cuando el ínfimo se alcanza en algún(os) punto(s) de D.

OBSERVACIÓN: El mínimo (absoluto) si existe ES ÚNICO.

Se puede alcanzar en uno o muchos puntos a del Conjunto D.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

TEOREMA DE WEIERSTRASS.
Toda función continua en un compacto K tiene Máximo y mínimo en K.

Dem.

$$f(K) \text{ compacto}$$

$$f(K) \text{ acotado} \quad \Rightarrow$$

$$\exists \sup_{p \in K} f(p) = S$$

$$\exists\, q_n \in f(K) \text{ t.q. } q_n \rightarrow S$$

$$f(K) \text{ cerrado} \quad \Rightarrow$$

$$q_n \in f(K), \quad q_n \rightarrow S, \quad \Rightarrow \quad S \in f(K)$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, a \in K \text{ t.q. } f(a) = S \quad \square$$

CLASE 9 PARTE 3:
CONTINUIDAD UNIFORME

Bibliografía de la Clase 9:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.3, parágrafos 18, 20 y 21.

Ejercicios para las clase 9

•Práctico 3 del año 2006.

DEFINICIÓN:

f es uniformemente continua en el conjunto D si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$$

$$(\text{independiente de } a \in D) \quad \text{t.q.}$$

$$a, p \in D, \ \|p - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(p) - f(a)\| < \epsilon$$

TODA FUNCIÓN UNIFORMEMENTE CONTINUA EN D es continua en D, pero el recíproco es falso.

EJEMPLO. Probar que la siguiente función es uniformemente continua en todo el plano R2:

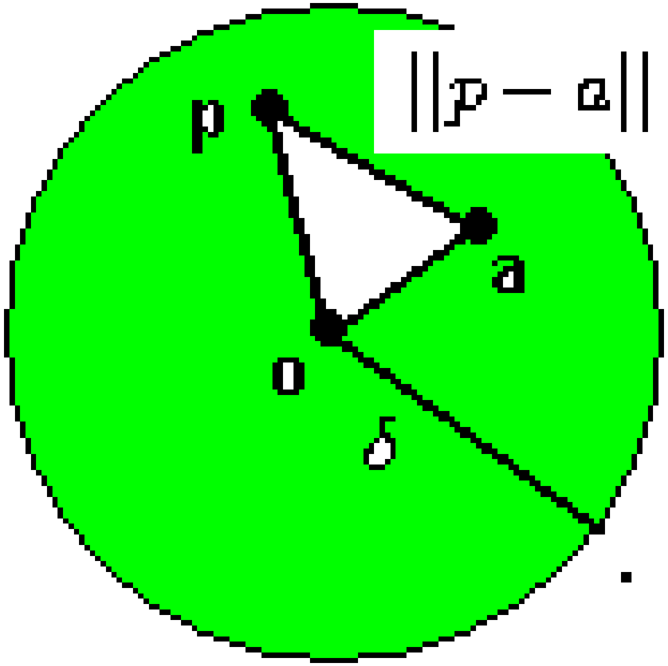
$$\boxed{f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \text{ en } \mathbb{R}^2}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|$$

$$\|p-a\|<\delta \Rightarrow$$

$$|f(p)-f(a)|=|\rho_p-\rho_a|=$$

$$\big|\|p\|-\|a\|\big|\le\|p-a\|<\delta=\epsilon$$



Conclusión:

$$\forall\epsilon>0 \text{ elijo } \delta=\epsilon$$

$$\|p-a\|<\delta \Rightarrow |f(p)-f(a)|<\epsilon \quad \square$$

EJEMPLO. Probar que la siguiente función no es uniformemente continua en R2.

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

NOTA: Por el teorema de Heine que veremos luego esa función es uniformemente continua en cualquier compacto contenido en R2.

Dem. Por absurdo, si lo fuera:

$$\forall \epsilon > 0,\ \epsilon = 1,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q.}$$

$$\|p - a\| < \delta \Rightarrow |f(p) - f(a)| < 1$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|f(p) - f(a)| = |\rho_p^2 - \rho_a^2| = (\rho_p + \rho_a)|\rho_p - \rho_a|$$

sigue

$$\|p-a\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(p)-f(a)| < 1$$

$$|f(p)-f(a)| = |\rho_p^2 - \rho_a^2| = (\rho_p + \rho_a)|\rho_p - \rho_a|$$

$$a = \left(\frac{2}{\delta}, 0\right), \quad p = \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}, 0\right)$$

$$\|p-a\| = \frac{\delta}{2} < \delta \;\Rightarrow |f(p)-f(a)| < 1$$

$$|f(p)-f(a)| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{4}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = 2 + \frac{\delta^2}{4} > 2$$

$$|f(p)-f(a)| > 2 \quad \text{absurdo} \quad \square$$

CLASE 9 PARTE 4: PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD UNIFORME

Bibliografía de la Clase 9:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.3, parágrafos 18, 20 y 21.

Ejercicios para las clase 9

•Práctico 3 del año 2006.

1. Si f es uniformemente continua en D entonces es uniformemente continua en cualquier subconjunto de D.

2. Si f es uniformemente continua en D y en E entonces es uniformemente continua en la unión de D con E.
Es también cierto para una unión de tres, cuatro, o una cantidad finita de conjuntos. Pero es falso para una unión infinita.

3. Si f es uniformemente continua en D entonces para toda pareja de sucesiones

$a_n \in D, \quad b_n \in D \quad$ t.q.

$$\|a_n - b_n\| \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \|f(a_n) - f(b_n)\| \to 0$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

EJEMPLO. **Probar que**

$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$p_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}},\ 0 \right), \quad q_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}},\ 0 \right)$$

$$||q_n - p_n|| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right| \to 0$$

$$|f(q_n) - f(p_n)| = 2 \not\to 0 \quad \square$$

CLASE 9 PARTE 5: CONTINUIDAD UNIFORME EN COMPACTOS

Bibliografía de la Clase 9:

•**Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 1, sección 1.3, parágrafos 18, 20 y 21.**

Ejercicios para las clase 9

•**Práctico 3 del año 2006.**

TEOREMA de HEINE.

$$\left.\begin{array}{l} K \subset \mathbb{R}^q \quad K \text{ compacto} \\ f : K \mapsto \mathbb{R}^r \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

f es uniformemente continua en K.

Dem.

Por absurdo, supongo que existe $\epsilon_0 > 0$ t.q.

$$\forall \delta > 0, \; \delta = 1/n \;\; \exists p_n, \; q_n \in K,$$

$$\|p_n - q_n\| < 1/n, \;\; \|f(p_n) - f(q_n)\| \geq \epsilon_0 > 0$$

$$\|f(p_{i_n}) - f(q_{i_n})\| \not\to 0$$

sigue

Teníamos: $\boxed{\|p_n - q_n\| < 1/n,}$ $\|f(p_{i_n}) - f(q_{i_n})\| \not\to 0$

K compacto $p_n \in K,\ q_n \in K \Rightarrow$

$$\exists\, p_{i_n} \to p \in K,\quad q_{i_n} \to q \in K$$

$$\Rightarrow \quad \|p_{i_n} - q_{i_n}\| \to \|p - q\|$$

$$\|p_{i_n} - q_{i_n}\| < \frac{1}{i_n} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad p = q$$

$$\boxed{\|f(p_{i_n}) - f(q_{i_n})\| \to 0}$$

absurdo $\square$

$$\|f(p_{i_n}) - f(q_{i_n})\| \to \|f(p) - f(q)\| = 0 \text{ pues } p = q$$

CLASE 10 PARTE 1:
DERIVADAS PARCIALES PRIMERAS

Bibliografía de la Clase 10:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.1, parágrafos 22 y 23.

Ejercicios para las clase 10

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 1 a 5 y 13.

DERIVADAS PARCIALES

Dada $z = f(x, y)$

La derivada parcial de f respecto de x $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **es la derivada de f como función de una sola variable x, dejando y constante.**

La derivada parcial de f respecto de y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **es la derivada de f como función de una sola variable y, dejando x constante.**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Notaciones para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \qquad f_x(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) \qquad f_y(a)$$

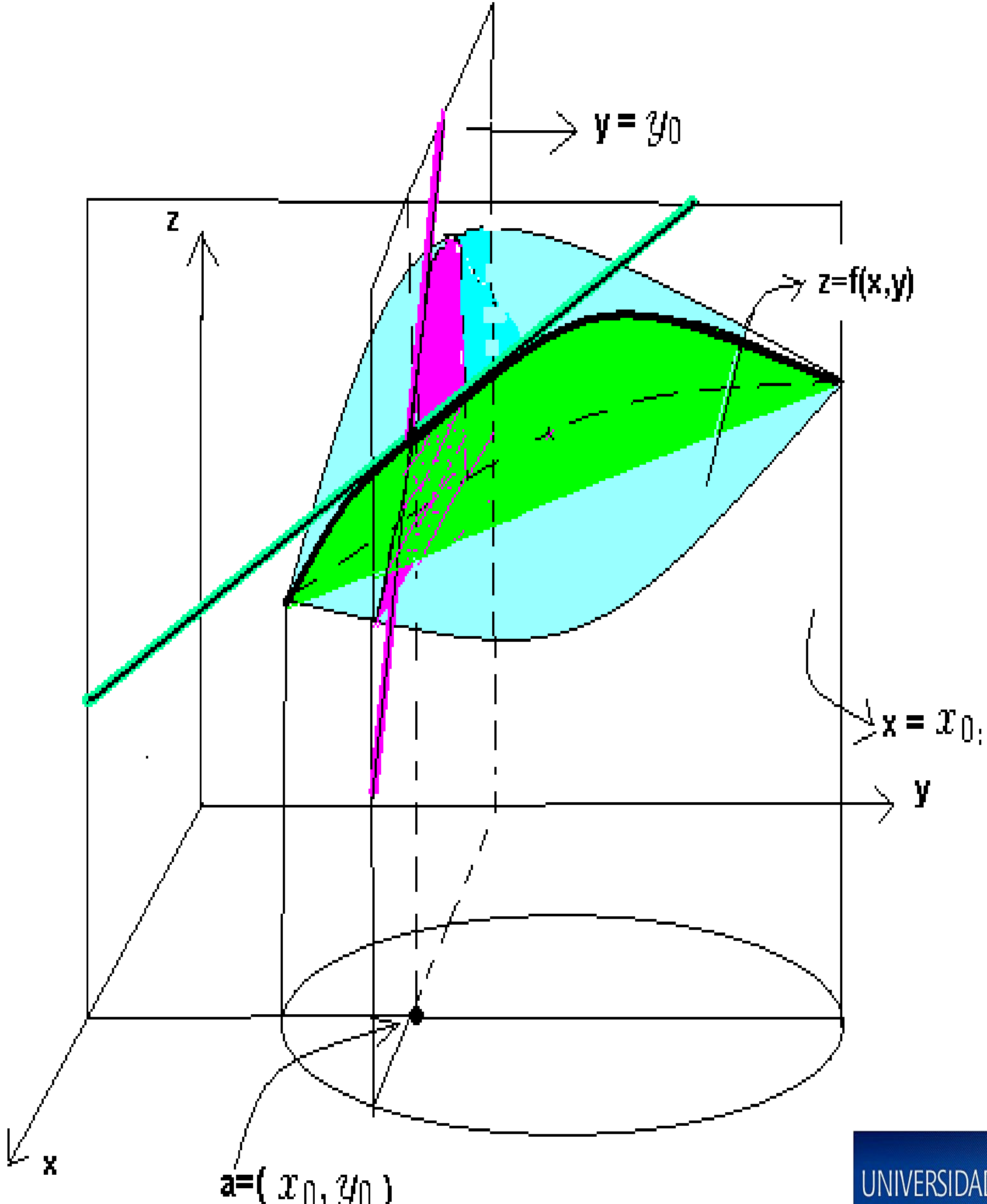
EJEMPLO:

$$f(x,y) = 3x^2 + y^3x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 7, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4$$



INTERPRETACIÓN GRÁFICA:

Recta verde de pendiente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

Recta rosada de pendiente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

PARA FUNCIONES DE TRES VARIABLES: $f(x,y,z)$

Se definen las tres derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{ó} \qquad f_x \quad f_y \quad f_z$$

derivadas respecto de x, y ó z respectivamente dejando las otras dos variables constantes.

PARA FUNCIONES DE q VARIABLES:

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$$

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_q) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_q}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a + \lambda e_j) - f(a)}{\lambda}$$

$$e_j = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{lugar } j}, \ldots, 0)$$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

Para funciones f(x) de una sola variable real:

Existe derivada f ' IMPLICA que f es continua

Para funciones f(x_1, x_2, …, x_q) de más de dos variables reales:

Existen las derivadas parciales NO IMPLICA que f sea continua.

Existen funciones de varias variables:

- **continuas que no tienen derivadas parciales.**
- **que tienen derivadas parciales y no son continuas.**
- **que no son continuas ni tienen derivadas parciales.**
- **que son continuas y tienen derivadas parciales.**

CLASE 10 PARTE 2:
MATRIZ JACOBIANA

Bibliografía de la Clase 10:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.1, parágrafos 22 y 23.

Ejercicios para las clase 10

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 1 a 5 y 13.

MATRIZ JACOBIANA.

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$$

$$f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

J f (a) es la matriz con s filas y q columnas, tal que en la fila i, columna j, tiene el término $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ **(a)**

$$Jf = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \ldots & \partial f_1/\partial x_q \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \ldots & \partial f_2/\partial x_q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial f_s/\partial x_1 & \partial f_s/\partial x_2 & \ldots & \partial f_s/\partial x_q \end{bmatrix}$$

EJEMPLO. Hallar la matriz Jacobiana en el punto a = (1,1) de la función f siguiente:

$$f(x,y,z) = e^{x+y^3+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y^3+z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 e^{x+y^3+z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{x+y^3+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1e^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3e^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1) = 2e^3$$

$$Jf \quad 1 \times 3$$

$$Jf = \begin{bmatrix} e^{x+y^3+z^2} & 3y^2 e^{x+y^3+z^2} & 2ze^{x+y^3+z^2} \end{bmatrix}$$

$$Jf(1,1) = \begin{bmatrix} e^3 & 3e^3 & 2e^3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO. Hallar la matriz Jacobiana en el punto (1,2) de

$$f(x,y) = \left(x^2y^3, e^{x^2+y^4}, \operatorname{sen}(2\pi y)\right)$$

$$Jf(x,y) \quad 3\times 2$$

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 2xe^{x^2+y^4} & 4y^3e^{x^2+y^4} \\ 0 & 2\pi\cos(2\pi y) \end{bmatrix}$$

$$Jf(1,2) = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 2e^{17} & 32e^{17} \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix}$$

CLASE 10 PARTE 3: DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y FUNCIONESDE CLASE Cr.

Bibliografía de la Clase 10:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.1, parágrafos 22 y 23.

Ejercicios para las clase 10

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 1 a 5 y 13.

DERIVADAS PARCIALES SEGUNDAS: Se obtiene derivando parcialmente respecto a una variable x_i (dejando las demás fijas) y a lo que se obtiene derivándolo parcialmente respecto a otra o la misma variable x_j (dejando las demás fijas).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{xy}$$

Derivadas “iteradas”

EJEMPLO: Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de f. Verificar que las derivadas iteradas son iguales entre sí.

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{x^2+y^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2e^{x^2+y^3} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (6y+9y^4)e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2e^{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

DEFINICIÓN: f de clase C^1

si existen derivadas parciales primeras y son todas continuas.

DEFINICIÓN: f de clase C^2

si existen derivadas parciales primeras y segundas y son todas continuas.

DEFINICIÓN: f de clase C^r

si existen derivadas parciales hasta orden r y son todas continuas.

EJEMPLO:
Encontrar si existe una función f(x,y) tal que:

$$f_x = e^{x+y} = e^x\, e^y \qquad f_y = e^x\, e^y + \cos y$$

$$f_x = e^{x+y} = e^x\, e^y$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = e^x\, e^y + A(y)$$

$$\Rightarrow \quad f_y = e^x\, e^y + A'(y)$$

$$\Rightarrow \quad A'(y) = \cos y \qquad A(y) = \operatorname{sen} y + K$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = e^{x+y} + \operatorname{sen} y + K$$

CLASE 11 PARTE 1:
DERIVADAS DIRECCIONALES

Bibliografía de la Clase 10:

•**Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.1, parágrafos 22 y 23.**

Ejercicios para las clase 11

•**Práctico 4 del año 2006, ejercicios 1 a 5 y 13.**

DERIVADAS DIRECCIONALES: **Sea f**

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad D \text{ abierto}, \quad a = (x_0, y_0) \in D$$

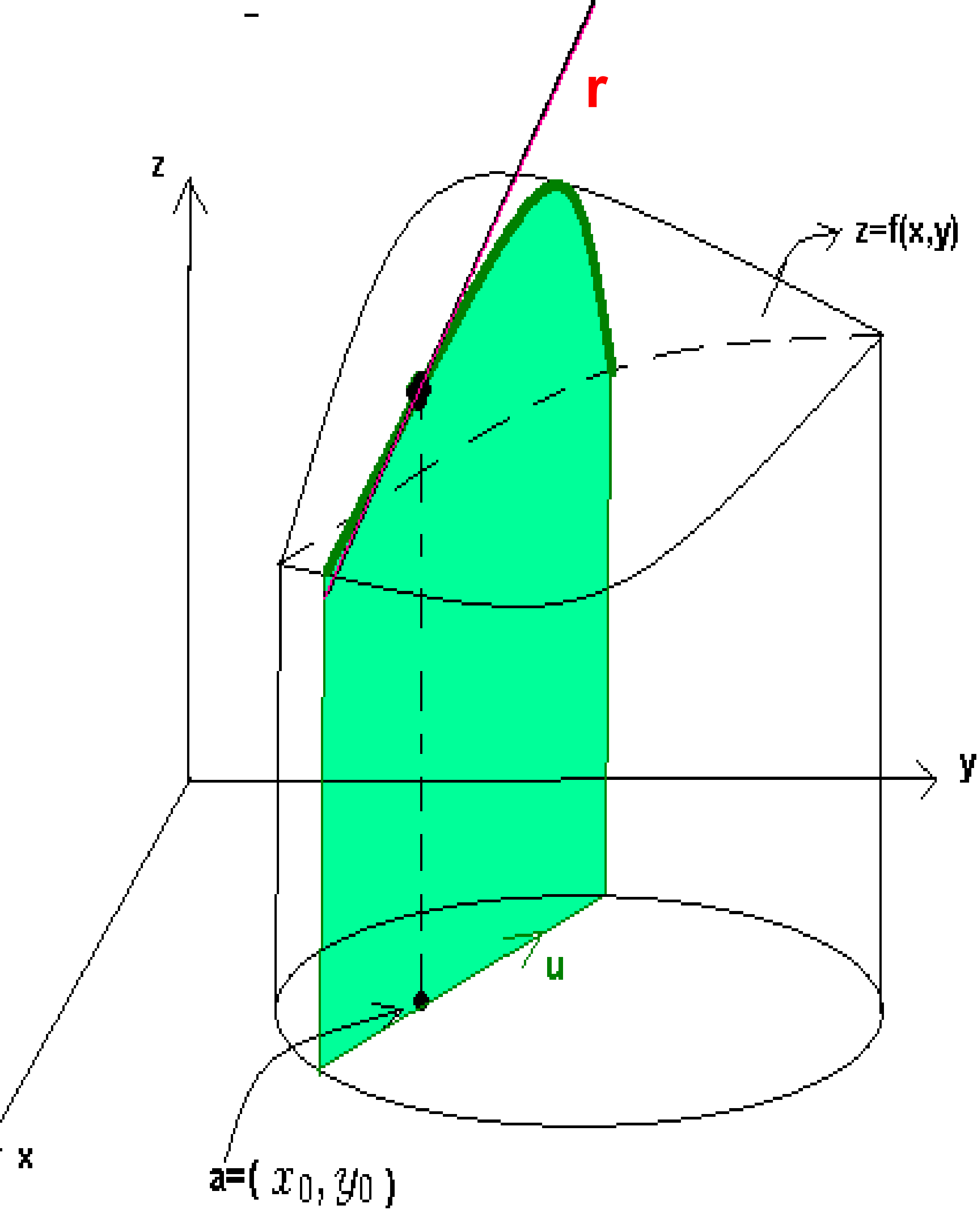
$$z = f(x, y)$$

Sea un versor u, que da una dirección por el punto a:

$$u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \qquad \theta \in [0, \pi)$$

Derivada direccional en el punto a según la dirección del versor u: es la derivada de f a lo largo de la recta que pasa por a colineal con u:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a + \lambda u) - f(a)}{\lambda}$$



INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL:

Recta r tiene pendiente:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Las derivadas parciales son dos derivadas direccionales particulares: en las direcciones de los versores

$$u = e_1 = (1, 0) \text{ y } u = e_2 = (0, 1).$$

respectivamente.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_1) - f(a)}{h}, \qquad e_1 = (1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a + ke_2) - f(a)}{k}, \qquad e_2 = (0, 1)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Las derivadas parciales son dos derivadas direccionales particulares: en las direcciones de los versores

$$u = e_1 = (1,0) \text{ y } u = e_2 = (0,1).$$

respectivamente.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_1) - f(a)}{h}, \qquad e_1 = (1,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a + ke_2) - f(a)}{k}, \qquad e_2 = (0,1)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Para funciones reales de q variables:

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$$

Dado un versor u de $\mathbb{R}^q$, la derivada direccional en el punto a según la dirección del versor u es:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a + \lambda u) - f(a)}{\lambda}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad a = (x_0, y_0) \qquad u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

EJEMPLO

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{(x_0 + \lambda\cos\theta)^2 + (y_0 + \lambda \operatorname{sen}\theta)^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} 2\cos\theta(x_0 + \lambda\cos\theta) + 2\operatorname{sen}\theta(y_0 + \lambda\operatorname{sen}\theta) =$$

$$2x_0\cos\theta + 2y_0\operatorname{sen}\theta$$

En particular, en el punto a = (1,2), la derivada direccional según versor $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = 2\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta$$

$$\theta = 0, \quad u = (1,0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$$

$$\theta = \pi/2, \quad u = (0,1), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4$$

CLASE 11 PARTE 2:
DERIVADAS DIRECCIONALES

Bibliografía de la Clase 10:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.1, parágrafos 22 y 23.

Ejercicios para las clase 11

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 1 a 5 y 13.

OBSERVACIÓN:

$\exists$ **derivadas direccionales en todas las direcciones** $\Rightarrow$ $\exists$ **derivadas parciales**

$\exists$ **derivadas parciales** $\not\Rightarrow$ $\exists$ **derivadas direccionales en todas las direcciones**

$$f(x,y) = 1 \text{ si } xy = 0$$
$$f(x,y) = 0 \text{ si } xy \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1-1}{k} = 0$$

$$u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad \theta \neq 0, \theta \neq \pi/2$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\lambda\cos\theta, \lambda\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{0-1}{\lambda} \quad \nexists$$

OBSERVACIÓN

$$\exists \text{ derivadas direccionales } \not\Rightarrow f \text{ es continua}$$

$$f \text{ es continua } \not\Rightarrow \exists \text{ derivadas direccionales}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ f(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0 = L_1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 = L_2$$

$$L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$

$$u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) =$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\lambda\cos\theta, \lambda \operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^3 \cos\theta}{\lambda^2 \operatorname{sen}\theta} = 0 \text{ si } \theta \neq 0$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{0-0}{\lambda} = 0 \text{ si } \theta = 0$$

Existen derivadas direccionales en $(0,0)$ según todas las direcciones u.

OTRO EJEMPLO: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

f es continua en $(0,0)$

$$u=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda\cos\theta,\lambda\operatorname{sen}\theta)-f(0,0)}{\lambda}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\sqrt{\lambda^2\cos^2\theta+\lambda^2\operatorname{sen}^2\theta}}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{|\lambda|}{\lambda}\quad\nexists$$

No existen derivadas direccionales en $(0,0)$.

CLASE 12 PARTE 1: DIFERENCIABILIDAD
Definición

Bibliografía de la Clase 12:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.2, parágrafos 24, 25 y 26.

Ejercicios para las clase 12

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 6, 7, 9 y 10.

Sea dada un función f en un abierto D, y un punto a en D:

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s, \qquad D \text{ abierto }, \quad a \in D$$

Para cada punto p = x en un entorno de a se llama incremento Delta x al vector p-a = x-a

$$p = \mathbf{x} \in D_\delta(a) \subset D$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - a = p - a$$

DEFINICIÓN: Se dice que f es diferenciable en el punto a si

$$\exists \text{ transformación lineal } Df(a) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$$

tal que

$$f(p) - f(a) = Df(a)(p-a) + \epsilon(p) \cdot ||p-a||$$

$$\lim_{p \to a} \epsilon(p) = 0$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Notaciones:

$$f(\mathbf{x}) - f(a) = Df(a)(\underbrace{\Delta\mathbf{x}}_{\mathbf{x}-\mathbf{a}}) + \underbrace{o(\|\mathbf{x} - a\|)}_{\epsilon(\mathbf{x})\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}$$

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(a)$$

OBSERVACIÓN:

$$\boxed{\exists \text{ derivadas parciales en } a \quad \not\Rightarrow \quad f \text{ diferenciable en } a}$$

TEOREMA:

$$\boxed{f \text{ diferenciable en } a \quad \Rightarrow \quad \exists \text{ derivadas parciales en } a}$$

TEOREMA.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

f diferenciable en a $\Rightarrow$ $\exists$ derivadas parciales en a

Además:
La matriz asociada a la transformación lineal $Df(a)$ es la matriz Jacobiana $Jf(a)$ es decir:

$$Df(a)\cdot\Delta\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_q\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial f_s/\partial x_1 & \dots & \partial f_s/\partial x_q\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_q\end{bmatrix}$$

$$\Delta x_j = x_j - a_j$$

$$\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_q) \qquad a=(a_1,\dots,a_q)$$

$$\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}-a=(x_1-a_1,\dots,x_q-a_q)$$

Dem.

$$\frac{f(a+he_j)-f(a)}{h} = Df(a)e_j + \frac{\epsilon(a+he_j)|h|}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_j)-f(a)}{h} = Df(a)e_j$$

Sus componentes $Df_1(a)e_j, \quad Df_i(a)e_j, \quad Df_s(a)e_j$ forman la columna j-ésima de la matriz Jacobiana $Jf(a)$.

$\Longrightarrow$ Existen las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j = Df_i(a)e_j$ y son iguales al término en la fila i, columna j de la matriz asociada a la transformación lineal $Df(a)$ $\square$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

OBSERVACIONES:

1. Por el teorema anterior:

$$\boxed{f \text{ diferenciable en } a \quad \Rightarrow \quad \exists \text{ derivadas parciales en } a}$$

2.

$$\boxed{\exists \text{ derivadas parciales en } a \quad \not\Rightarrow \quad f \text{ diferenciable en } a}$$

pues

Para que f sea diferenciable en a, además de existir la matriz Jacobiana $Jf(a)$ (es decir todas las derivadas parciales) se necesita que

$$\lim_{\mathbf{x}\to a} \frac{f(\mathbf{x}) - f(a) - Jf(a)(\mathbf{x} - a)}{||\mathbf{x} - a||} = 0$$

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \frac{\Delta f - Jf(a)\Delta\mathbf{x}}{||\Delta\mathbf{x}||} = 0$$

OBSERVACIONES:

Del pizarrón anterior

$$\exists \text{ derivadas parciales en } a \not\Rightarrow f \text{ diferenciable en } a$$

Sin embargo, demostraremos más adelante que

$$\left.\begin{array}{l}\exists \text{ derivadas parciales en } p \\ \text{y son continuas } \forall p \in B_\delta(a)\end{array}\right. \Rightarrow f \text{ diferenciable en } a$$

Esto último da un procedimiento suficiente (pero no necesario) para probar que f es diferenciable: hallar las derivadas parciales en un punto p genérico (si existen) y demostrar que son continuas.

CLASE 12 PARTE 2: DIFERENCIABILIDAD
Cálculo del diferencial.

Bibliografía de la Clase 12:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.2, parágrafos 24, 25 y 26.**

Ejercicios para las clase 12

- **Práctico 4 del año 2006, ejercicios 6, 7, 9 y 10.**

DEFINICIÓN: Si f es diferenciable en el punto a se llama **DIFERENCIAL de f en al punto a**:

$$Df(a)(\Delta \mathbf{x})$$

o (según el autor) también a la transformación lineal:

$$Df(a)$$

EJEMPLO. Calcular el diferencial de f en (0,0) siendo:

$$f(x,y) = e^{x+y} + 2\,\mathrm{sen}(2x - y)$$

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} + 4\cos(2x-y) & e^{x+y} - 2\cos(2x-y) \end{bmatrix}$$

f es diferenciable porque sus derivadas parciales son continuas.

$$Jf(0,0) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y) = (x-0, y-0) = (x,y)$$

$$Df(0,0)\Delta\mathbf{x} = Jf(0,0)\cdot\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = 5\Delta x - \Delta y = 5x - y$$

$\square$

CLASE 12 PARTE 3: DIFERENCIABILIDAD
Relación con continuidad y derivadas direccionales

Bibliografía de la Clase 12:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.2, parágrafos 24, 25 y 26.

Ejercicios para las clase 12

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 6, 7, 9 y 10.

IMERL. Fac. de Ingeniería. UdelaR. J. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay. Setiembre 2006.

TEOREMA. Diferenciabilidad y continuidad.

f diferenciable en a $\Longrightarrow$ f continua en a.

Dem.

$$f(p) - f(a) = Df(a)(p-a) + \epsilon(p)\left\|p-a\right\|$$

$$\lim_{p\to a} \epsilon(p) = 0$$

$$\lim_{p\to a} f(p) - f(a) = \lim_{p\to a} Df(a)(p-a) + \epsilon(p)\left\|p-a\right\| = 0+0 = 0$$

$$\lim_{p\to a} f(p) = f(a) \quad \square$$

TEOREMA. Diferenciabilidad y derivadas direccionales.

f diferenciable en a $\Rightarrow$ **Existen derivadas direccionales y son**

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = Df(a)u$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Dem.

$$\frac{f(a+\lambda u) - f(a)}{\lambda} = \frac{Df(a)\lambda u + \epsilon(a+\lambda u)|\lambda|}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda u) - f(a)}{\lambda} = Df(a)u \quad \square$$

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIABILIDAD:

1. La suma de funciones diferenciables es diferenciable y

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$$

2. El producto de una función diferenciable por un real es diferenciable y

$$D(\lambda f) = \lambda Df$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

3. Veremos más adelante que la composición f o g de funciones diferenciables es diferenciable, y que vale la REGLA de la CADENA

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) \cdot Dg(a)$$

CLASE 13 PARTE 1: FUNCIONES REALES DE DOS VARIABLES.
Plano tangente.

Bibliografía de la Clase 13:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.2, parágrafos 26 y 27.**

Ejercicios para las clase 12

- **Práctico 4 del año 2006, ejercicios 8 y 11.**

Sea dada una función real de dos variables f(x,y), definida en una abierto D. Sea dado un punto $a = (x_0, y_0) \in D$

DEFINICIÓN:

Plano tangente a la superficie gráfica z= f(x,y)

en el punto (x_0, y_0, z_0) $\quad z_0 = f(x_0, y_0)$

es (si existe) el plano que

contiene a todas LAS RECTAS TANGENTES

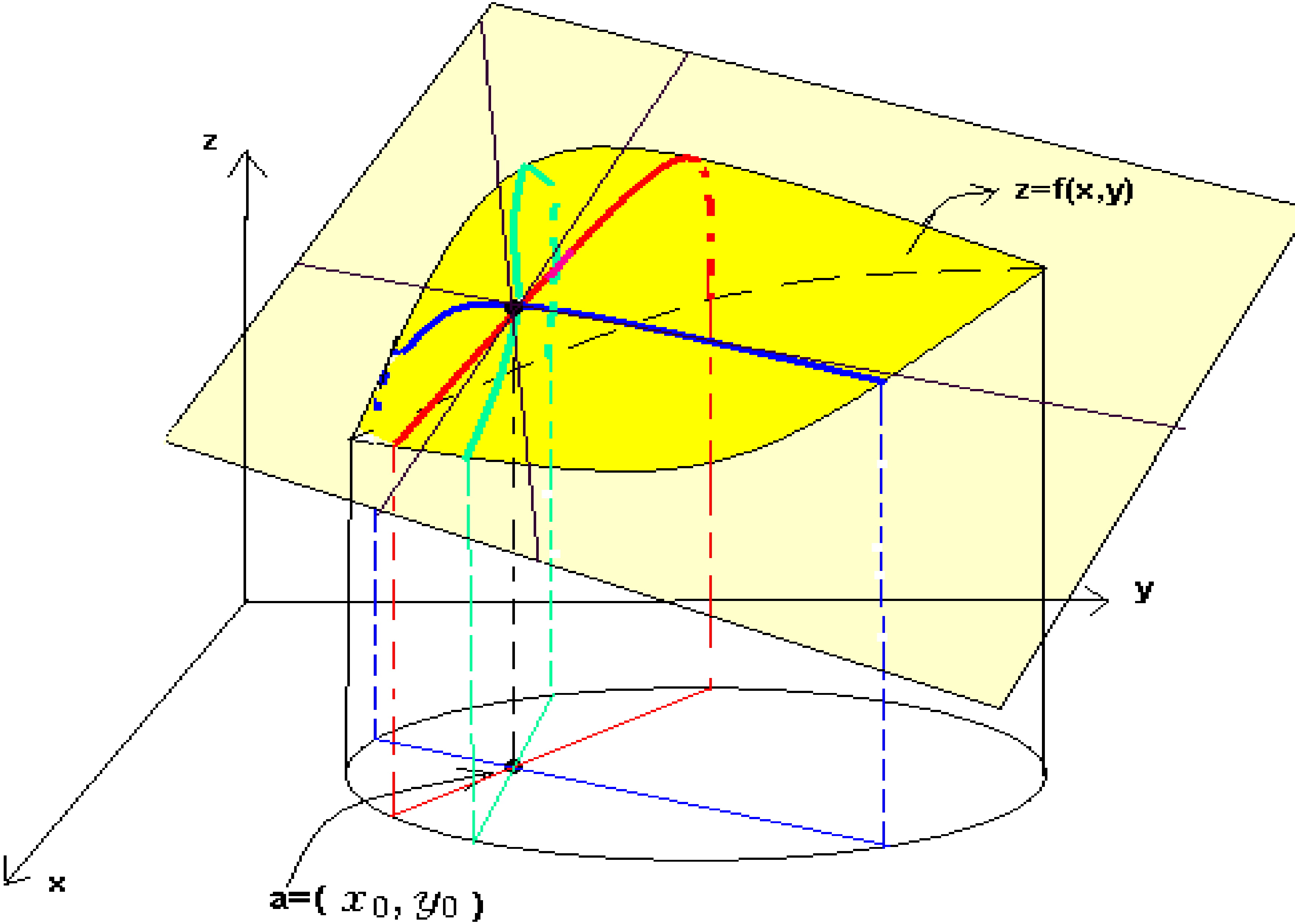
por el punto (x_0, y_0, z_0)

a las CURVAS CONTENIDAS

EN LA SUPERFICIE, que pasan por (x_0, y_0, z_0)

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Ver figura siguiente



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

TEOREMA.

Si f(x,y) es diferenciable en el punto (x_0, y_0)

entonces existe plano tangente a la superficie gráfica por

$$(x_0, y_0, z_0)$$

y tiene por ecuación

$$\boxed{z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)}$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= f(x_0, y_0) \\ a &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}}$$

Dem. Curvas contenidas en la superficie gráfica son (1) y (2):

$$(1) \quad x = x_0, \quad z = f(x_0, y) = \psi(y)$$

$$(2) \begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

La recta tangente a la curva (1) por (x_0, y_0, z_0) es

$$x = x_0, \;\; z - z_0 = \psi'(y_0)(y - y_0) = b(y - y_0)$$

y entonces verifica la ecuación del plano

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

sigue

De las ecuaciones de la curva (2) se obtiene

$$z - z_0 = f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= a(x - x_0) + b(y - y_0) + \epsilon(x, y)||(x - x_0, y - y_0)|| = \varphi(x)$$

Recta tangente a la curva (2) por (x_0, y_0, z_0) es

$$(2) \quad y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$z = f(x, y)$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$z - z_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$$

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(a + bk)(x - x_0) + \epsilon(x, y)\sqrt{1 + k^2}|x - x_0|}{x - x_0} =$$

$$= a + bk$$

$$z - z_0 = (a + bk)(x - x_0)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Resta tangente a la curva (2) es

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$z - z_0 = (a + bk)(x - x_0)$$

Eliminando k

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad \square$$

CLASE 13 PARTE 2: FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES. Vector gradiente.

Bibliografía de la Clase 13:

•**Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.2, parágrafos 26 y 27.**

Ejercicios para las clase 12

•**Práctico 4 del año 2006, ejercicios 8 y 11.**

Sea dada f función REAL de q variables en un abierto D y un punto a en D.

DEFINICIÓN: Si f es diferenciable en a se define el vector gradiente de f en el punto a:

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_q} \right)$$

NOTA: Si f no es diferenciable en a NO SE DEFINE vector gradiente de f en el punto a, aunque existan las derivadas parciales respectivas.

El vector gradiente en $\mathbb{R}^q$ es el que tiene componentes los términos de la matriz Jacobiana $Jf(a)$.

DIFERENCIAL Y GRADIENTE:

El diferencial de f en el punto a es el producto escalar del gradiente por el vector incremento Delta x.

$$Df(a)(\Delta\mathbf{x}) = Jf(a) \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \cdots \\ \Delta x_q \end{bmatrix} = \nabla f \cdot \Delta\mathbf{x}$$

DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE: Cuando f es diferenciable en el punto a, la derivada direccional según la dirección del versor u es el producto escalar del gradiente por u.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = Df(a)u = Jf(a) \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_q \end{bmatrix} = \nabla f \cdot u$$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE: (cuando f es diferenciable)

1. La derivada direccional según u (pendiente de la gráfica en la dirección u) es nula si y solo si u es ortogonal al vector gradiente de f.

$$Df(a)\cdot u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \perp \nabla f(a)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CONSECUENCIA:

El vector gradiente, si no es nulo, es ortogonal a las curvas de nivel de f(x,y).

El vector gradiente, si no es nulo, es ortogonal a las superficies de nivel de f(x,y,z)

2. La derivada direccional según u (pendiente de la gráfica en la dirección u) es máxima si u es colineal al vector gradiente de f.

Dem. $e = \operatorname{grad} f(a) / ||\operatorname{grad} f(a)||$

$$|Df(a) \cdot u| = |\operatorname{grad} f(a) \cdot u| \leq ||\operatorname{grad} f(a)|| \cdot ||u|| =$$

$$= ||\operatorname{grad} f(a)|| = \operatorname{grad} f(a) \cdot \operatorname{grad} f(a) / ||\operatorname{grad} f(a)|| =$$

$$= |\operatorname{grad} f(a) \cdot e| = |Df(a) \cdot e|$$

$$\Rightarrow |Df(a) \cdot u| \leq |Df(a) \cdot e| \quad \square$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Como consecuencia de la propiedad 1, vimos que

Si $\operatorname{grad} F(a) \neq 0$ entonces:
la recta tangente (o el plano tangente) en el punto a a la curva (o a la superficie) $F(\mathbf{x}) = k$, es

$$\operatorname{grad} F(a) \cdot (\mathbf{x} - a) = 0$$

EJEMPLO: Encontrar la recta tangente a la hipérbola xy =1 por el punto (1/2, 2).

$$F(x, y) = xy, \quad a = (1/2, 2), \quad \operatorname{grad} F(a) = (y, x) = (2, 1/2)$$

Vector normal a la hipérbola en a es $(2, 1/2)$.

Recta tangente a la hipérbola en a es

$$2(x - 1/2) + 1/2\,(y - 2) = 0$$

$$2x - 1 + (1/2)y - 1 = 0$$

$$4x + y - 4 = 0 \quad \square$$

CLASE 13 PARTE 3:
TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Bibliografía de la Clase 13:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.2, parágrafos 26 y 27.**

Ejercicios para las clase 12

- **Práctico 4 del año 2006, ejercicios 8 y 11.**

TEOREMA del VALOR MEDIO del Cálculo Diferencial (para funciones reales)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R},$

definida en un abierto D.

Sean dos puntos $a \in D,\ b \in D$

tales que $[a, b] \subset D$

Si f es diferenciable $\forall\, \mathbf{x} \in [a, b]$

entonces

$$\boxed{\begin{gathered} \exists\ \xi \in (a, b) \text{ t.q.} \\ f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a) \end{gathered}}$$

Dem.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

$$\varphi(t) = f(a + t(b-a)), \quad \varphi : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$$

$$\varphi(0) = f(a), \qquad \varphi(1) = f(b)$$

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(p) - f(p_0)}{t - t_0}, \quad p = a + t(b-a), \ p_0 = a + t_0(b-a)$$

$$\frac{f(p) - f(p_0)}{t - t_0} = \frac{Df(p_0)(p - p_0) + \epsilon(p)||p - p_0||}{t - t_0} =$$

$$Df(p_0)(b-a) + \frac{\epsilon(p)|t - t_0| \, ||b - a||}{t - t_0}$$

sigue

$$\Rightarrow \quad \varphi'(t_0) = Df(p_0)(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(t_0) = Df(a + t_0(b-a))\,(b-a)$$

$\Rightarrow \quad \varphi$ es derivable en $t_0 \in (0,1)$

Teorema del valor medio para funciones reales de una sola variable real t: $\exists\,\theta \in (0,1)$ t.q.

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)(1-0)$$

$$\xi = a + \theta(b-a) \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) = Df(\xi)(b-a) \quad \square$$

TEOREMA del VALOR MEDIO del Cálculo Diferencial (para funciones vectoriales)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$

definida en un abierto D.

Sean dos puntos $a \in D,\ b \in D$

tales que $[a, b] \subset D$

Si f es diferenciable $\forall \mathbf{x} \in [a, b]$

entonces

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ t. q.}$$

$$\|f(b) - f(a)\| \le \|Df(\xi)(b - a)\|$$

EN GENERAL PARA FUNCIONES VECTORIALES NO SUCEDE LO MISMO QUE PARA FUNCIONES REALES.

PARA FUNCIONES VECTORIALES NO NECESARIAMENTE EXISTE

$$\xi \in (a,b) \text{ t.q.}$$

$$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b-a)$$

sino:

$$\boxed{\begin{gathered}\exists\, \xi \in (a,b) \text{ t. q.} \\ \|f(b) - f(a)\| \le \|Df(\xi)(b-a)\|\end{gathered}}$$

CLASE 14 PARTE 1:
FUNCIONES DE CLASE C1
Y DIFERENCIABILIDAD.

Bibliografía de la Clase 14:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.3, parágrafo 28.

Ejercicios para las clase 14

•Práctico 4 del año 2006, ejercicio 12.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$ **donde D es un conjunto abierto. La existencia de las derivadas primeras no implica la diferenciabilidad cuando f es función de dos o más variables.**

Recordemos que f de clase C^1

si existen y son continuas sus derivadas parciales primeras.

TEOREMA

$$\boxed{f \text{ de clase } C^1 \quad \Rightarrow \quad f \text{ diferenciable.}}$$

Dem.

Solo demostraremos en el caso particular de función real de dos variables. El caso general de función vectorial de varias variables, se demuestra en forma similar, componente a componente de f.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \qquad p = (x, y) \in D, \;\; p_0 = (x_0, y_0)$$

$$f(p) - f(p_0) = f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$f(p) - f(p_0) = f_y(x, \xi)(y - y_0) + f_x(\eta, y_0)(x - x_0)$$

$$\xi \in [y_0, y], \;\; \eta \in [x_0, x]$$

$$f(p) - f(p_0) = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) +$$

$$+ [f_y(x, \xi) - f_y(x_0, y_0)](y - y_0) +$$

$$+ [f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0, y_0)](x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f(p) - f(p_0) = Df(p_0)(p - p_0) + \epsilon(p) \, ||p - p_0||$$

$$\epsilon(p) = [f_y(x, \xi) - f_y(x_0, y_0)] \frac{(y - y_0)}{||p - p_0||} +$$

$$+ [f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0, y_0)] \frac{(x - x_0)}{||p - p_0||}$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon(p) \longrightarrow_{p \to p_0} 0 \quad \square$$

EJEMPLO: **Probar que la siguiente función f es diferenciable en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$**

$$\boxed{f(x,y) = (x^2 + y^2)\,\mathrm{sen}(xy)}$$

$$f_x = 2x\,\mathrm{sen}(xy) + y(x^2 + y^2)\,\cos(xy)$$

$$f_y = 2y\,\mathrm{sen}(xy) + x(x^2 + y^2)\,\cos(xy)$$

$$f_x,\ f_y \text{ son continuas para todo } (x,y)$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ es de clase } C^1$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ es diferenciable para todo } (x,y).\quad \square$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE 14 PARTE 2:
FUNCIONES DE CLASE C1
Y DIFERENCIABILIDAD.

Bibliografía de la Clase 14:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.3, parágrafo 28.

Ejercicios para las clase 14

•Práctico 4 del año 2006, ejercicio 12.

Teorema anterior:

$$f \text{ de clase } C^1 \quad \Rightarrow \quad f \text{ diferenciable.}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

OBSERVACIÓN:

$$f \text{ diferenciable} \quad \not\Rightarrow \quad f \text{ de clase } C^1$$

EJEMPLO: Verificar que la siguiente función no es de clase C1 en un entorno de (0,0), pero es diferenciable en (0,0).

$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\ \mathrm{sen}\ \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Si $(x, y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,\mathrm{sen}\ \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} \text{ es discontinua en } (0,0)$$

f no es de clase C^1.

sigue

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\epsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - x f_x(0,0) - y f_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\ \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \rightarrow_{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = f(0,0) + Df(0,0)(x,y) + \epsilon(x,y)||(x,y)||$$

$$\text{donde } \epsilon(x,y) \rightarrow_{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$\Rightarrow \quad f$ es diferenciable. $\square$

CLASE 15 PARTE 1: DERIVADA Y DIFERENCIAL DE LA FUNCIÓN COMPUESTA Regla de la Cadena.

Bibliografía de la Clase 15:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.3, parágrafo 29.

Ejercicios para las clase 15

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 14 al 17.

TEOREMA:

La composición g o f de funciones DIFERENCIABLES es DIFERENCIABLE y vale la

REGLA DE LA CADENA:

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \cdot Df(p)$$

CASO PARTICULAR: **f es función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y g es función REAL en $\mathbb{R}^2$**

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto C \subset \mathbb{R}^2$$

$$g : C \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$g \circ f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (u, v) = f(x, y) \\ u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \\ g = g(u, v) \\ g \circ f(x, y) = \\ = g(u(x, y), v(x, y)) \end{array}\right.$$

$$(u,v)=f(x,y)$$
$$u=u(x,y),$$
$$v=v(x,y)$$
$$g=g(u,v)$$
$$g\circ f(x,y)=$$
$$=g(u(x,y),v(x,y))$$

REGLA DE LA CADENA

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

EJEMPLO:

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

$$\varphi(x,y)=(x^2+y^2)^2+e^{x^3+y}$$
$$f(x,y):\quad u=x^2+y^2,\quad v=x^3+y$$
$$g(u,v)=u^2+e^v$$
$$\varphi(x,y)=g\circ f(x,y)=g(u(x,y),v(x,y))$$

sigue

Aplicar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales primeras de:

$$\varphi(x,y) = (x^2+y^2)^2 + e^{x^3+y}$$

$$f(x,y):\quad u = x^2+y^2,\qquad v = x^3+y$$

$$g(u,v) = u^2 + e^v$$

$$\varphi(x,y) = g\circ f(x,y) = g(u(x,y),v(x,y))$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = g_u u_x + g_v v_x = 2u\cdot 2x + e^v\cdot 3x^2 =$$

$$= 2(x^2+y^2)\cdot 2x + e^{x^3+y}\cdot 3x^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = g_u u_y + g_v v_y = 2u\cdot 2y + e^v\cdot 1 =$$

$$= 2(x^2+y^2)\cdot 2y + e^{x^3+y}$$

CLASE 15 PARTE 2: DERIVADA Y DIFERENCIAL DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

Regla de la Cadena.

Bibliografía de la Clase 15:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.3, parágrafo 29.

Ejercicios para las clase 14

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 14 al 17.

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto C \subset \mathbb{R}^s, \quad D \text{ abierto}, \quad a \in D,$

$$g : C \subset \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^t, \quad C \text{ abierto}, \quad b = f(a) \in C$$

$$g \circ f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^t$$

TEOREMA.

Si f es diferenciable en el punto a; si g es diferenciable en el punto b = f(a); entonces gof es diferenciable en a.
Y vale la REGLA DE LA CADENA que tiene cualquiera de los siguientes enunciados:

1. $$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial g_j}{\partial y_s}\frac{\partial f_s}{\partial x_i}$$

2. $$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

3. $$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$$

2. implica 3, porque Jf es la matriz asociada a la transformación lineal Df.

3. implica 1. pues

$$\underbrace{J(g\circ f)(a)}_{[t\times q]} = \underbrace{Jg(f(a))}_{[t\times s]} \cdot \underbrace{Jf(a)}_{[s\times q]}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(\partial g\circ f)_1}{\partial x_1} & \frac{(\partial g\circ f)_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{(\partial g\circ f)_1}{\partial x_q} \\ \frac{(\partial g\circ f)_2}{\partial x_1} & \frac{(\partial g\circ f)_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{(\partial g\circ f)_2}{\partial x_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(\partial g\circ f)_t}{\partial x_1} & \frac{(\partial g\circ f)_t}{\partial x_2} & \cdots & \frac{(\partial g\circ f)_t}{\partial x_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_s} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_t}{\partial y_1} & \frac{\partial g_t}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_t}{\partial y_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_q} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial (g\circ f)_j}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_j}{\partial y_1} & \frac{\partial g_j}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_j}{\partial y_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial (g\circ f)_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_s}\frac{\partial f_s}{\partial x_i}$$

Demostración de que go f es diferenciable y vale 1.

Probar que la transformación lineal

$$L = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

verifica $$g \circ f(p) - g \circ f(a) = L(p-a) + \epsilon(p)||p-a||$$

$$\epsilon(p)_{p \to a} \longrightarrow 0 \quad \text{a probar}$$

---

g diferenciable en $b = f(a) \quad \Rightarrow$

$$g(f(p)) - g(f(a)) =$$

$$= Dg(f(a))(f(p) - f(a)) + \epsilon_1(f(p))||f(p) - f(a)|| \quad (1)$$

$$\epsilon_1(f(p))_{p \to a} \longrightarrow 0 \text{ porque } f(p)_{p \to a} \longrightarrow f(a)$$

f diferenciable en $a \quad \Rightarrow$

$$f(p) - f(a) = Df(a)(p-a) + \epsilon_2(p)||p-a|| \quad (2)$$

$$\epsilon_2(p)_{p \to a} \longrightarrow 0$$

sigue

Teníamos:

$$\boxed{\begin{gathered} g(f(p)) - g(f(a)) = \\ = Dg(f(a))(f(p) - f(a)) + \epsilon_1(f(p))||f(p) - f(a)|| \quad (1) \\ \epsilon_1(f(p))_{p\to a} \longrightarrow 0 \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f(p) - f(a) = Df(a)(p - a) + \epsilon_2(p)||p - a|| \quad (2) \\ \epsilon_2(p)_{p\to a} \longrightarrow 0 \end{gathered}}$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$g \circ f(p) - g \circ f(a) = Dg(f(a))Df(a)(p - a) +$$

$$+ Dg(f(a))\epsilon_2(p)||p - a|| + \epsilon_1(f(p))||f(p) - f(a)||$$

$$g \circ f(p) - g \circ f(a) = L(p - a) + \epsilon(p)||p - a|| \quad (3)$$

$$\text{donde}$$

$$\epsilon(p) = Dg(f(a))\epsilon_2(p) + \epsilon_1(f(p))\frac{||f(p) - f(a)||}{||p - a||}$$

sigue

Teníamos:

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$g \circ f(p) - g \circ f(a) = L(p-a) + \epsilon(p)||p-a|| \quad (3)$$

donde

$$\epsilon(p) = Dg(f(a))\epsilon_2(p) + \epsilon_1(f(p)) \frac{||f(p) - f(a)||}{||p-a||}$$

$$\frac{f(p) - f(a)}{||p-a||} = Df(a)\frac{p-a}{||p-a||} + \epsilon_2(p) \quad \text{está acotado}$$

$$\epsilon_1(f(p)),\ \epsilon_2(p)_{p \to a} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon(p)_{p \to a} \to 0$$

$$(3), \epsilon(p)_{p \to a} \to 0 \quad \Rightarrow g \circ f \text{ diferenciable en } a$$

$$\text{y } D(g \circ f) = L = Dg(f(a)) \cdot Df(a) \qquad \square$$

CLASE 16 PARTE 1:
DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

Bibliografía de la Clase 16:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafos 30 y 31.

Ejercicios para las clase 16

•Práctico 4 del año 2006, ejercicios 2, 3, 15 y 19.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \end{cases}$$

f es de clase C^1 si existen las derivadas parciales primeras y son continuas en el abierto D.

f es de clase C^2 si existen las derivadas parciales segundas y son continuas en el abierto D.

f es de clase C^r si existen las derivadas parciales de orden r y son continuas en el abierto D.

TEOREMA DE SCHWARZ-BONNET.

Si f es de clase C^2 entonces las derivadas iteradas son iguales.

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \text{ es de clase } C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R} \text{ es de clase } C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

CONSECUENCIA:

Si f es de clase C^r entonces las derivadas iteradas de orden r no dependen del orden de las variables respecto a las que se deriva.

Por ejemplo, si $f(x,y)$ es de clase C^3 entonces:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

CLASE 16 PARTE 2: DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE SCHWARZ-BONNET.

Bibliografía de la Clase 16:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafos 30 y 31.**

Ejercicios para las clase 14

- **Práctico 4 del año 2006, ejercicios 2, 3, 15 y 19.**

Sea:

$$\Delta(h,k) \overset{\text{Def.}}{=} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$$

LEMA

Si f es de clase C^2 entonces:

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta(h,k)}$$

Dem.

$$\varphi(t) = f(x_0 + t, y_0 + k) - f(x_0 + t, y_0)$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t, y_0)$$

$$\Delta(h,k) = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot h =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi, y_0)\right] \cdot h$$

$$\psi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi, y_0 + t)$$

$$\psi'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \xi, y_0 + t)$$

$$\frac{\Delta(h,k)}{h} = \psi(k) - \psi(0) = \psi'(\eta) \cdot k =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \xi, y_0 + \eta) \cdot k$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \xi, y_0 + \eta) \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} (\xi, \eta) = (x_0, y_0)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \qquad \square}$$

Dem. del Teorema de Schwarz-Bonnet:

$$\Delta_1(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$$

Lema $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\Delta_1(h,k)}{hk}$

$$\Delta_2(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)$$

Lema $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\Delta_2(h,k)}{hk}$

$$\boxed{\Delta_1(h,k) = \Delta_2(h,k) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \square}$$

CLASE 17 PARTE 1: DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR. Definiciones

Bibliografía de la Clase 17:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 32.

Ejercicios para las clase 17

•Práctico 4 del año 2006

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$ donde D es abierto. Sean dos

pu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_q), \quad a = (a_1, a_2, \ldots, a_q)$

El vector incremento es

$$\Delta \mathbf{x} = x - a = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_q) \qquad \Delta x_i = x_i - a_i$$

DEFINICIÓN. El diferencial primero de f en el punto a es

$$Df(a)\Delta \mathbf{x} = Jf(a) \cdot \Delta \mathbf{x}^t$$

$$Df(a)\Delta \mathbf{x} = \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_q}\right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \ldots \\ \Delta x_q \end{bmatrix}$$

$$Df(a)\Delta \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \Delta x_i$$

DEFINICIÓN: Si f es de clase C^2 se define el diferencial segundo de f en el punto a:

$$D^2 f(a)\Delta\mathbf{x} = D(Df\cdot\Delta\mathbf{x})(a)\cdot(\Delta\mathbf{x})$$

donde '$\Delta\mathbf{x}$' se toma constante al calcular el diferencial $D(Df\cdot\Delta\mathbf{x})$ del diferencial primero.

El diferencial segundo de f en el punto a resulta

$$\boxed{\begin{gathered}D^2 f(a)\Delta\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{q}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\Delta x_i\right)\cdot\Delta x_j \\ D^2 f(a)\Delta\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x_i\,\Delta x_j\end{gathered}}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

DEFINICIÓN: Si f es de clase C^3 se define el diferencial tercero de f en el punto a:

$$D^3 f(a)\Delta\mathbf{x} = D\left(D^2 f \cdot \Delta\mathbf{x}\right)(a) \cdot (\Delta\mathbf{x})$$

donde '$\Delta\mathbf{x}$' se toma constante al calcular el diferencial $D\left(D^2 f \cdot \Delta\mathbf{x}\right)$ del diferencial segundo.

El diferencial tercero de f en el punto a resulta

$$D^3 f(a)\Delta\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j\right)\cdot \Delta x_k$$

$$D^3 f(a)\Delta\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k$$

DEFINICIÓN: Si f es de clase C^r se define el diferencial de orden r de f en el punto a:

$$D^r f(a)\Delta\mathbf{x} = D(D^{r-1} f \cdot \Delta\mathbf{x})(a)\cdot(\Delta\mathbf{x})$$

donde '$\Delta\mathbf{x}$' se toma constante al calcular el diferencial $D(D^{r-1}f\cdot\Delta\mathbf{x})$ del diferencial de orden r-1.

El diferencial de orden r de f en el punto a resulta

$$\boxed{\begin{gathered} D^r f(a)\Delta\mathbf{x} = \\ = \sum_{i_r=1}^{q}\cdots\sum_{i_2=1}^{q}\sum_{i_1=1}^{q}\frac{\partial^r f(a)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_r}}\Delta x_{i_1}\Delta x_{i_2}\ldots\Delta x_{i_r}\end{gathered}}$$

CLASE 17 PARTE 2: DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR. Caso particular para dos variables.

Bibliografía de la Clase 17:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 32.

Ejercicios para las clase 17

•Práctico 4 del año 2006

Si f(x,y) es una función real de dos variables en un abierto D:

Si f es diferenciable, el diferencial primero de f en el punto a es:

$$\boxed{Df(a)\Delta\mathbf{x} = \frac{\partial f(a)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(a)}{\partial y}\Delta y}$$

Si f es de clase C^2, el diferencial segundo de f en el punto a es:

$$D^2 f(a)\Delta\mathbf{x} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2}(\Delta y)^2$$

NOTACIÓN:

$$\boxed{D^2 f(a)\Delta\mathbf{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{(2)} f(a)}$$

Si f es de clase C^3, el diferencial tercero de f en el punto a es

$$D^3 f(a)\Delta\mathbf{x} = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2 \Delta y + 3\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x \partial y^2}\Delta x(\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f(a)}{\partial y^3}(\Delta y)^3$$

NOTACIÓN:

$$\boxed{D^3 f(a)\Delta\mathbf{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{(3)} f(a)}$$

Si f es de clase C^4, el diferencial cuarto de f en el punto a es

$$D^4 f(a)\Delta\mathbf{x} = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x^4}(\Delta x)^4 + 4\frac{\partial^4 f(a)}{\partial x^3 \partial y}(\Delta x)^3 \Delta y +$$

$$+6\frac{\partial^4 f(a)}{\partial x^2 \partial y^2}(\Delta x)^2(\Delta y)^2 + 4\frac{\partial^4 f(a)}{\partial x \partial y^3}\Delta x(\Delta y)^3 + \frac{\partial^4 f(a)}{\partial y^4}(\Delta y)^4$$

NOTACIÓN:

$$\boxed{D^4 f(a)\Delta\mathbf{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{(4)} f(a)}$$

Si f es de clase C^r, el diferencial de orden r de f en el punto a es

$$D^n f(a)\Delta \mathbf{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{(n)} f(a)$$

$$D^n f(a)\Delta \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{\partial^n f(a)}{\partial x^i \partial y^{n-i}} (\Delta x)^i (\Delta y)^{n-i}$$

donde los coeficientes son los números combinatorios que resultan de la fórmula de Newton para potencia n-ésima de un binomio.

$$C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad 0! = 1$$

TRIÁNGULO DE PASCAL Números combinatorios. (Coeficientes del desarrollo del binomio de Newton)

Coeficiente C_i^n de $\frac{\partial^n f(a)}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(\Delta x)^i(\Delta y)^{n-i}$ en el diferencial $n-$ ésimo de f en a, es decir, en $D^n f(a)\Delta\mathbf{x}$, es el término i de la fila n en el siguiente triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C_0^n = 1 & C_1^n & C_2^n & C_i^n & C_{n-2}^n & C_{n-1}^n & C_n^n = 1
\end{array}
$$

CLASE 18 PARTE 1: DESARROLLO DE TAYLOR EN UNA VARIABLE. Enunciado.

Bibliografía de la Clase 18:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 33.

Ejercicios para las clase 18

•Práctico 5 del año 2006

TEOREMA (Desarrollo de Taylor en una variable).

1. Si f(x) es una función de clase C^n entonces:

$$f(p) = f(a) + f'(a)(p-a) + \frac{1}{2}f''(a)(p-a)^2 +$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(a)(p-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(p-a)^4 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(p-a)^n + R_n(p)$$

$$\text{cumpliendo: } \lim_{p\to a} \frac{R_n(p)}{|p-a|^n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_n(p) = \epsilon(p)\,|p-a|^n, \quad \lim_{p\to a} \epsilon(p) = 0$$

FÓRMULA DE LAGRANGE PARA EL RESTO:

Si f es de clase C^{n+1}:

$$\exists\, \xi = a + t(p-a),\ \ t \in (0,1),\quad \text{t. q.}$$

$$R_n(p) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(p-a)^{n+1}$$

EJEMPLO: Calcular el límite L:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - (x+y) - 1}{(x+y)^2}$$

$$u = x + y \quad \Rightarrow \quad L = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - u - 1}{u^2}$$

$$e^u = e^0 + (e^u)'|_{u=0}\, u + \frac{(e^u)''|_{u=0}}{2} u^2 +$$

$$+ \frac{(e^u)'''|_{u=0}}{6} u^3 + \epsilon(u)\, u^3, \qquad \lim_{u\to 0} \epsilon(u) = 0$$

$$e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + \epsilon(u)\, u^3$$

sigue

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Teníamos

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - (x+y) - 1}{(x+y)^2}$$

$$u = x + y \;\Rightarrow\; L = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - u - 1}{u^2}$$

$$\boxed{e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + \epsilon(u)\, u^3}$$

$$L = \lim_{u\to 0} \frac{1 + u + u^2/2 + u^3/6 + \epsilon(u)\, u^3 - u - 1}{u^2} =$$

$$L = \lim_{u\to 0} 1/2 + u/6 + u\,\epsilon(u) = 1/2$$

$\square$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE 18 PARTE 2: DESARROLLO DE TAYLOR EN UNA VARIABLE. Demostración

Bibliografía de la Clase 18:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 33.

Ejercicios para las clase 18

•Práctico 5 del año 2006

Dem. del teorema de desarrollo de Taylor en una variable:
Por inducción completa en n.

Si $n = 1$, $f \in C^1$, $\Rightarrow$ f es diferenciable

$$\Rightarrow \quad f(p) = f(a)+f'(a)(p-a)+\epsilon(p)|p-a|, \quad \lim_{p\to a} \epsilon(p) = 0$$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN:

$$\forall\, g \in C^{n-1}:$$

$$g(p) = g(a)+g'(a)(p-a)+\ldots+\frac{g^{(n-1)(a)}}{(n-1)!}(p-a)^{n-1}+R_{n-1}(p)$$

$$\text{donde} \quad \lim_{p\to a} \frac{R_{n-1}(p)}{|p-a|^{n-1}} = 0$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

TESIS DE INDUCCIÓN, a probar:

$$\forall\, f \in C^n :$$

$$f(p) = f(a) + f'(a)(p-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)(a)}}{n!}(p-a)^n + R_n(p)$$

$$\text{donde } \lim_{p \to a} \frac{R_n(p)}{|p-a|^n} = 0$$

Dem.

$$f \in C^n \quad \Rightarrow \quad g = f' \in C^{n-1}$$

Hipótesis de inducción $\Rightarrow$:

$$f'(p) = f'(a) + f''(a)(p-a) + \ldots + \frac{f^{i+1}(a)}{i!}(p-a)^i +$$

$$+ \ldots + \frac{f^n(a)}{(n-1)!}(p-a)^{n-1} + R_{n-1}(p)$$

$$\text{donde } \lim_{p \to a} \frac{R_{n-1}(p)}{|p-a|^{n-1}} = 0$$

sigue

Teníamos:

$$f'(p) = f'(a) + f''(a)(p-a) + \ldots + \frac{f^{i+1}(a)}{i!}(p-a)^i +$$

$$+ \ldots + \frac{f^n(a)}{(n-1)!}(p-a)^{n-1} + R_{n-1}(p)$$

$$\text{donde} \quad \lim_{p \to a} \frac{R_{n-1}(p)}{|p-a|^{n-1}} = 0$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Integrando respecto de la variable real p, en el intervalo desde a hasta p:

$$f(p) - f(a) = f'(a)p + \frac{f''(a)}{2}(p-a)^2 + \ldots + \frac{f^{i+1}(a)}{(i+1)!}(p-a)^{i+1} +$$

$$+ \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(p-a)^n + \int_a^p R_{n-1}(p)\,dp$$

$$\text{Llamando } R_n(p) = \int_a^p R_{n-1}(p)\,dp \qquad (1)$$

$$R_n(p) = R_{n-1}(\xi)(p-a), \quad \xi \in (a,p)$$

$$\lim_{p \to a} \frac{R_n(p)}{|p-a|^n} = \lim_{p \to a} \frac{R_{n-1}(\xi)}{|p-a|^{n-1}} \frac{(p-a)}{|p-a|} = 0 \qquad \square$$

Dem. de la fórmula de Lagrange en una variable:

Por inducción completa en n.

Si n=0 es el teorema del valor medio del cálculo diferencial en una variable:

$$\boxed{R_0(p) = f(p) - f(a) = f'(\xi)\,(p-a)}$$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN.

$$\forall\, g \in C^n:$$

$$R_{n-1,g}(p) = \frac{g^{(n)}(\xi_1)}{n!}(p-a)^n, \quad \xi_1 = a+t_1(p-a), \quad t_1 \in (0,1)$$

TESIS DE INDUCCIÓN.

$$\forall\, f \in C^{n+1}$$

$$R_{n,f}(p) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(p-a)^{n+1}, \quad \xi = a+t(p-a), \quad t \in (0,1)$$

Usando la hipótesis de inducción para el resto $R_{n-1,f'}$ de la función f':

$$R_{n-1,f'}(p) = \frac{(f')^{(n)}(\xi_1)}{n!}(p-a)^n, \text{ donde:}$$

$$\xi_1 = a + t_1(p-a), \quad t_1 \in (0,1)$$

$$\boxed{\text{Llamando } R_n(p) = \int_a^p R_{n-1}(p)\, dp \qquad (1)}$$

$$R_{n,f}(p) = \int_a^p R_{n-1,f'}(p)\, dp = \int_a^p \frac{(f')^{(n)}(\xi_1)}{n!}(p-a)^n\, dp =$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) \int_a^p \frac{1}{n!}(p-a)^n\, dp = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(p-a)^{n+1},$$

$$\text{donde : } \xi = a + t(p-a), \; t \in (0,1) \quad \square$$

CLASE 19 PARTE 1:
DESARROLLO DE TAYLOR
EN VARIAS VARIABLES. Enunciado.

Bibliografía de la Clase 19:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 33.

Ejercicios para las clase 19

•Práctico 5 del año 2006

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$. donde D es abierto,
a es un punto de D, y sea $B_\delta(a) \subset D$.
Para todo punto $\forall p \in B_\delta(a)$ se cumple:

TEOREMA. Desarrollo de Taylor en varias variables.

Si f es de clase C^n entonces:

$$f(p) = f(a) + Df(a)(p-a) + \frac{1}{2!}D^2 f(a)(p-a)^2 +$$

$$+\frac{1}{3!}D^3 f(a)(p-a)^3 + \frac{1}{4!}D^4 f(a)(p-a)^4 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}D^n f(a)(p-a)^n + R_n(p) \quad \text{donde:}$$

$$\lim_{p\to a} \frac{R_n(p)}{||p-a||^n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_n(p) = \epsilon(p)\,||p-a||^n, \quad \lim_{p\to a} \epsilon(p) = 0$$

DEFINICIÓN. Polinomio de Taylor de grado $\leq n$ de f(p) en torno de p=a es:

$$P_n(p) = f(a) + Df(a)(p-a) + \frac{1}{2!}D^2 f(a)(p-a)^2 + \\ + \frac{1}{3!}D^3 f(a)(p-a)^3 + \frac{1}{4!}D^4 f(a)(p-a)^4 + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}D^n f(a)(p-a)^n$$

Por el teorema de desarrollo de Taylor:

$$f(p) - P_n(p) = R_n(p)$$

$$R_n(p) = \epsilon(p)\,||p-a||^n$$

$R_n(p)$ **es el error cometido al sustituir f(p) por el polinomio de Taylor. Es un infinitésimode orden mayor que**

$$||p-a||^n \text{ cuando } p \to a.$$

FÓRMULA DE LAGRANGE PARA EL RESTO.

Vale para funciones reales.

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$$

$$D \text{ abierto de } \mathbb{R}^q, \quad a \in D, \quad B_\delta(a) \subset D$$

Si $f \in C^{n+1}$:

$$R_n(p) = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} f(\xi)\,(p-a)^{n+1}$$

$$\text{donde } \xi = a + t(p-a), \; t \in (0,1)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

CASO PARTICULAR:
Función real de dos variables reales

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$D \text{ abierto de } \mathbb{R}^2, \quad a = (x_0, y_0) \in D, \quad B_\delta(a) \subset D$$

Si f es de clase C^4:

$$\forall\, p = (x, y) \in B_\delta(a) : \quad \Delta p = p - a = (x - x_0, y - y_0),$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x\,(x - x_0) + f_y\,(y - y_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}\,(x - x_0)^2 + 2f_{xy}\,(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}\,(y - y_0)^2 \right) +$$
$$+\frac{1}{6}\left(f_{xxx}\,(x - x_0)^3 + 3f_{xxy}\,(x - x_0)^2(y - y_0) + \right.$$
$$\left. +3f_{xyy}\,(x - x_0)(y - y_0)^2 + f_{yyy}\,(y - y_0)^3 \right) +$$
$$+\frac{1}{24}\left(f_{xxxx}\,(x - x_0)^4 + 4f_{xxxy}\,(x - x_0)^3(y - y_0) + \right.$$
$$+6f_{xxyy}\,(x - x_0)^2(y - y_0)^2 + 4f_{xyyy}\,(x - x_0)(y - y_0)^3 +$$
$$\left. + f_{yyyy}\,(y - y_0)^4 \right) + R_4(x,y)$$

$$\text{donde} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_4(x,y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|^4} = 0$$

CLASE 19 PARTE 2: DESARROLLO DE TAYLOR EN VARIAS VARIABLES. Ejemplo.

Bibliografía de la Clase 19:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 33.**

Ejercicios para las clase 19

- **Práctico 5 del año 2006**

EJEMPLO. Hallar el polinomio de Taylor hasta grado 3 en torno de (0,0) de la función $\boxed{f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x^2+1}}$

$$P_3(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{x^2}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{y^2}(0,0)y^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(f_{x^3}(0,0)x^3+3f_{x^2y}(0,0)x^2y+\right.$$

$$\left.+3f_{xy^2}(0,0)xy^2+f_{y^3}(0,0)y^3\right).$$

$$f(0,0)=0,\quad f_x(0,0)=0,\quad f_y(0,0)=1,$$

$$f_{xy}(0,0)=0,\quad f_{xy}(0,0)=0,\quad f_{yy}(0,0)=0$$

$$f_{x^3}(0,0)=0,\quad f_{x^2y}(0,0)=-2,$$

$$f_{xy^2}(0,0)=0,\quad f_{y^3}(0,0)=-2$$

$$P_3(x,y) = 0 + 0x + 1y + \frac{1}{2}(0x^2 + 0xy + 0y^2) +$$

$$+\frac{1}{6}(0x^3 + 3 \times (-2)x^2y + 3 \times 0xy^2 - 2y^3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_3(x,y) = y - x^2y - \frac{y^3}{3} \quad \square}$$

OTRA FORMA. La serie geométrica de razón u es:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \ldots$$

$$u = -v^2 \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+v^2} = 1 - v^2 + v^4 - v^6 + \ldots$$

Integrando en v
para v en el intervalo [0,1]

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} v = v - v^3/3 + v^5/5 - v^7/7 + \ldots}$$

Teníamos:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} v = v - v^3/3 + v^5/5 - v^7/7 + \ldots}$$

Por otro lado: $\dfrac{y}{x^2+1} = y\dfrac{1}{x^2+1} = y\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\right)$

$$\frac{y}{x^2+1} = y - yx^2 + yx^4 - yx^6 + \ldots$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(y - yx^2 + yx^4 - yx^6 + \ldots)$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x^2+1} = (y - yx^2 + yx^4 - yx^6 + \ldots) - (y - yx^2 + yx^4 - yx^6 + \ldots)^3/3 + \ldots$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x^2+1} = (y - yx^2 + yx^4 - yx^6 + \ldots) - (y^3 + \ldots)/3 + \ldots$$

sigue

$$
\begin{cases}
\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x^2+1} = y - yx^2 - y^3/3 + \dots \\[2ex]
P_3(x,y) = y - yx^2 - \dfrac{y^3}{3} \quad \square
\end{cases}
$$

CLASE 19 PARTE 3: DESARROLLO DE TAYLOR EN VARIAS VARIABLES. Demostración.

Bibliografía de la Clase 19:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 33.**

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Ejercicios para las clase 19

- **Práctico 5 del año 2006**

Cálculo Diferencial e Integral II. Eleonora Catsigeras.
IMERL. Fac. de Ingeniería. UdelaR. J. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay. Setiembre 2006.

Dem. del desarrollo de Taylor para varias variables.

Sea fijo un punto $p_1 \in \partial B_\delta(a)$

Definimos la siguiente función auxiliar en una sola variable real t, y calculamos sus derivadas

$$
(1) \quad \begin{cases}
\varphi_{p_1}(t) = f(a+t(p_1-a)) = f(u(t)), \quad u(t) = a+t(p_1-a) \\
\varphi'(t) = Df(u(t)) \cdot u'(t) = Df(u(t)) \cdot (p_1 - a) \\
\varphi''(t) = D(Df(u(t)) \cdot (p_1-a)) \cdot (p_1-a) = D^2 f(u(t))(p_1-a) \\
\varphi'''(t) = D(D^2 f(u(t))(p_1-a)) \cdot (p_1-a) = D^3 f(u(t))(p_1-a) \\
\varphi^{(n)}(t) = D^n f(u(t))(p_1-a)
\end{cases}
$$

$$\boxed{f \in C^n \Rightarrow \varphi(t) \in C^n.}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

sigue

Aplicando el desarrollo de Taylor de $\varphi(t)$ en una sola variable t:

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + R_n^*(t)$$

donde

$$\lim_{t \to 0} \frac{R_n^*(t)}{|t|^n} = 0$$

Dado $p = a + t(p_1 - a)$ **llamemos** $\boxed{R_n(p) = R_n^*(t)}$

(1) $\Rightarrow$

$$\varphi(t) = f(p), \quad \varphi(0) = f(a)$$

$$\varphi^{(n)}(0)t^n = D^n f(a)\,(p_1 - a) \cdot t^n = D^n f(a)[t(p_1 - a)]$$

$$\varphi^{(n)}(0)t^n = D^n f(a)\,(p - a)$$

sigue

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} f(p) = f(a) + Df(a)(p-a) + \frac{1}{2!}D^2 f(a)(p-a) + \\ + D^n f(a)(p-a) + R_n(p) \end{gathered}}$$

A probar que $$\boxed{\lim_{p \to a} \frac{R_n(p)}{||p-a||^n} = 0}$$

Fórmula de Lagrange, que probamos después para el resto $R_{n-1,j}(p)$

de cada una de las coordenadas f_j **de f** $\Rightarrow$

$$\exists\, \xi \in [a,p] \text{ t.q. } R_{n-1,j}(p) = Df_j^n(\xi)(p-a)$$

$$R_{n,j}(p) = R_{n-1,j}(p) - Df_j^n(a)(p-a) \Rightarrow$$

$$R_{n,j}(p) = (Df_j^n(\xi) - Df_j^n(a))(p-a)$$

$$\frac{R_{n,j}(p)}{||p-a||^n} = \frac{(Df_j^n(\xi) - Df_j^n(a))(p-a)}{||p-a||^n}$$

Teníamos:

$$\boxed{\frac{R_{n,j}(p)}{\|p-a\|^n} = \frac{(Df_j^n(\xi) - Df_j^n(a))(p-a)}{\|p-a\|^n}}$$

$Df_j^n(\xi)(p-a)$ y $Df_j(a)(p-a)$ son polinomios de grado n en las q componentes $x_i - a_i$ del vector $p-a$.

$(x_i - a_i)/\|p-a\|$ está acotado.

$\lim_{p \to a} Df_j^n(\xi) - Df_j^n(a) = 0$ porque f es de clase C^n y $\xi \in [a,p]$.

$$\lim_{p \to a} \frac{(Df_j^n(\xi) - Df_j^n(a))(p-a)}{\|p-a\|^n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{p \to a} \frac{R_{n,j}(p)}{\|p-a\|^n} = 0 \quad \square$$

Dem. Fórmula de Lagrange para el resto en varias variables.

Si $f \in C^{n+1}$:

$$R_n^*(t) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad \theta \in (0,t)$$

$$R_n(p) = R_n^*(t), \quad p - a = t(p_1 - a),$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = D^{n+1} f(\xi)(p_1 - a), \quad \xi = a + \theta(p_1 - a), \quad \theta \in (0,t),$$

$$p = a + t(p_1 - a) \Rightarrow \xi \in [a, p]$$

$$R_n(p) = \frac{D^{n+1} f(\xi)(p_1 - a) \cdot t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{D^{n+1} f(\xi)(p - a)}{(n+1)!} \quad \square$$

CLASE 20 PARTE 1:
FUNCIÓN IMPLÍCITA. Definición.
Caso de una sola ecuación.

Bibliografía de la Clase 20:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.1, parágrafo 35.

Ejercicios para las clase 20

•Práctico 6 del año 2006. Ejercicios 1, 2 y 4 hasta 10.

Cálculo Diferencial e Integral II. Eleonora Catsigeras.
IMERL. Fac. de Ingeniería. UdelaR. J. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay. Setiembre 2006.

Dada una ecuación en dos variables $\boxed{F(x,y)=0}$;

y dado un punto (x_0, y_0) que la verifica: $\boxed{F(x_0, y_0)=0}$

se llama **FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL EN TORNO DEL PUNTO** (x_0, y_0) a $\boxed{y=f(x)}$ tal que:

$$\boxed{y_0 = f(x_0), \quad F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in B_\delta(x_0)}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

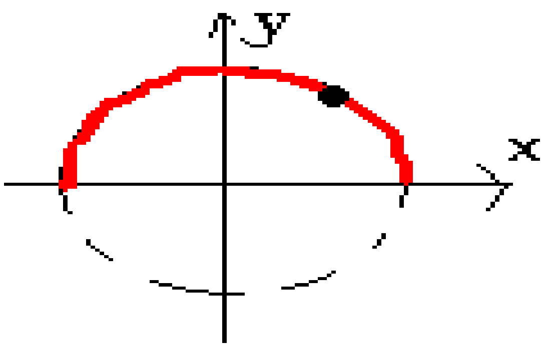
EJEMPLO DE FUNCIÓN IMPLÍCITA EN UNA ECUACIÓN.

Sea la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4 = 0$

Pasa por el punto $(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

La curva circunferencia, alrededor del punto dado, es la gráfica de una función implícita en la ecuación La función es (despejando y en función de x, de modo que pase por el punto dado):

$$y = \sqrt{4 - x^2} = f(x), \quad \forall\, x \text{ t.q. } -2 \leq x \leq 2$$



Se cumple:

$$f(2/\sqrt{2}) = 2/\sqrt{2}, \quad x^2 + [f(x)]^2 - 4 = 0 \;\; \forall\, x \text{ t.q. } -2 \leq x \leq 2$$

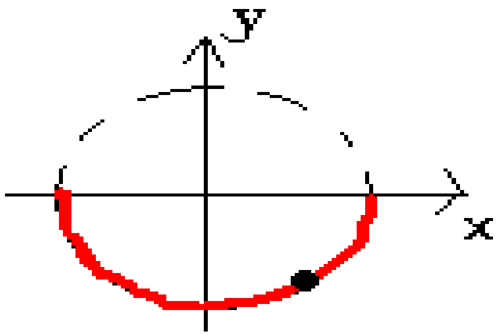
La misma ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Pasa por el punto $(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

La curva circunferencia, alrededor del punto dado, es la gráfica de una función implícita en la ecuación
La función es (despejando y en función de x, de modo que pase por el punto dado):

$$y = -\sqrt{4 - x^2} = f(x), \quad \forall x \text{ t.q. } -2 \le x \le 2$$



Se cumple:

$$f(2/\sqrt{2}) = 2/\sqrt{2}, \quad x^2 + [f(x)]^2 - 4 = 0 \ \forall x \text{ t.q. } -2 \le x \le 2$$

Dada una ecuación en tres variables

$$\boxed{F(x, y, z) = 0,}$$

y dado un punto (x_0, y_0, z_0) que la verifica:

$$\boxed{F(x_0, y_0, z_0) = 0}$$

se llama FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL EN TORNO DEL PUNTO (x_0, y_0, z_0) a $\boxed{z = f(x, y)}$ tal que:

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad F(x, y, f(x, y)) = 0 \ \forall (x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$$

EJEMPLO DE FUNCIÓN IMPLÍCITA EN UNA ECUACIÓN.

Sea la ecuación de la superficie esférica:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0}$$

Pasa por el punto $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

La sup. esférica, alrededor del punto dado,
es la gráfica de una función implícita en la ecuación
La función es (despejando z en función de x e y,
de modo que pase por el punto dado):

$$\boxed{z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \ \forall (x, y) \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1}$$

En cambio, la misma ecuación, por este otro punto:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

define como función implícita esta otra:

$$\boxed{z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \ \forall (x, y) \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1}$$

Dada una ecuación en q +1 variables

$$\boxed{F(x_1, x_2, \ldots, x_q, y) = 0,}$$

y dado un punto $(a_1, a_2, \ldots, a_q, b)$ que la verifica:

$$\boxed{F(a_1, a_2, \ldots, a_q, b) = 0}$$

se llama FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL EN TORNO DEL PUNTO $(a_1, a_2, \ldots, a_q, b)$ a

$$\boxed{y = f(x_1, x_2, \ldots, x_q) \forall \mathbf{x} \in B_\delta(a)}$$

tal que:

$$b = f(a_1, a_2, \ldots, a_q), \quad F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0 \ \forall \ \mathbf{x} \in B_\delta(a)$$

CLASE 20 PARTE 2: TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL. Enunciado. Caso de una sola ecuación.

Bibliografía de la Clase 20:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.1, parágrafo 35.**

Ejercicios para las clase 20

- **Práctico 6 del año 2006. Ejercicios 1, 2 y 4 hasta 10.**

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL
(Caso de una sola ecuación).

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

HIPÓTESIS

Sea dada $F : U \subset \mathbb{R}^{q+1} \mapsto \mathbb{R};$ en U abierto,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_q, y)$$

y un punto $(a_1, a_2, \ldots, a_q, b)$ en U,
tales que:

1. $$\boxed{F(a_1, a_2 \ldots, a_q, b) = 0}$$

2. F es diferenciable en U

3. En U: $$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \ldots, x_q, y) \neq 0}$$

TESIS

1. Existe función implícita local en torno del punto dado.

Es decir: existe

$$\boxed{y = f(x_1, x_2, \ldots, x_q) \ \forall \mathbf{x} \in B_\delta(a)}$$

tal que

1a) $f(a_1, a_2, \ldots, a_q) = \bar{b}$

1b) $F(x_1, x_2, \ldots, x_q, f(x_1, x_2, \ldots, x_q)) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in B_\delta(a)$

2. La función implícita f es diferenciable.

3. $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial y}}$$

4. Si F es C^r entonces f también es C^r.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE 20 PARTE 3: TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL. Demostración. Caso de una sola ecuación.

Bibliografía de la Clase 20:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.1, parágrafo 35.**

Ejercicios para las clase 20

- **Práctico 6 del año 2006. Ejercicios 1, 2 y 4 hasta 10.**

Dem. del teorema de la función implícita (una sola ecuación).

Paso 1. Existencia y unicidad de f

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \neq 0 \quad \text{es } > 0 \text{ o es } < 0$$

Para fijar ideas suponemos que es positiva.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_q, y) \uparrow \text{ con } y \text{ cuando } (x_1, x_2, \ldots, x_q) \text{ es cte.}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(a_1, a_2, \ldots, a_q, y) \uparrow \ \forall y \in [b-\epsilon, b+\epsilon] \\ F(a_1, a_2, \ldots, a_q, b) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F(a_1, \ldots, a_q, b+\epsilon) > 0, \\ F(a_1, \ldots, a_q, b-\epsilon) < 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} F(a_1, \ldots, a_q, b+\epsilon) > 0; \\ F(a_1, \ldots, a_q, b-\epsilon) < 0 \\ F \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (x_1, x_2, \ldots, x_q) \in B_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_q) \Rightarrow \\ F(x_1, \ldots, x_q, b+\epsilon) > 0, \\ F(x_1, \ldots, x_q, b-\epsilon) < 0 \end{array}$$

Teníamos:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_q) \in B_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_q) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x_1, \ldots, x_q, b+\epsilon) > 0, \\ F(x_1, \ldots, x_q, b-\epsilon) < 0 \\ F \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \exists!\, y = f(x_1, x_2, \ldots, x_q) \in [b-\epsilon, b+\epsilon] \text{ t.q.} \\ F(x_1, x_2 \ldots, x_q, f(x_1, \ldots, x_q)) = 0 \\ \text{Por la unicidad: } f(a_1, \ldots, a_q) = b \end{array}}$$

PASO 2. CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA f.

Hemos construido en el paso 1, la función implícita f tal que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que cumple:

$$(x_1, \ldots, x_q) \in B_\delta(a_1, \ldots, a_q) \Rightarrow$$

$$f(x_1, \ldots, x_q) = y \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$$

Por definición, f es continua en a.
En vez de a puede usarse p genérico.

PASO 3. Diferenciabilidad y derivadas parciales de f.

$$\mathbf{x} \in B_\delta(a), \quad \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - a, \quad ||\Delta\mathbf{x}|| < \delta$$

$$F(\mathbf{x}, y) - F(a, b) = DF(a, b)(\Delta\mathbf{x}, y - b) + \epsilon(\mathbf{x}, y)||\Delta\mathbf{x}, y - b||$$

$$y = f(\mathbf{x}) \Rightarrow F(\mathbf{x}, y) = 0 \Rightarrow$$

$$0 = DF(a, b)(\Delta\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - b) + \epsilon(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))||\Delta\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - b||$$

$$\epsilon_1(\mathbf{x}) = \epsilon_2(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\,||\Delta\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - b||}{||\Delta\mathbf{x}|| + |f(\mathbf{x}) - b|} \Rightarrow$$

$$0 = DF(a, b)(\Delta\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - b) + \epsilon_1(\mathbf{x})||\Delta\mathbf{x}|| + \epsilon_2(\mathbf{x})|f(\mathbf{x}) - b|$$

$$0 = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F(a, b)}{\partial x_i}(x_i - a_i) + \frac{\partial F(a, b)}{\partial y}(f(\mathbf{x}) - b) +$$

$$+\epsilon_1(\mathbf{x})||\Delta\mathbf{x}|| + \underbrace{\epsilon_2(\mathbf{x})\frac{|f(\mathbf{x}) - b|}{f(\mathbf{x}) - b}}_{=\epsilon_3(\mathbf{x})}(f(\mathbf{x}) - b)$$

sigue

Teníamos

$$0=\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial F(a,b)}{\partial x_i}(x_i-a_i)+\frac{\partial F(a,b)}{\partial y}(f(\mathbf{x})-b)+$$

$$+\epsilon_1(\mathbf{x})||\Delta\mathbf{x}||+\underbrace{\epsilon_2(\mathbf{x})\frac{|f(\mathbf{x})-b|}{f(\mathbf{x})-b}}_{=\epsilon_3(\mathbf{x})}(f(\mathbf{x})-b)$$

Despejando f(x) – b :

$$f(\mathbf{x})-b=\frac{-1}{\partial F(a,b)/\partial y+\epsilon_3(\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial F(a,b)}{\partial x_i}(x_i-a_i)+\epsilon_1(\mathbf{x})||\Delta\mathbf{x}||$$

$$f(\mathbf{x})-b=\left(\frac{-1}{\partial F(a,b)/\partial y}+\epsilon_4(\mathbf{x})\right)\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial F(a,b)}{\partial x_i}(x_i-a_i)+\epsilon_1(\mathbf{x})||\Delta\mathbf{x}||$$

$$f(\mathbf{x}) - b = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F/\partial x_i}{-\partial F/\partial y}(x_i - a_i) +$$

$$+\left(\epsilon_4(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{x_i - a_i}{||\Delta \mathbf{x}||} + \epsilon_1(\mathbf{x})\right) ||\Delta \mathbf{x}||$$

Llamando: $\epsilon_5(\mathbf{x}) = \epsilon_4(\mathbf{x})) \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{x_i - a_i}{||\Delta \mathbf{x}||} + \epsilon_1(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow$

$$f(\mathbf{x}) - f(a) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F/\partial x_i}{-\partial F/\partial y}(x_i - a_i) + \epsilon_5(\mathbf{x})\,||\Delta \mathbf{x}||$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to a} \epsilon_5(\mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow$$

Lo anterior prueba que f es diferenciable en a y que sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial y}$$

El mismo razonamiento puede hacerse para cualquier punto p donde la función implícita esté definida, en vez de a.

PASO 5. Probar que si F es de clase C^r, con $r \geq 1$

entonces la función implícita f también lo es.

Si F es de clase C^r, con $r \geq 1$ entonces $\partial F/\partial x_i$ y $\partial F/\partial y \neq 0$ son de clase C^{r-1}.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial y}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ es de clase $C^{r-1} \Rightarrow f$ es de clase C^r. $\square$

CLASE 20 PARTE 4: TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL. Ejemplo. Caso de una sola ecuación.

Bibliografía de la Clase 20:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.1, parágrafo 35.

Ejercicios para las clase 20

•Práctico 6 del año 2006. Ejercicios 1, 2 y 4 hasta 10.

EJEMPLO

Calcular $f'(1)$ y $f''(1)$ de la función implícita local $y = f(x)$ en torno del punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$ dada por la ecuación

$$x^2 y + \log(xy) = 2 + \log 2$$

Ecuación implícita:

$$\boxed{F(x,y) = 0, \quad F(x,y) = x^2 y + \log(xy) - 2 - \log 2}$$

$\partial F/\partial y = x^2 + 1/y > 0$ en un entorno U de $(x_0, y_0) = (1,2)$

pues $\partial F/\partial y(1,2) = 1 + 1/2 = 3/2 > 0$

Por el teorema de la función implícita local existe y = f(x) tal que:

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x^2 f(x) + \log(x f(x)) = 2 + \log 2 \quad \forall x \in B_\delta(1)$$

Teníamos:

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x^2 f(x) + \log(x f(x)) = 2 + \log 2 \quad \forall x \in B_\delta(1)$$

Derivando respecto de x en x=1; f(1) = 2

$$2x f(x) + x^2 f'(x) + \frac{1}{x f(x)}\left(f(x) + x f'(x)\right) = 0 \quad (1)$$

$$2f(1) + 1^2 f'(1) + \frac{f(1) + f'(1)}{1 f(1)} = 0$$

$$4 + f'(1) + \frac{2 + f'(1)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{10}{3}$$

Teníamos:

$$\boxed{2xf(x)+x^2f'(x)+\frac{1}{xf(x)}\left(f(x)+xf'(x)\right)=0 \quad (1)}$$

Derivando (1) nuevamente respecto de x, en x=1, f(1)= 2

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)+$$
$$\frac{[2f'(x)+xf''(x)]xf(x)-[f(x)+xf'(x)]^2}{x^2(f(x))^2}=0$$

$$4-\frac{40}{3}+f''(1)+\frac{(-40/3)+2f''(1)-[2-(10/3)]^2}{4}=0$$

$$-\frac{28}{3}+f''(1)-\frac{34}{9}+\frac{f''(1)}{2}=0$$

$$\frac{3}{2}f''(1)=\frac{118}{9} \quad \Rightarrow \quad f''(1)=\frac{236}{27} \quad \square$$

CLASE 21 PARTE 1:
FUNCIÓN IMPLÍCITA. Definición.
Caso de varias ecuaciones.

Bibliografía de la Clase 21:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.1, parágrafo 36.

Ejercicios para las clase 21

•Práctico 6 del año 2006.

Sea dada una función vectorial: $F : U \subset \mathbb{R}^{q+s} \mapsto \mathbb{R}^s$

en un abierto U.

Sea dado un punto (a,b) en U que verifica la ecuación F(a,b) = 0. Es decir:

$$(a, b) \in U,\ a \in \mathbb{R}^q,\ b \in \mathbb{R}^s \text{ t.q. } F(a, b) = 0$$

Se considera la ecuación F(x,y) = 0, que significa un SISTEMA DE s ECUACIONES REALES con s+q variables.

$$\boxed{\begin{array}{c} F(x, y) = 0 \\ \Updownarrow \\ \begin{array}{c} F_1(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_s) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_s) = 0 \\ \vdots \\ F_s(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_s) = 0 \end{array} \end{array}}$$

Interesa encontrar las s variables

$$y_1, y_2, \ldots, y_s$$

en función de las q variables independientes

$$x_1, \ldots, x_q.$$

de modo que verifique el sistema de s ecuaciones reales dado.

DEFINICIÓN. **Se llama función implícita local en torno del punto (a,b) a**

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$f : B_\delta(a) \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$$

tal que

$$\boxed{\begin{gathered} F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0 \;\forall\, \mathbf{x} \in B_\delta(a) \\ f(a) = b \end{gathered}}$$

CASO PARTICULAR Sea dada $F:\mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}$

Tenemos la ecuación: $\boxed{F(x,y,z,u,v)=0}$

Dados $a=(x_0,y_0,z_0)$ y $b=(u_0,v_0)$ tales que:

$$F(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)=0$$

ver si existe $\boxed{(u,v)=f(x,y,z)\ \forall (x,y,z)\in B_\delta(a)}$

tal que:

$$F_1(x,y,z,f_1(x,y,z),f_2(x,y,z))=0\ \forall (x,y,z)\in B_\delta(a)$$
$$F_2(x,y,z,f_1(x,y,z),f_2(x,y,z))=0\ \forall (x,y,z)\in B_\delta(a)$$

$$f_1(x_0,y_0,z_0)=(u_0,v_0)$$
$$f_2(x_0,y_0,z_0)=(u_0,v_0)$$

CLASE 21 PARTE 2: TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL . Enunciado. Caso de varias ecuaciones.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Bibliografía de la Clase 21:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.1, parágrafo 36.**

Ejercicios para las clase 21

- **Práctico 6 del año 2006.**

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL.
(Caso de un sistema de varias ecuaciones reales)

HIPÓTESIS. Sea dada

$$F : U \subset \mathbb{R}^{q+s} \mapsto \mathbb{R}^{s},$$

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F(x_1, x_2, \dots, x_q, y_1, \dots, y_s) =$$
$$= (F_1(\mathbf{x},\mathbf{y}), F_2(\mathbf{x},\mathbf{y}), \dots, F_s(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

en un abierto U, y sea dado un punto (a,b) en U tal que

1. $F(a,b) = F(a_1, a_2 \dots, a_q, b_1, \dots, b_s) = 0$
2. **F es diferenciable en U**
3. **En U es diferente de 0 el determinante de la matriz** $J_y F$

formada por las derivadas pa $y_1, y_2, \dots, y_s$ **a**

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_s}{\partial y_1} & \frac{\partial F_s}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_s}{\partial y_s} \end{pmatrix} \neq 0$$

TESIS

1. Existe única la función inversa local y = f(x) en torno de (a,b). Es decir:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \text{ está definida para } \mathbf{x} \in B_\delta(a).$$

$$f(a) = b$$

$$F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0 \; \forall \, \mathbf{x} \in B_\delta(a)$$

2. f es diferenciable en $B_\delta(a)$

3. La matriz Jacobiana de f es

$$\boxed{Jf(\mathbf{x}) = -(J_y F)^{-1} \cdot (J_x F) \quad \text{en } B_\delta(a)}$$

4. Si F es de clase C^r entonces f también.

CLASE 21 PARTE 3: TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL . Demostración. Caso de varias ecuaciones.

Bibliografía de la Clase 21:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.1, parágrafo 36.**

Ejercicios para las clase 21

- **Práctico 6 del año 2006.**

Cálculo Diferencial e Integral II. Eleonora Catsigeras.
IMERL. Fac. de Ingeniería. UdelaR. J. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay. Setiembre 2006.

Demostración del teorema de la función implícita local en el caso de un sistema de varias ecuaciones.

Dem. de 3) admitiendo 1) y 2)

$$H(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$$

$$\Rightarrow \quad JH = 0 \;\; \Rightarrow JF_{\mathbf{x}} + JF_y \cdot Jf = 0$$

$$\Rightarrow \;\; (JF_y)^{-1} JF_{\mathbf{x}} + Jf = 0$$

$$\Rightarrow \;\; Jf = -(JF_y)^{-1} JF_{\mathbf{x}} \;\; \square$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Dem. de 4) admitiendo 3)

$$F \text{ es } C^r,\ r \geq 1 \quad \Rightarrow$$

$$JF_{\mathbf{x}} \text{ y } JF_y \text{ (invertible) son } C^{r-1}$$

$$\Rightarrow \quad Jf = -(JF_y)^{-1} JF_{\mathbf{x}} \text{ es } C^{r-1}$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ es } C^r \quad \square$$

Dem. de 1) y 2): Por inducción completa en s.
Si s=1 es el caso de una sola ecuación visto en la clase anterior.
HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: 1) y 2) son verdaderas para s-1 ecuaciones y s-1 variables dependientes

$$(y_2, y_3, \ldots, y_s)$$

TESIS DE INDUCCIÓN: 1) y 2) son verdaderas para s ecuaciones y s variables dependientes

$$(y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

Desarrollando por la primera fila el determinante de la matriz $J_y F$ que es no nulo por hipótesis:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} A_{11} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} A_{12} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_s} A_{1s} \neq 0$$

Alguno de los $A_{1j} \neq 0$. Para fijar ideas suponemos $\boxed{A_{11} \neq 0}$

Por hipótesis de inducción:

Dadas las s-1 últimas ecuaciones

$$F_2(\mathbf{x}, y_1, y_2, \ldots, y_s) = 0$$
$$F_3(\mathbf{x}, y_1, y_2, \ldots, y_s) = 0$$
$$\ldots$$
$$F_s(\mathbf{x}, y_1, y_2, \ldots, y_s) = 0$$

Existen

$$y_2 = f_2^*(\mathbf{x}, y_1)$$
$$y_3 = f_3^*(\mathbf{x}, y_1)$$
$$\ldots$$
$$y_s = f_s^*(\mathbf{x}, y_1)$$

para

$$(\mathbf{x}, y_1) \in B_{\delta_1}(a, b_1)$$

tales que

$$\text{Para } j = 2, 3, \ldots, s:$$

$$F_j(\mathbf{x}, y_1, f_2^*(\mathbf{x}, y_1), \ldots, f_s^*(\mathbf{x}, y_1)) = 0$$

$$\forall\ (\mathbf{x}, y_1) \in B_{\delta_1}(a, b_1) \quad \Rightarrow$$

Derivando respecto de x:

$$\boxed{0 = \frac{\partial F_j}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{s} \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_i^*}{\partial y_1}, \quad j = 2, 3, \ldots, s \quad (1)}$$

Sólo falta conseguir que se verifique la primera ecuación:

$$\boxed{G(\mathbf{x}, y_1) = F_1(\mathbf{x}, y_1, f_2^*(\mathbf{x}, y_1), f_3^*(\mathbf{x}, y_1), \ldots, f_s^*(\mathbf{x}, y_1)) = 0}$$

Sólo falta conseguir que se verifique la primera ecuación:

$$G(\mathbf{x}, y_1) = F_1(\mathbf{x}, y_1, f_2^*(\mathbf{x}, y_1), f_3^*(\mathbf{x}, y_1), \ldots, f_s^*(\mathbf{x}, y_1)) = 0$$

Aplicando el teorema de función implícita en el caso de una sola ecuación con una sola variable independiente y_1

se obtiene $y_1 = f_1(\mathbf{x})$ **que verifica** $G(\mathbf{x}, y_1)$ **=0**

Después definimos

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\mathbf{x}) \\ y_2 &= f_2(\mathbf{x}) = f_2^*(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x})) \\ y_3 &= f_3(\mathbf{x}) = f_3^*(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x})) \\ &\ldots \\ y_s &= f_s(\mathbf{x}) = f_s^*(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

que verifican las s ecuaciones $F_j = 0$ **como queríamos.**

Sólo basta verificar que se puede aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $G(\mathbf{x}, y_1) = 0$

A probar que se cumple : $\partial G / \partial y_1 \neq 0.$

Teníamos:

$$G(\mathbf{x}, y_1) = F_1(\mathbf{x}, y_1, f_2^*(\mathbf{x}, y_1), f_3^*(\mathbf{x}, y_1), \ldots, f_s^*(\mathbf{x}, y_1)) = 0$$

Supongamos por absurdo

$$\partial G / \partial y_1 = 0$$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial y_1} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{s} \frac{\partial F_1}{\partial y_i} \frac{\partial f_i^*}{\partial y_1} \qquad (2)$$

Teníamos del pizarrón anterior:

$$\boxed{0 = \frac{\partial G}{\partial y_1} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{s} \frac{\partial F_1}{\partial y_i}\frac{\partial f_i^*}{\partial y_1} \qquad (2)}$$

Teníamos de antes:

$$\boxed{0 = \frac{\partial F_j}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{s} \frac{\partial F_j}{\partial y_i}\frac{\partial f_i^*}{\partial y_1}, \quad j = 2, 3, \ldots, s \qquad (1)}$$

Es un sistema lineal homogéneo de s ecuaciones con s incógnitas

$$\boxed{z_1, z_2, \ldots, z_s}$$

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F_1}{\partial y_1} z_1 + \sum_{i=2}^{s} \frac{\partial F_1}{\partial y_i} z_i \\
0 &= \frac{\partial F_2}{\partial y_1} z_1 + \sum_{i=2}^{s} \frac{\partial F_2}{\partial y_i} z_i \\
0 &= \frac{\partial F_3}{\partial y_1} z_1 + \sum_{i=2}^{s} \frac{\partial F_3}{\partial y_i} z_i \\
&\cdots \\
0 &= \frac{\partial F_s}{\partial y_1} z_1 + \sum_{i=2}^{s} \frac{\partial F_s}{\partial y_i} z_i
\end{aligned}\right\}$$

que tiene como solución

$$\boxed{z_1 = 1, \ z_2 = \frac{\partial f_2^*}{\partial y_1}, \ z_3 = \frac{\partial f_3^*}{\partial y_1}, \ldots, z_s = \frac{\partial f_s^*}{\partial y_1}}$$

Entonces el determinante del sistema es cero, contradiciendo la hipótesis. $\square$

CLASE 21 PARTE 3: TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA LOCAL . Ejemplo. Caso de varias ecuaciones.

Bibliografía de la Clase 21:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.1, parágrafo 36.**

Ejercicios para las clase 21

- **Práctico 6 del año 2006.**

EJEMPLO. **Dado el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Demostrar que existe función implícita local: $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$
en torno del punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

y calcular $y'(0), z'(0)$

$$J_{y,z}F = \det \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2(y - z)$$

$$J_{y,z}F(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} \neq 0$$

$\Rightarrow \quad J_{y,z}F \neq 0 \quad \forall (x, y, z) \in U$ **donde U es algún entorno del pto.**

Por el teorema de la función implícita local, existen

$$\left.\begin{array}{l} y = y(x) \\ z = z(x) \end{array}\right\} \; \forall\, x \in B_\delta(0) \qquad \text{tales que}$$

$$x^2+(y(x))^2+(z(x))^2-1=0, \quad x+y(x)+z(x)=0 \;\; \forall\, x \in B_\delta(0)$$
$$y(0)=1/\sqrt{2}, \quad z(0)=-1/\sqrt{2}$$

Derivando respecto de x

$$2x+2yy'+2zz'=0, \quad 1+y'+z'=0$$

$$2(1/\sqrt{2})y'(0)-2(1/\sqrt{2})z'(0)=0$$
$$1+y'(0)+z'(0)=0$$
$$\Rightarrow \quad y'(0)=-1/2, \quad z'(0)=-1/2 \qquad \square$$

OTRA FORMA DE CALCULAR LAS DERIVADAS y'(0) y z'(0).

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$Jf = -(JF_{y,z})^{-1} \cdot JF_x$$

$$Jf(0) = \begin{bmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix}$$

$$JF_{y,z}(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(JF_{y,z})^{-1}(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1/(2\sqrt{2}) & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$JF_x(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1/(2\sqrt{2}) & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$x'(0) = -1/2, \; y'(0) = -1/2 \quad \square$$

CLASE 22 PARTE 1:
FUNCIÓN INVERSA LOCAL.
Definición.

Bibliografía de la Clase 22:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.2, parágrafos 37 y 38.

Ejercicios para las clase 22

•Práctico 6 del año 2006. Ejercicios 3 y 11.

Sea dada $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^q$

en un abierto D. Sea dado un punto $a \in D$
y sea $b = f(a) \in \mathbb{R}^q$

DEFINICIÓN: f es localmente invertible en torno de a
si existe un entorno $U = B_\delta(a) \subset D$ del

punto a, tal que

$$f|_U : U \mapsto f(U) = V \subset \mathbb{R}^q$$

es biyectiva (biunívoca: inyectiva y sobreyectiva). Entonces existe función inversa local:

$$\exists\, f^{-1} : V \mapsto U \subset \mathbb{R}^q \text{ t.q.}$$

$$f^{-1}(f(p)) = p \;\forall p \in U$$

$$f(f^{-1}(q)) = q \;\forall q \in V = f(U)$$

EJEMPLO.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

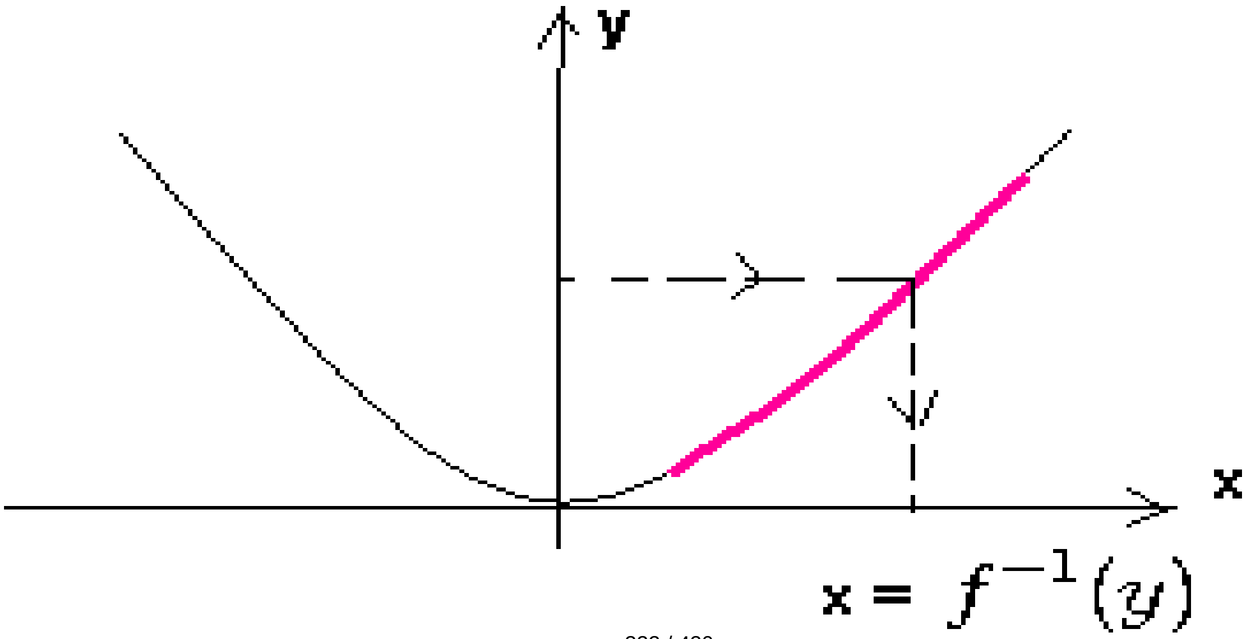
$$f(x): \quad y = x^2, \quad b = a^2, \quad \text{dado fijo } a > 0$$

$$U = (a/2, 3a/2), \quad b = a^2$$

$$V = f(U) = (a^2/4, 9a^2/4) \ni a^2 = b$$

$$f^{-1}: V \mapsto U, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y} \in U \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Existe inversa local de $f(x) = x^2$ en torno de $a > 0$.



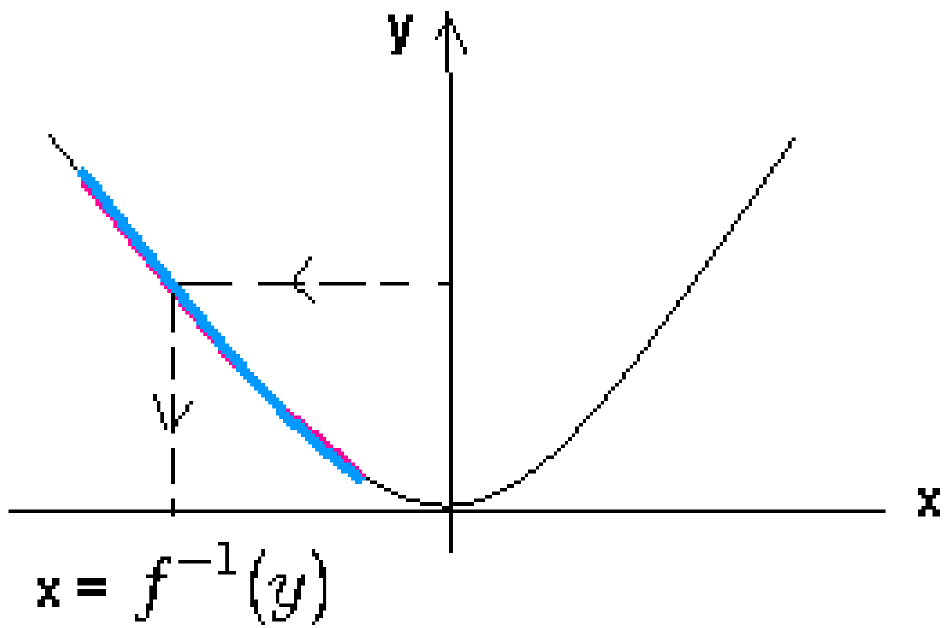
$$f(x): \quad y = x^2, \quad b = a^2, \quad \text{dado fijo } a < 0$$

$$U = (3a/2, a/2), \quad b = a^2$$

$$V = f(U) = (a^2/4, 9a^2/4) \ni a^2 = b$$

$$f^{-1}: V \mapsto U, \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{y} \in U \subset \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

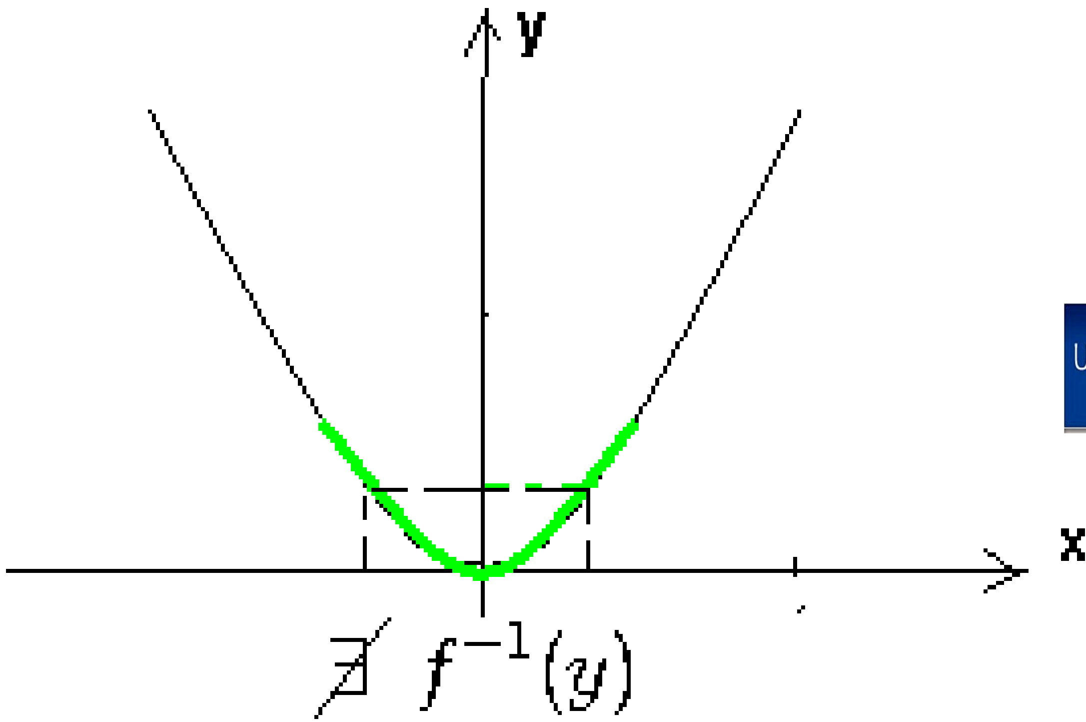
Existe inversa local de $f(x) = x^2$ en torno de $a < 0$.



En cualquier entorno de $a = 0$ existen dos puntos diferentes $x_1 > 0$ y $-x_1 < 0$ tales que $f(x_1) = f(-x_1)$ pues $x_1^2 = (-x_1)^2$.

$\Rightarrow$ f no es inyectiva en ningún entorno U de $a = 0$.

$\Rightarrow$ En torno de $a = 0$ NO existe inversa local de f.



CLASE 22 PARTE 2:
TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA LOCAL.

Bibliografía de la Clase 22:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.2, parágrafos 37 y 38.**

Ejercicios para las clase 22

- **Práctico 6 del año 2006. Ejercicios 3 y 11.**

Sea dada $f : D \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^q$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

en un abierto D. Sea dado un punto $a \in D$
y sea $b = f(a) \in \mathbb{R}^q$

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA LOCAL.

Si $f \in C^1, \quad \det Jf(a) \neq 0$

entonces:

1) Existe inversa local de $f(p)$ en torno de $p = a$, es decir:

$$\exists\, f^{-1} : V = f(U) \mapsto U = B_\delta(a) \text{ t.q.}$$

$$f^{-1}(f(p)) = p \;\; \forall p \in U, \quad f(f^{-1}(q)) = q \;\; \forall q \in V$$

2) $f^{-1} : V \mapsto U$ es de clase C^1.
3) $Jf^{-1}(q) = (Jf(p))^{-1} \;\; \forall p \in V$.
4) Si $f \in C^r$, $r \geq 1$ entonces $f^{-1} \in C^r$.

Dem.

Sea la función auxiliar $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$

$$a \in D, \quad b = f(a) \quad \Rightarrow \quad F(a,b) = f(a) - b = b - b = 0$$

$$D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = Df(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \det J_{\mathbf{x}}F(a,b) = \det Jf(a) \neq 0$$

$$J_{\mathbf{x}}F = Jf \text{ continua porque } f \in C^1, \quad \det J_{\mathbf{x}}F(a,b) \neq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\det J_{\mathbf{x}}F \neq 0 \;\; \forall\, \mathbf{x} \in B_{\delta_0}(a), \quad \forall\, \mathbf{y}}$$

Por el teorema de la función implícita local en el caso de un sistema de q ecuaciones:

$$\exists\, \mathbf{x} = g(\mathbf{y}),\; g \in C^1, \quad \text{t.q. } F(g(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = 0 \;\; \forall\, \mathbf{y} \in B_\varepsilon(b)$$

sigue

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Teníamos

$$\exists\, \mathbf{x} = g(y),\ g \in C^1,\ \text{ t.q. } F(g(y), y) = 0 \ \ \forall\, \mathbf{y} \in B_\varepsilon(b)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \ \ \forall\, \mathbf{y} \in B_\varepsilon(b) \quad (1)}$$

$$f \text{ continua } \Rightarrow \quad \exists\, U = B_\delta(a) \subset B_{\delta_0}(a) \text{ t.q.}$$

$$f(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(b) \ \ \forall\, \mathbf{x} \in B_\delta(a) = U$$

$$\forall\, \mathbf{x} \in U: \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0, \quad \Rightarrow \quad F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \mathbf{x} = g(f(\mathbf{x})) \ \ \forall \mathbf{x} \in U \quad (2)}$$

sigue

Llamando $V = f(U) \subset B_\varepsilon(b)$ teníamos

$$\boxed{f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in V} \qquad \boxed{\mathbf{x} = g(f(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in U}$$

$\Rightarrow$ g es la inversa local de f.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$\boxed{f^{-1}(f(p)) = p \quad \forall p \in U}$$

Derivando respecto de p y aplicando la Regla de la Cadena

$$Jf^{-1}(f(p)) \cdot Jf(p) = Id \;\Rightarrow\; Jf^{-1}(f(p)) = (Jf(p))^{-1} \quad \square$$

CLASE 22 PARTE 3:
TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA LOCAL. Ejemplo.

Bibliografía de la Clase 22:

•**Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.2, parágrafos 37 y 38.**

Ejercicios para las clase 22

•**Práctico 6 del año 2006. Ejercicios 3 y 11.**

EJEMPLO

Sea
$$\begin{cases} f: \quad u = -3x + y^3, \quad v = -3y + x^3 \\ a = (1,0), \quad b = f(a) = (-3,1) \end{cases}$$

Probar que f tiene inversa local en torno de a

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

y hallar las derivadas parciales de x e y respecto de u y v.

$$\left.\begin{array}{l} \det Jf = \det \begin{bmatrix} -3 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3 \end{bmatrix} = 9 - 9x^2y^2 \\ \det Jf(a) = 9 - 9 \cdot 1^2 \cdot 0^2 = 9 \neq 0 \end{array}\right\}$$

Por el teorema de la función inversa local:

$\exists\, f^{-1}$ inversa local de f en torno de $p = a$

$$Jf^{-1}(q) = (Jf(p))^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$Jf^{-1}(b) = (Jf(a))^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial x}{\partial u}(-3,1) = -\dfrac{1}{3}, & \dfrac{\partial x}{\partial v}(-3,1) = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(-3,1) = -\dfrac{1}{3}, & \dfrac{\partial y}{\partial v}(-3,1) = -\dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

$\square$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

OBSERVACIÓN. **El recíproco del teorema de la función inversa es falso. Existen funciones localmente invertibles que no son diferenciables, y otras que son diferenciables pero su Jacobiano tiene determinante igual a cero.**

EJEMPLO. Sea $f: \quad u = x^3, \quad v = y, \qquad a = (0,0)$

Demostrar que f es localmente invertible pero Jf(a) = 0

$$\det Jf(x,y) = \det \begin{bmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3x^2, \quad \det Jf(a) = 0$$

f es invertible porque dado (u,v) sea $g: \quad x = \sqrt[3]{u}, \; y = v$

$$g(f(x,y)) = (x,y) \; \forall \, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(g(u,v)) = (u,v) \; \forall \, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \qquad \square$$

CLASE 23 PARTE 1: EXTREMOS RELATIVOS

Bibliografía de la Clase 23:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.5, parágrafos 43 Y 44.

Ejercicios para las clase 23

•Práctico 8 del año 2007.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de q variables reales. Sea $a \in D$

DEFINICIÓN: El número real $f(a)$ se llama **máximo relativo de f** (y el punto a se llama lugar donde se alcanza ese máximo relativo) si:

- El punto $a \in \operatorname{int} D$

•Existe algún entorno $B_\delta(a)$ del punto a tal que:

$$f(p) \leq f(a) \qquad \forall\ p \in B_\delta(a)$$

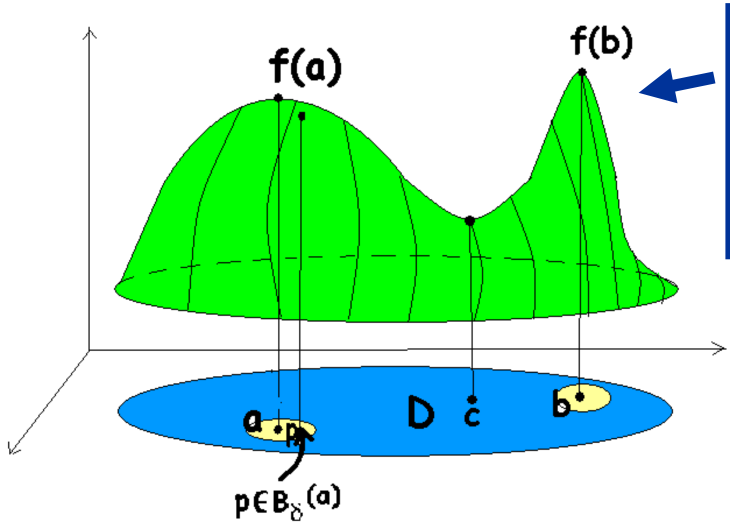
DEFINICIÓN: El número real $f(a)$ se llama **mínimo relativo de f** (y el punto a se llama lugar donde se alcanza ese mínimo relativo) si:

- El punto

•Existe algún entorno del punto a tal que:

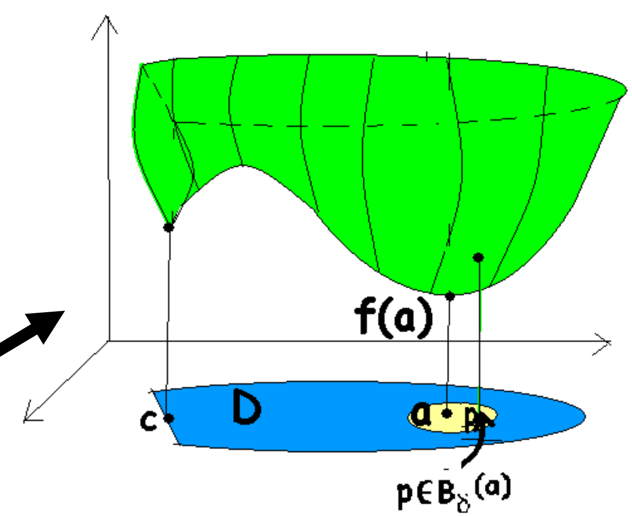
$$f(p) \geq f(a) \qquad \forall\ p \in B_\delta(a)$$

EXTREMOS RELATIVOS: son los MÁXIMOS y MÍNIMOS RELATIVOS



f(a) y f(b) son máximos relativos, f(c) no es ni máximo ni mínimo relativo

f(a) es mínimo rel. pero f(c) no, porque c no es interior a D.



CLASE 23 PARTE 2:
EXTREMOS RELATIVOS
Y PUNTOS CRÍTICOS O ESTACIONARIOS

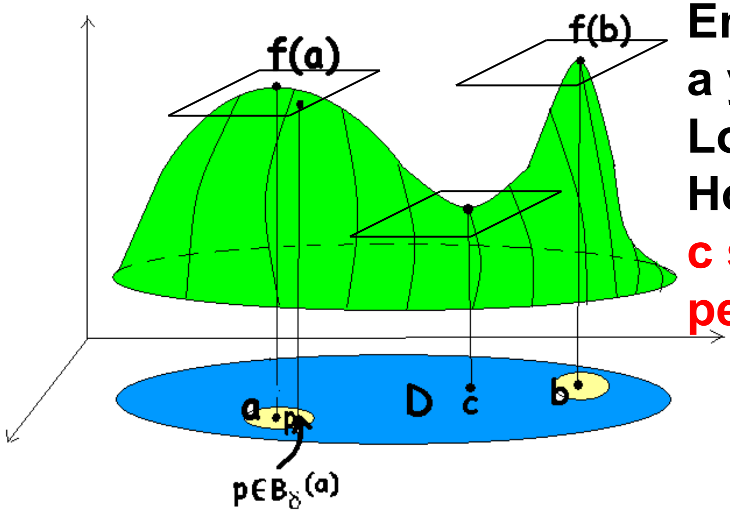
Bibliografía de la Clase 23:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.5, parágrafos 43 Y 44.

Ejercicios para las clase 23

•Práctico 8 del año 2007.

DEFINICIÓN: Punto estacionario o crítico de f , es un punto a tal que:
- **a está en el interior del dominio D de f**
- **f es diferenciable en a**
- **df(a) = 0 (o sea: Jf(a) es nula; las derivadas parciales de f en a son todas 0; el plano tangente a la superficie gráfica de f en el punto a es horizontal).**



En la figura a, b y c son puntos críticos.
a y b son extremos relativos pero c no lo es.
Los planos tangentes en los tres puntos son Horizontales.
c se llama "punto silla": es un punto crítico pero no es extremo relativo.

TEOREMA:
Si f(a) es un extremo relativo de f y si f es diferenciable en a entonces, a es un punto crítico de f.

CONCLUSIONES IMPORTANTES:

(1) Si en a hay extremo relativo (máx. o mín. rel.) entonces, o bien f no es diferenciable en a, o bien a es un punto crítico. (Dónde buscar máx. y mín.)

(2) Si a es un punto crítico entonces, o bien en a hay extremo relativo (máx. o mín. rel.), o bien a es un punto silla. (Cómo se clasifican los puntos críticos.)

TEOREMA:
Si f(a) es un extremo relativo de f y si f es diferenciable en a entonces, a es un punto crítico de f.

Dem. Ya sabemos que f es diferenciable en a por hipótesis. Hay que probar que las derivadas Parciales de f en a son ceros. Lo haremos para dos variables independientes x e y, pero vale también para q variables independientes.

Por hipótesis en a hay máx, o mín. rel. Si hay mín. en a (en caso de máx. la prueba es similar), vale (*):

$$(*) \quad f(p) \geq f(a) \qquad \forall \; p \in B_{\delta}(a)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Por hip. f es diferenciable en a, luego existen derivadas direccionales $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \; \dfrac{\partial f}{\partial u} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \lambda \\ (*) \Rightarrow f(a+tu) \geq f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow sg(\lambda) = sg(t)}$$

$$\left.\begin{array}{l} t \geq 0 \;\text{ si }\; t \to 0^{+} \Rightarrow \lambda \geq 0 \\ t \leq 0 \;\text{ si }\; t \to 0^{-} \Rightarrow \lambda \leq 0 \end{array}\right\} \lambda = 0$$

$$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0 \quad \forall u \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right. \quad \square}$$

CLASE 23 PARTE 3:
EXTREMOS RELATIVOS
Y PUNTOS CRÍTICOS O ESTACIONARIOS.
EJEMPLO.

Bibliografía de la Clase 23:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.5, parágrafos 43 Y 44.

Ejercicios para las clase 23

•Práctico 8 del año 2007.

EJEMPLO: Sea $z = f(x,y) = (x^2-2y-2)(y-1)+2 = x^2y - x^2 - 2y^2+4$

(a) Hallar todos los puntos críticos.
(b) Clasificar los puntos críticos en máximos rel., mín. relativos o puntos silla
(c) Hallar todos los máximos y mínimos relativos.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

(a) El dominio es todo $\mathbb{R}^2$ **Puntos críticos** $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy-2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2-4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^2/4 \\ 2x(x^2/4-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x=0,\ y=0 \quad ó \quad x^2=4,\ y=1 \Leftrightarrow$$

$$x=0,\ y=0 \quad ó \quad x=2, y=1 \quad ó \quad x=-2, y=1$$

Respuesta a la parte (a): Los puntos críticos son tres: (0,0), (2,1) y (-2,1)

(b) $(x,y) = (0,0);\ f(0,0) = 4$

$f(x,y) - f(0,0) = x^2y - x^2 - 2y^2 =$
$= x^2(y-1) - 2y^2$

En un entorno $B_\delta(0,0)$
$(y-1) < 0$ pues
y está próximo a 0

$x^2(y-1) \leqslant 0; \quad -2y^2 \leqslant 0$

$\Rightarrow \quad x^2(y-1) - 2y^2 \leqslant 0$

$f(x,y) - f(0,0) \leqslant 0 \quad \forall (x,y)\ B_\delta(0,0)$

$f(0,0)$ es máximo relativo

Sigue

Continuación: $z = f(x,y) = (x^2-2y-2)\,(y-1) + 2 = x^2y - x^2 - 2y^2 + 4$

(a) Puntos críticos (0,0), (2,1) y (-2,1).
(b) Clasificar los puntos críticos en máximos rel., mín. relativos o puntos silla.
(c) Hallar todos los máximos y mínimos relativos.

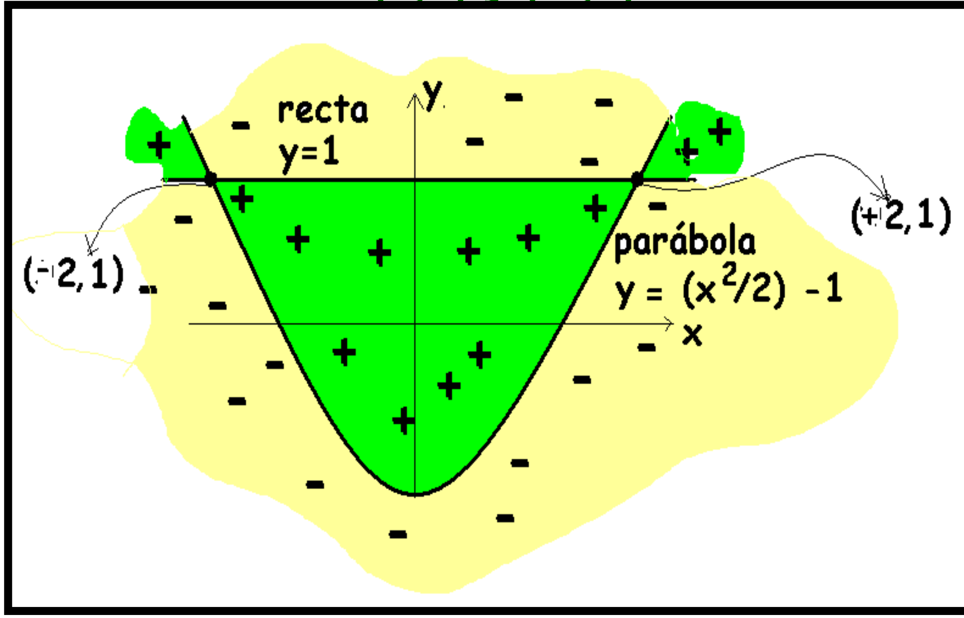
(b) Vimos que (0,0) es máximo relativo. Ahora veamos (2,1) y (-2,1)

$(x,y) = (\pm 2, 1);\ f(\pm 2, 1) = 2$

$f(x,y) - f(\pm 2, 0) = (x^2-2y-2)\,(y-1)$

$(x^2-2y-2) < 0 \Leftrightarrow y > (x^2/2) - 1$ el punto (x,y) está por arriba de la parábola $y = (x^2/2) - 1$

$(y-1) < 0 \Leftrightarrow$ el punto (x,y) está por abajo de la recta horizontal $y=1$



$(x^2-2y-2)\,(y-1) > 0$ si y solo si ambos factores tienen el mismo signo

En cualquier entorno de (2,1) el signo de f(x,y) –f(2,1) = es en algunos puntos positivo y en otros negativo.

En (+2,1) no hay mín. ni máx. relativo.
Entonces es punto silla.
Idem para (-2,1).

Sigue

Continuación: $z = f(x,y) = (x^2 - 2y - 2)(y-1) + 2 = x^2y - x^2 - 2y^2 + 4$

(a) Puntos críticos (0,0), (2,1) y (-2,1).
(b) En (0,0) hay máximo relativo y (2,1) y (-2,1) son puntos silla.
(c) Hallar todos los máximos y mínimos relativos.

(c) Los extremos relativos son o bien puntos donde f no es diferenciable y cumple la definición de máximo o mínimo relativo; o bien puntos críticos que cumplen la definición de máximo o mínimo relativo.

1º) f es diferenciable en todos los puntos. Entonces en este ejemplo no hay extremos relativos donde f no sea diferenciable.

2º) f tiene tres puntos críticos de los cuales en solo uno (0,0) hay extremo relativo (máximo relativo).

CONCLUSIÓN:

Los extremos relativos son:

Máximo relativo f(0,0)= 4 se alcanza en (0,0). No hay otros máximos relativos.

Mínimos relativos no hay.

CLASE 24 PARTE 1:
PUNTOS CRÍTICOS COMO CANDIDATOS A LUGAR DE MÁXIMO O MÍNIMO ABSOLUTOS.

Bibliografía de la Clase 24:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.5, parágrafo 45.**

Ejercicios para las clase 24

- **Práctico 8 del año 2007.**

DEFINICIÓN: Punto estacionario o crítico de función real f , es un punto a t.q.

- **a está en el interior del dominio D de f**
- **f es diferenciable en a**
- **df(a) = 0 (o sea: Jf(a) es nula; las derivadas parciales de f en a son todas 0)**

Puntos críticos o estacionarios

- **Máximos relativos** } **Extremos relativos**
- **Mínimos relativos** } **Extremos relativos**
- **Puntos “silla” (Por def. puntos críticos donde no hay extremo relativo).**

Observación: Se puede ser máximo y mínimo relativo al mismo tiempo. Si la función es constante, todos los puntos son críticos y en ellos se alcanza máximo y mínimo al mismo tiempo.

UN OBJETIVO: Hallar **MÁX. y/o MÍN. ABSOLUTOS** de la función real f en su dominio D. Veremos en futuras clases el siguiente procedimiento, solo aplicable **SABIENDO DE ANTEMANO QUE EXISTEN MÁX.Y MÍN. ABSOLUTOS de f en D:**

- **1) HALLAR TODOS LOS P. CRÍTICOS DE f EN INT(D), Y TODOS LOS P. EN INT(D). DONDE f NO SEA DIFERENCIABLE.** Pues si los extr. absolutos que buscamos se alcanzaran en int(D), entonces serían extremos relativos (verificar que cumplen la definición respectiva). Entonces serían (clase pasada) p. críticos de f si f es diferenciable, o de lo contrario son p. donde f no es diferenciable.

- **2) NO ES NECESARIO CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS**, pues **TODOS LOS PUNTOS HALLADOS ANTERIORMENTE SON CANDIDATOS A LUGAR DE MÁX. Y MÍN. ABSOLUTOS,** ya sean extremos relativos (candidatos buenos), ya sean p. silla (candidatos falsos, colados en la "bolsa de candidatos"), ya sean puntos cualquiera de no diferenciabilidad de f (quizás buenos, quizás colados). **Consideramos TODOS esos puntos sin saber cuáles son colados, para evitar clasificar los p. críticos y para no estudiar f cerca de dónde no es diferenciable.**

Sigue

Continuación:

UN OBJETIVO: Hallar MÁX. y/o MÍN. ABSOLUTOS de la función real f en su dominio D. Estábamos adelantando el siguiente procedimiento, solo aplicable SABIENDO DE ANTEMANO QUE EXISTEN MÁX.Y MÍN. ABSOLUTOS de f en D:

•1) HALLAR TODOS LOS P. CRÍTICOS DE f EN INT(D), Y TODOS LOS P. EN INT(D). DONDE f NO SEA DIFERENCIABLE.

•2) NO ES NECESARIO CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS.

•3) SE HALLARÁN TODOS LOS OTROS CANDIDATOS EN FRONT(D) con los métodos (clase siguiente) de "extremos relativos condicionados" y de "puntos críticos de la función de Lagrange", sin necesidad de clasificarlos.

.4) Entre todos los p. candidatos que haya en la bolsa (buenos + colados):

Seleccionamos aquel(llos) donde f toma el mayor valor: ESE VALOR ES EL MAX ABSOLUTO.

Seleccionamos aquel(llos) donde f toma el menor valor: ESE VALOR ES EL MÍNIMO ABSOLUTO.

OTRO OBJETIVO: Clasificar puntos críticos en máximo relativo, mínimo relativo o punto silla. **(Innecesario cuando el objetivo es hallar máximo y mínimo absolutos)**

2 Métodos para Clasificar los Puntos Críticos

Estudiar el signo de f(p) – f(a) en un entorno del pto. a

Si es $\geq 0 \ \forall \ p \in B_\delta(a)$ f(a) es mínimo rel.

Si es $\leq 0 \ \forall \ p \in B_\delta(a)$ f(a) es máximo rel.

Si es ≥ 0 en unos puntos y ≤ 0 en otros, a es pto. silla.

Se puede aplicar siempre, pero a veces queda difícil. Hay que estudiar las particularidades de la función, caso a caso.

Ejemplo: ver clase pasada.

Sabiendo ya que a es punto crítico de f

Método del Hessiano o del Diferencial Segundo de f.

Se puede aplicar solo cuando f es de clase C^2

Aunque se pueda aplicar, no siempre permite concluir de qué tipo es el punto crítico.

Ejemplo: al final de esta clase

Sigue

CLASE 24 PARTE 2: MÉTODO DEL DIFERENCIAL SEGUNDO PARA CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS. ENUNCIADO.

Bibliografía de la Clase 24:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.5, parágrafo 45.

Ejercicios para las clase 24

•Práctico 8 del año 2007.

MÉTODO DEL HESSIANO O DEL DIFERENCIAL SEGUNDO

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

DEFINICIÓN: Si f(x,y,....,z) es una función **REAL** de q variables reales independientes (x,y,...,z), **y si f es de clase** C^2 , entonces se llama matriz Hessiana H de f en un punto (x,y, ..., z) a la matriz **CUADRADA qXq SIMÉTRICA** formada por las derivadas parciales segundas de f escritas en el siguiente orden:

$$H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \cdots & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & \cdots & f_{yz} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{zx} & f_{zy} & \cdots & f_{zz} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Calcular el Hessiano H en el punto (1,1,2) de la función:

$$f(x,y,z) = x^2z+y^2z+\frac{2}{3}z^3-4x-4y-10z+1$$

$f_x = 2xz-4$; $f_y = 2yz-4$;

$f_z = x^2+y^2+2z^2-10$

$f_{xx} = 2z$; $f_{yy}=2z$; $f_{zz}=4z$

$f_{xy}=f_{yx}=0$; $f_{xz}= f_{zx}=2x$;

$f_{yz}=f_{zy}=2y$

$$\Rightarrow H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 2z & 2y \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{H(1,1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}}$$

MÉTODO DEL HESSIANO O DEL DIFERENCIAL SEGUNDO

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

TEOREMA Si f es de clase C^2 y si a es un punto crítico de f(x,y,....,z), sea H la matriz Hessiana de f en el punto a.

1er. Caso) Si todos los valores propios de H son estrictamente positivos, entonces el diferencial segundo $d^2f(a)\cdot\Delta p > 0 \ \forall \Delta p \neq 0$ (se dice que es definido positivo) y el punto crítico a es un mínimo relativo.

2do. Caso) Si todos los valores propios de H son estrictamente negativos, entonces el diferencial segundo $d^2f(a)\cdot\Delta p < 0 \ \forall \Delta p \neq 0$ (se dice que es definido negativo) y el punto crítico a es un máximo relativo.

3er. Caso) Si algún(os) valor(es) propio(s) de H es(son) estrictamente negativo(s) y otro(s) estrictemente positivo(s) (no importa si hay otro(s) que son ceros), entonces el diferencial segundo en algunos incrementos es positivo y en otros es negativo (se dice que es indefinido) y el punto crítico a es una silla.

4to. Caso) En los demás casos: todos los valores propios de H que no son ceros (si hay) tienen el mismo signo y EXISTE(N) alguno(s) que es (son) cero(s), el diferencial segundo se llama semidefinido, y el punto crítico a puede ser extremo relativo o punto silla (el método no permite clasificar en este caso).

CLASE 24 PARTE 3:
MÉTODO DEL DIFERENCIAL SEGUNDO PARA CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS. DEMOSTRACIÓN

Bibliografía de la Clase 24:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.5, parágrafo 45.**

Ejercicios para las clase 24

- **Práctico 8 del año 2007.**

Dem. del teorema del método del Hessiano:

1ª. Parte: Demostrar las propiedades del signo del diferencial segundo.
2da. Parte: Usando las propiedades del signo del diferencial segundo demostrar la clasificación del punto crítico a.

1ª Parte: Signo del diferencial segundo en el punto a.

< , > indica el producto escalar

$$d^2f(a)\cdot\Delta p = \langle \Delta p, H\cdot\Delta p\rangle$$

$\forall \Delta p \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{d^2f(a)\cdot\Delta p}{\|\Delta p\|^2} = \frac{\langle \Delta p, H\cdot\Delta p\rangle}{\|\Delta p\|^2}$$

$$\frac{\Delta p}{\|\Delta p\|} = \vec{u} \text{ con norma } 1$$

$$\boxed{\frac{d^2f(a)\cdot\Delta p}{\|\Delta p\|^2} = \langle \vec{u}, H\cdot\vec{u}\rangle \quad (1)}$$

H matriz simétrica qXq $\Rightarrow$

$\exists \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\}$ base ortonormal de vectores propios de H con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ respectivamente

$$\left.\begin{array}{l} H\cdot\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \;;\; H\cdot\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \;;\; \ldots;\; H\cdot\vec{v}_q = \lambda_q\vec{v}_q \\ \langle \vec{v}_i, H\vec{v}_j\rangle = 0 \text{ si } i \neq j \\ \langle \vec{v}_i, H\vec{v}_j\rangle = \lambda_i \text{ si } i=j \\ \vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_q\vec{v}_q \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle \vec{u}, H\cdot\vec{u}\rangle = a_1^2\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \ldots + a_q^2\lambda_q \quad (2)}$$

(1) y (2) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2f(a)\cdot\Delta p}{\|\Delta p\|^2} = a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + \ldots + a_q^2\lambda_q \quad (3)}$$

sigue

$$\frac{d^2f(a)\cdot\Delta p}{||\Delta p||^2} = a_1^2\,\lambda_1 + a_2^2\,\lambda_2 + \ldots + a_q^2\,\lambda_q \qquad (3)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

En el primer caso:

(3) $\Rightarrow$ Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ son todos positivos

$$\frac{d^2f(a)\cdot\Delta p}{||\Delta p||^2} > 0 \quad \forall \Delta p \neq 0 \qquad (4)$$

(el diferencial segundo es definido positivo).

En el segundo caso:

(3) $\Rightarrow$ Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ son todos negativos

$$\frac{d^2f(a)\cdot\Delta p}{||\Delta p||^2} < 0 \quad \forall \Delta p \neq 0 \qquad (5)$$

(el diferencial segundo es definido negativo).

En el tercer caso:

(3) $\Rightarrow$ Si un valor propio $\lambda_1 > 0$ y otro $\lambda_2 < 0$

$$\frac{d^2f(a)\cdot\Delta p}{||\Delta p||^2} = \lambda_1 > 0 \quad \text{cuando} \quad \frac{\Delta p}{||\Delta p||} = \vec{v}_1$$

$$\frac{d^2f(a)\cdot\Delta p}{||\Delta p||^2} = \lambda_2 < 0 \quad \text{cuando} \quad \frac{\Delta p}{||\Delta p||} = \vec{v}_2 \qquad (6)$$

(el diferencial segundo es indefinido).

2da. Parte de la demostración: Usando las propiedades del signo del diferencial segundo probadas antes, clasificar el punto crítico a en máximo relativo, mínimo relativo o p. silla

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

f de clase C^2 (desarrollo de Taylor hasta orden 2), $p-a = \Delta p \neq 0$

$$f(p) - f(a) = df(a)\Delta p + d^2 f(a) \cdot \Delta p + \mathcal{E}(p) \quad \text{con } \mathcal{E}(p) \xrightarrow[p \to a]{} 0$$

a punto crítico de f $\Rightarrow$ $df(a) = 0$ $\qquad \dfrac{\Delta p}{\|\Delta p\|} = \vec{u}$

$$\boxed{\frac{f(p) - f(a)}{\|\Delta p\|^2} = \frac{d^2 f(a) \cdot \Delta p}{\|\Delta p\|^2} + \mathcal{E}(p) \quad \text{con } \mathcal{E}(p) \xrightarrow[p \to a]{} 0 \quad (7)}$$

En el primer caso:

(4) $\Rightarrow$ Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ son todos positivos

$$\frac{d^2 f(a) \cdot \Delta p}{\|\Delta p\|^2} > 0 \quad \forall \Delta p \neq 0 \quad (4)$$

$$M = \min_{\Delta p \neq 0} \frac{d^2 f(a) \cdot \Delta p}{\|\Delta p\|^2}$$

(4) $\Rightarrow$ $M > 0$

(7) $\Rightarrow$ $|\mathcal{E}(p)| < M/2$ si $0 < \|p-a\| < \delta$

$$\frac{f(p) - f(a)}{\|\Delta p\|^2} \geq M - |\mathcal{E}(p)| > M - M/2 = M/2 > 0$$

$\Rightarrow$ $f(p) - f(a) > 0$ si $0 < \|p-a\| < \delta$

$\Rightarrow$ f(a) es mínimo relativo $\square$

En el segundo caso: Cuando todos los valores propios de H son negativos.

Idem el primer caso pero usando la desigualdad (5) en vez de la (4), y definiendo

$$M = \max_{\Delta p \neq 0} \frac{d^2f(a) \cdot \Delta p}{||\Delta p||^2} < 0$$

en vez del mínimo >0 como teníamos en el primer caso.

Se concluye así que

$$M = \max_{\Delta p \neq 0} \frac{d^2f(a) \cdot \Delta p}{||\Delta p||^2} < 0$$

$$\Rightarrow f(p) - f(a) < 0 \quad \text{si} \quad 0 < p-a < \delta$$

$$\Rightarrow f(a) \text{ es máx relativo} \quad \square$$

En el tercer caso: Cuando un valor propio de H es negativo y otro positivo.

Se usa la desigualdad (6) en vez de la (4) en dos pasos:

1er. Paso: Elegir $\frac{\Delta p}{||\Delta p||} = \vec{v}_1$ **2do. Paso: Elegir** $\frac{\Delta p}{||\Delta p||} = \vec{v}_2$

$M = \lambda_1 > 0$ $M = \lambda_2 < 0$

Con el mismo procedimiento que al final de la prueba de los casos anteriores, usando la igualdad (7) se concluye que:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} f(p) - f(a) > 0 \quad \text{si} \quad 0 < p-a < \delta \text{ y si } \frac{\Delta p}{||\Delta p||} = \vec{v}_1 \\ f(p) - f(a) < 0 \quad \text{si} \quad 0 < p-a < \delta \text{ y si } \frac{\Delta p}{||\Delta p||} = \vec{v}_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow a \text{ es punto silla.} \quad \square$$

CLASE 24 PARTE 4:
MÉTODO DEL DIFERENCIAL SEGUNDO PARA CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS. EJEMPLO.

Bibliografía de la Clase 24:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.5, parágrafo 45.**

Ejercicios para las clase 24

- **Práctico 8 del año 2007.**

EJEMPLO: Encontrar y clasificar todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = x^2z+y^2z+\frac{2}{3}z^3-4x-4y-10z+1$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$\begin{cases} f_x = 2xz-4 = 0 \\ f_y = 2yz-4 = 0 \\ f_z = x^2+y^2+2z^2-10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=(2/z)=y \\ 2\,(2/z)^2+2z^2-10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=y=(2/z) \\ 4+z^4-5z^2=0 \end{cases}$$

$$z^2 = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow$$

$z = +1,\ z=-1,\ z=2,\ z=-2 \Rightarrow x=(2/z)=y$

Ptos críticos:

$$\begin{cases} (2,2,1) \\ (-2,-2,-1) \\ (1,1,2) \\ (-1,-1,-2) \end{cases}$$

HESSIANO de f

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 2z & 2y \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix}$$

$$H(1,1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Valores propios son

$4,\ 6+\sqrt{12},\ 6-\sqrt{12}$ Son todas > 0

$d^2f\ (1,1,2)$ es definido positivo $\Rightarrow$

$(1,1,2)$ es mínimo relativo

$$H(-1,-1,-2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Valores propios son:

$-4, -6+\sqrt{12}, -6-\sqrt{12}$ Son todas < 0

$d^2f\ (-1,-1,-2)$ es definido negativo $\Rightarrow$

$(-1,-1,-2)$ es máx. relativo

$$H(2,2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Valores propios son:

$2,\ 3+\sqrt{33},\ 3-\sqrt{33}$ Una es < 0 y otras >0

$d^2f\ (2,\ 2,\ 1)$ es indefinido $\Rightarrow$

$(2,\ 2,\ 1)$ es pto. silla

H(-2,-2,-1) es la opuesta de H(2,2,1). Sus valores propios son opuestos.

$-2, -3+\sqrt{33}, -3-\sqrt{33}$ Una es < 0 y otras >0

$d^2f\ (-2,-2,-1)$ es indefinido $\Rightarrow$

$(-2,-2,-1)$ es pto. silla

CLASE 24 PARTE 5:
CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS.
OTROS EJEMPLOS.

Bibliografía de la Clase 24:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.5, parágrafo 45.

Ejercicios para las clase 24

•Práctico 8 del año 2007.

EJEMPLOS: Encontrar y clasificar los puntos críticos de las funciones siguientes:

$$f(x,y) = (x-1)^4 + (y-3)^2 - 5 \qquad g(x,y) = (x-4)^5 + (y-8)^2 + 7$$

$$\begin{cases} f_x = 4(x-1)^3 = 0 \\ f_y = 2(y-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$x=1 \quad y=3$

Pto crítico: (1,3)

$f_{xx} = 12(x-1)^2$

$f_{yy} = 2$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$$H_f(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios de H

Una es > 0 y otra $= 0$

$d^2 f(1,3)$ es semidefinido

El método del Hessiano no permite clasificar el punto crítico (1,3) de f.

Estudiar signo de

$f(x,y) - f(1,3)$

$$f(x,y) - f(1,3) = (x-1)^4 + (y-3)^2 \geqslant 0$$

$\forall (x,y) \Rightarrow f(1,3) = -5$

es mínimo relativo de f.

$$\begin{cases} g_x = 5(x-4)^4 = 0 \\ g_y = 2(y-8) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$x=4 \quad y=8$

Pto crítico: (4,8)

$g_{xx} = 20(x-4)^3$

$g_{yy} = 2$

$g_{xy} = g_{yx} = 0$

$$H_g(4,8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios de H

Una es > 0 y otra $= 0$

$d^2 g(4,8)$ es semidefinido

El método del Hessiano no permite clasificar el punto crítico (4,8) de g.

Estudiar signo de

$g(x,y) - g(4,8)$

$$g(x,y) - g(4,8) = (x-4)^5 + (y-8)^2$$

es > 0 si $y=8$, $x>4$

es < 0 si $y=8$, $x<4$

En un entorno de (4,8) cambia de signo, según los puntos que se tomen.

$\Rightarrow$ (4,8) es punto silla de g.

CLASE 25 PARTE 1:
Mínimos y Máximos CONDICIONADOS. Ecuaciones y conjunto de Ligadura

Bibliografía de la Clase 25:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.6, parágrafo 49.

Ejercicios para las clase 26

•Práctico 8 del año 2007.

Sean $\begin{cases} \varphi_1 : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi_2 : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \\ \vdots \\ \varphi_m : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ m funciones reales de q variables reales.

$$L : \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \end{cases}$$

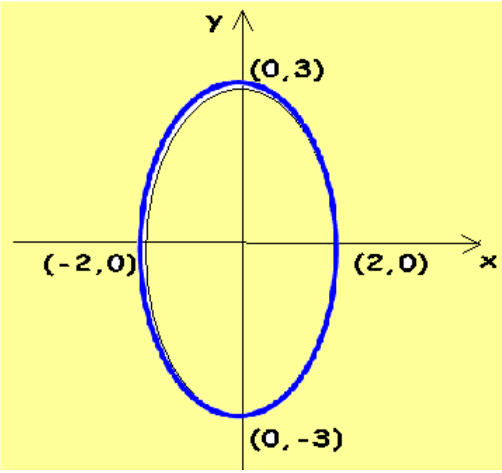
Ecuaciones de ligadura (son m ecuaciones reales con q variables reales).

Conjunto L de ligadura: el lugar de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ de $\mathbb{R}^q$ que verifican las m ecuaciones de ligadura A LA VEZ.

EJEMPLOS DE LIGADURA CON 1 sola ecuación.

Si la ecuación de ligadura (1 sola) cumple en todos los puntos de L con las hipótesis del teor. de función implícita, entonces, L es una curva ("unidimensional") en $\mathbb{R}^2$ ó L es una superficie ("bidimensional") en $\mathbb{R}^3$ ó L es una hipersuperficie ("(q-1)-dimensional") en $\mathbb{R}^q$

En $\mathbb{R}^2$ la ecuación de ligadura (1 sola ecuación en $\mathbb{R}^2$):
$(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ es una curva elíptica.

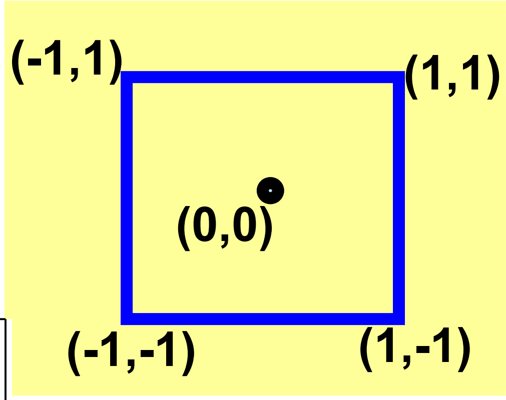


En $\mathbb{R}^3$ la ecuación de ligadura: (1 sola ecuación de $\mathbb{R}^3$):
$x^2+y^2+z^2=4$ es una superficie esférica.

MAS EJEMPLOS DE LIGADURA CON 1 sola ecuación.

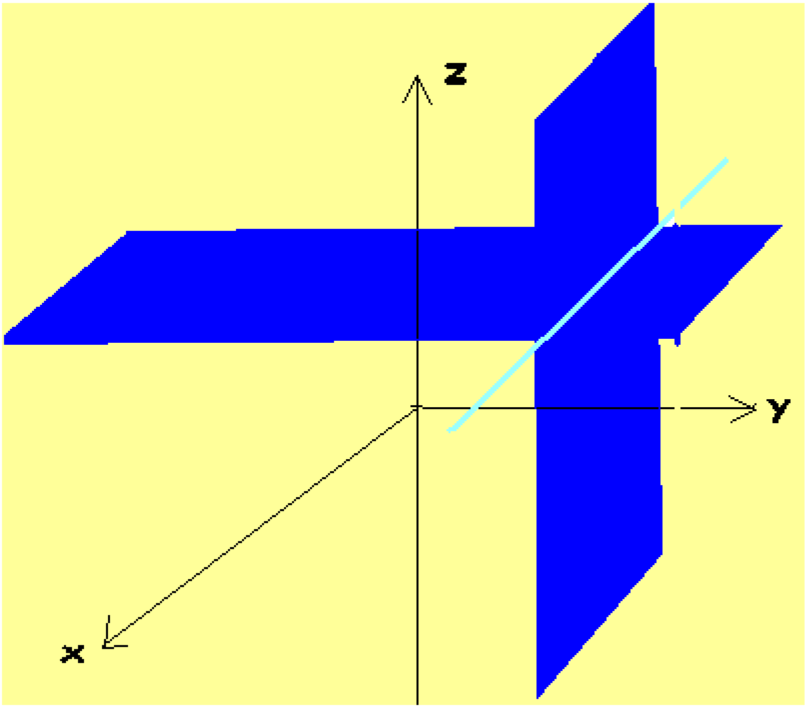
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

En $\mathbb{R}^2$ la ecuación de ligadura
(1 sola ecuación en $\mathbb{R}^2$):
$\text{máx}\{|x|,|y|\}=1$ es una curva cuadrada



En $\mathbb{R}^3$ la ecuación de ligadura
(1 sola ecuación en $\mathbb{R}^3$)
$x+y+z=1$ es una superficie plana.

En $\mathbb{R}^3$ la ecuación de ligadura
(1 sola ecuación en $\mathbb{R}^3$)
$\varphi_1(x,y,z) = 0$, donde
$\varphi_1 = \text{máx}(|z-1|,|y-2|)$
es una superficie formada por
dos planos perpendiculares:
$\{z=1\} \cup \{y=2\}$

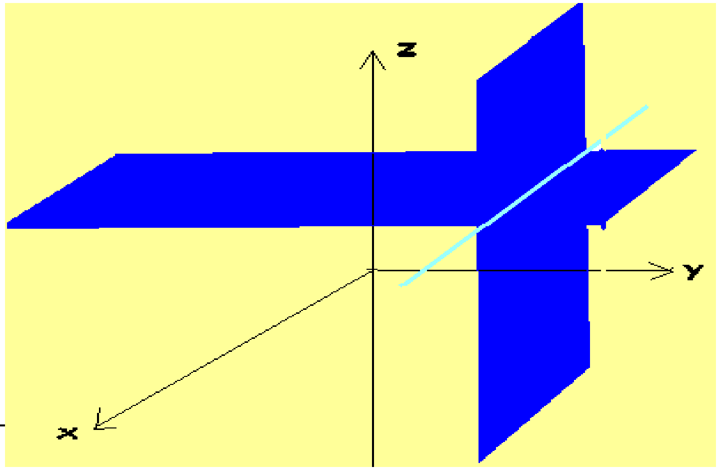


En este ejemplo φ_1 no es
diferenciable en los ptos.
ESQUINA: los de la recta
donde ambos planos se cortan:
$\{z=1,\ y=2,\ x \text{ cualquiera}\}$

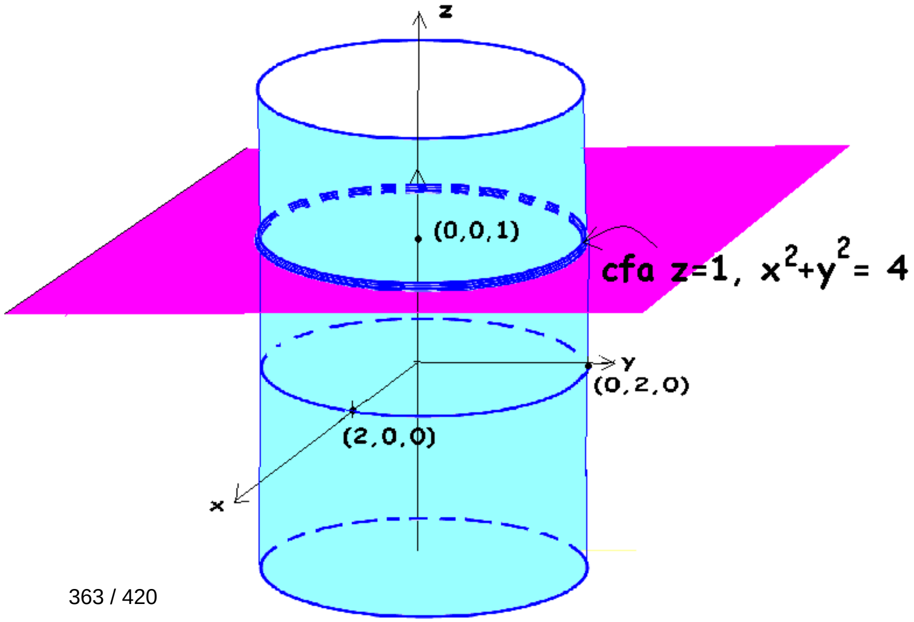
EJEMPLOS DE LIGADURA CON 2 ecuaciones.

Si las ecuaciones de ligadura son 2 y cumplen en todos los puntos de L con las hipótesis del teor. de función implícita, entonces, L es una curva ("unidimensional") en $\mathbb{R}^3$ ó L es una hipersuperficie ("(q-2)-dimensional") en $\mathbb{R}^q$

En $\mathbb{R}^3$ la condición de ligadura
(2 ecuaciones)
$z=1$, $y=2$
es una recta ("curva" con todos los puntos alineados)
que es la intersección
del plano $z=1$ con el plano $y=2$.



En $\mathbb{R}^3$ la condición de ligadura
(2 ecuaciones)
$x^2+y^2=4$, $z=1$
es un curva circunferencia
intersección del cilindro
$x^2+y^2=4$
(de base circular con radio 2
y eje el eje de las z)
con el plano $z=1$



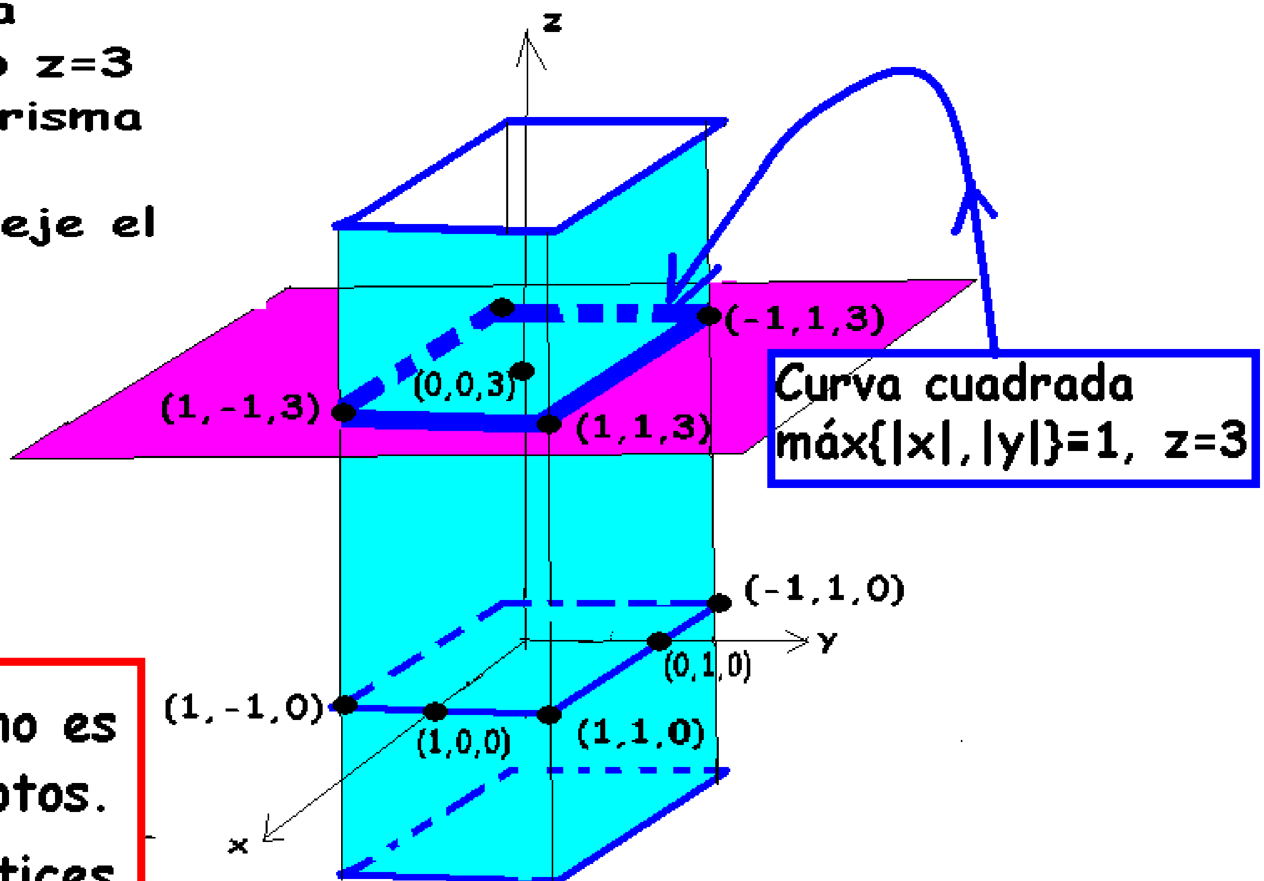
En $\mathbb{R}^3$ la condición de ligadura (2 ecuaciones)

$\varphi_1(x,y,z) = 0,\ \varphi_2(x,y,z) = 0,$

$\varphi_1 = \text{máx}\{|x|,|y|\}-1$

$\varphi_2(x,y,z) = z-3$

es un curva cuadrada contenida en el plano $z=3$ intersección con el prisma $\text{máx}\{|x|,|y|\}=1$ de base cuadrada y eje el eje de las z.



En este ejemplo φ_1 no es diferenciable en los ptos.
ESQUINA: los 4 vértices del cuadrado

CLASE 25 PARTE 2:
Mínimos y Máximos CONDICIONADOS ABSOLUTOS Y RELATIVOS.

Bibliografía de la Clase 25:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.6, parágrafo 49.**

Ejercicios para las clase 26

- **Práctico 8 del año 2007.**

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de q variables reales.

Sea la ligadura ligadura

$$L : \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \end{cases}$$

tal que el conjunto

$$L \subset D$$

Sea un punto $a \in L$

DEFINICIÓN: El número real f(a) se llama **máximo relativo de f condicionado a la ligadura L** (y el punto a se llama lugar donde se alcanza ese máximo relativo condicionado) si:

•Existe algún entorno $B_\delta(a)$ del punto a tal que:

$$f(p) \leq f(a) \qquad \forall\ p \in B_\delta(a) \cap L$$

DEFINICIÓN: El número real f(a) se llama **máximo absoluto de f condicionado a la ligadura L** (y el punto a se llama lugar donde se alcanza ese máximo absoluto condicionado) si:

$$f(p) \leq f(a) \qquad \forall\ p \in L$$

OBSERVACIÓN: El máximo absoluto condicionado, si existe, es uno de los máximos relativos condicionados.

CONCLUSIÓN: Sabiendo que existe Máximo absoluto condicionado, es entre los máximos relativos condicionados, el mayor.

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de q variables reales.

Sea la ligadura

$$L : \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_q) = 0 \end{cases}$$

tal que el conjunto ligadura $L \subset D$

Sea un punto $a \in L$

DEFINICIÓN: El número real $f(a)$ se llama **mínimo relativo de f condicionado a la ligadura L** (y el punto a se llama lugar donde se alcanza ese mínimo relativo condicionado) si:

•Existe algún entorno $B_\delta(a)$ del punto a tal que:

$$f(p) \geq f(a) \quad \forall\ p \in B_\delta(a) \cap L$$

DEFINICIÓN: El número real $f(a)$ se llama **mínimo absoluto de f condicionado a la ligadura L** (y el punto a se llama lugar donde se alcanza ese mínimo absoluto condicionado) si:

$$f(p) \geq f(a) \quad \forall\ p \in L$$

OBSERVACIÓN: El mínimo absoluto condicionado, si existe, es uno de los mínimos relativos condicionados.

CONCLUSIÓN: Sabiendo que existe mínimo absoluto condicionado, es entre los mínimos relativos condicionados, el menor.

Métodos para hallar máximo y mínimo de f condicionados a la ligadura L:

DIRECTO: 1) En los tramos donde las m ecuaciones de L son diferenciables y cumplen las hipótesis del teorema de función implícita, si se puede, despejar m variables en función de las otras q-m

2) Sustituir esas m variables en la función f. Queda una función compuesta g que depende de q-m variables independientes.

ALTERNATIVA:

3) Hallar los extremos relativos de esa función compuesta g, buscando:

*puntos críticos de g.

4) Estudiar aparte los puntos de L donde puede haber extremos relativos sin ser puntos críticos de g. Son: no es diferenc. ó no cumplehip.func.implíc

* puntos "esquina" de L

* ó donde f no es diferenciable, ó

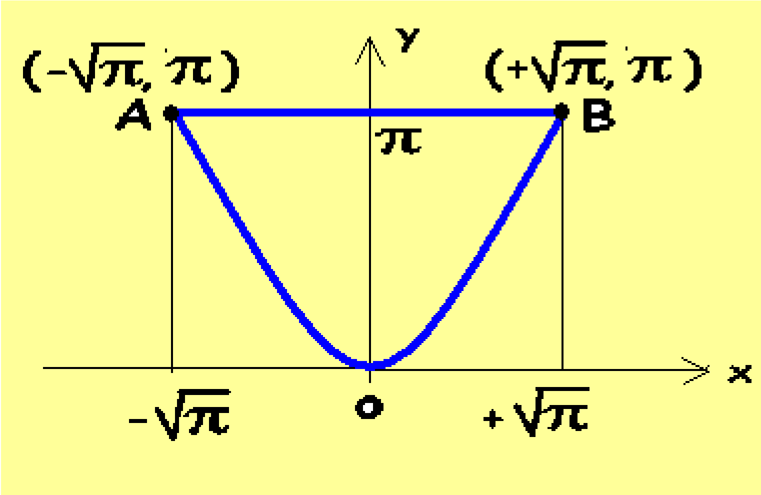
* están en el borde del dominio de g (en R^{q-m})

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

EJEMPLO: Demostrar que existen y hallar máximo y mínimo absoluto condicionado la ligadura L de la función F:

$$F(x,y) = \sqrt{\pi}\, x + y \qquad L: \{y - x^2 = 0,\ -\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi}\} \cup \{y = \pi,\ -\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi}\}$$

L NO tiene dos ecuaciones (a la vez), sino una sola (o la parábola o la recta), L es una curva que tiene dos tramos: es la unión del arco de parábola entre los puntos A O B de la figura, con el segmento de recta AB.



L es una SOLA CURVA, (formada como unión de dos arcos), diferenciable en todos sus puntos excepto en los ptos. ESQUINA A y B.

Existen Máximo y mínimo absoluto de F en L porque F es continua y L es compacto (Teo de Weierstrass).

$$F(x,y)=\sqrt{\pi}\,x+y$$

$$L:\{y-x^2=0,\ -\sqrt{\pi}\le x\le\sqrt{\pi}\}\cup\{y=\pi\ ,-\sqrt{\pi}\le x\le\sqrt{\pi}\}$$

En parábola $y=x^2$:

$g(x)=F(x,x^2)=\sqrt{\pi}\,x+x^2$

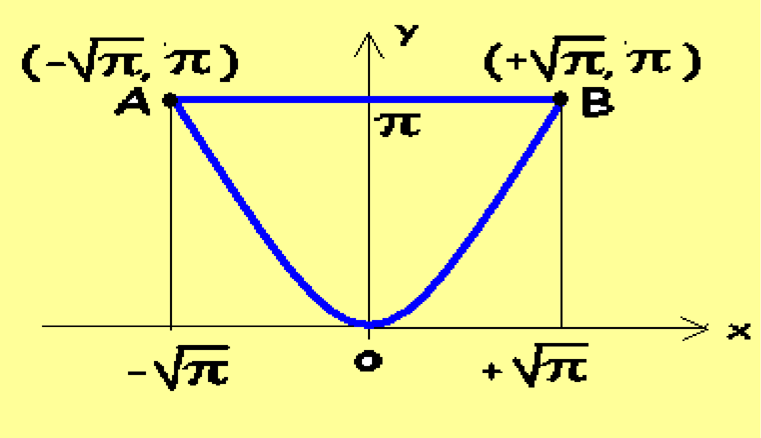
dom. de g: $-\sqrt{\pi}\le x\le\sqrt{\pi}$

ptos. críticos de g:

$g'(x)=\sqrt{\pi}+2x=0$

$x=-\sqrt{\pi}/2$

$F(-\sqrt{\pi}/2,\pi/4)=-\pi/4$



Ptos esquina son A y B, ya estudiados.

Ptos donde f no es diferenciable No hay.

Ptos en el borde del dominio de g:

A: $x=-\sqrt{\pi}$, $y=\pi$ $\quad F(-\sqrt{\pi},\pi)=0$

B: $x=+\sqrt{\pi}$, $y=\pi$ $\quad F(+\sqrt{\pi},\pi)=2\pi$

En el segmento AB $y=\pi$

$g(x)=F(x,\pi)=\sqrt{\pi}\,x+\pi$

dom. de g:

No hay ptos. críticos de g pues $g'(x)=\sqrt{\pi}\neq 0$

El Máximo Absoluto de F condicionado a L es el mayor de los valores de F marcados en rojo.

$$F(+\sqrt{\pi},\pi)=2\pi$$

El mínimo absoluto de F condicionado a L es el menor de los valores de F marcados en rojo:

$$F(-\sqrt{\pi}/2,\pi/4)=-\pi/4$$

CLASE 25 PARTE 3: Método de los MÚLTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Bibliografía de la Clase 25:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.6, parágrafo 49.

Ejercicios para las clase 26

•Práctico 8 del año 2007.

Objetivo del método de multiplicadores de Lagrange: Encontrar algunos puntos candidatos donde pueda haber extremos relativos o absolutos de la función F (función real de q variables reales) condicionados a m ecuaciones de Ligadura L, cuando vale para estas la hipótesis del teorema de función implícita pero no se puede despejar explícitamente m variables en función de las otras q-m.

HIPÓTESIS (*): (1) y (2)
PARA APLICAR EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

1) Se da la función real que es DIFERENCIABLE en el abierto V:

$$\boxed{f : V \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}}$$

$V \subset \mathbb{R}^q$ V entorno abierto del punto (a,b), $a \in \mathbb{R}^{q-m}$ $b \in \mathbb{R}^m$

Usamos la siguiente notación:

$$p = (\underbrace{x_1, x_2 \ldots, x_{q-m}}_{x \in \mathbb{R}^{q-m}}, \underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_m}_{y \in \mathbb{R}^m}) \in V \subset \mathbb{R}^q$$

$$p = (x,y) \in \mathbb{R}^q$$

2) Se dan las siguientes m ecuaciones de Ligadura:

$$L : \begin{cases} \varphi_1(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x,y) = 0 \end{cases}$$

Que cumplen las hipótesis del teorema de Función Implícita en torno del punto (a,b), es decir:

- φ son funciones diferenciables en V.
- Las ecuaciones se verifican en el punto (a,b)
- $\det J_y \varphi \neq 0$

TEOREMA DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

Si se cumplen las hipótesis (*): (1) y (2)
y si (a,b) es un punto donde f tiene un extremo relativo (puede ser el absoluto) condicionado a la ligadura L,

Entonces (a,b,λ) **es un punto crítico de la "función de Lagrange":**

$$G(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda_1\varphi_1(x,y) + \lambda_2\varphi_2(x,y) + \ \dots \ + \lambda_m\varphi_m(x,y)$$

para cierto valor
de los "multiplicadores de Lagrange": $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$

Es decir:

$$G_{x_1}(a,b,\lambda) = 0 \quad G_{x_2}(a,b,\lambda) = 0 \ \dots \ G_{x_{q-m}}(a,b,\lambda) = 0$$
$$G_{y_1}(a,b,\lambda) = 0 \quad G_{y_2}(a,b,\lambda) = 0 \ \dots \ G_{y_m}(a,b,\lambda) = 0$$
$$G_{\lambda_1}(a,b,\lambda) = 0 \quad G_{\lambda_2}(a,b,\lambda) = 0 \ \dots \ G_{\lambda_m}(a,b,\lambda) = 0$$

NOTA: El recíproco es falso: no todo punto crítico de la función de Lagrange es necesariamente un extremo relativo condicionado de f a L.

CONSECUENCIA: Los extremos condicionados hay que buscarlos entre los puntos críticos de la función de Lagrange y entre los puntos donde no se cumplen las hipótesis (1) y (2)
pero que verifican la ecuaciones de Ligadura L.

EJEMPLO: Hallar los extremos absolutos de F condicionados a L, siendo:

$$F(x,y,z)= x+y+z^2 \qquad L: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Existen los extremos absolutos porque F es continua en el compacto L.

F y L son diferenciables en todo $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} \det J\, L_{x,z} = 2x \\ \quad \text{o} \\ \det J\, L_{y,z} = 2y \neq 0 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones L cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita (ya sea x, z en función de y, o y, z en función de x)

Se cumplen las hipótesis (1) y (2) del teorema de los multiplicadores de Lagrange en todos los puntos que verifiquen la ecuaciones de ligadura L. Entonces los extremos condicionados están solamente entre los puntos críticos de la función de Lagrange:

$$G(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x+y+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-1)+\lambda_2(x+y+z)$$

$$\left.\begin{array}{l} G_x = 1+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ G_y = 1+2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ G_z = 2z+\lambda_2=0 \\ G_{\lambda_1} = x^2+y^2-1=0 \\ G_{\lambda_2} = x+y+z=0 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{cases} (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}/2, 2\sqrt{2}) \\ (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, +\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}/2, -2\sqrt{2}) \end{cases}}$$

$$F(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}) = \sqrt{2}+2$$

$$F(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, +\sqrt{2}) = \sqrt{2}-2$$

$\Rightarrow$ Máximo de F condicionado a L es $\sqrt{2}+2$

Mínimo de F condicionado a L es $\sqrt{2}-2$

CLASE 25 PARTE 4: Demostración del TEOREMA de los MÚLTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Bibliografía de la Clase 25:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.6, parágrafo 49.

Ejercicios para las clase 26

•Práctico 8 del año 2007.

Dem. del teorema de los multiplicadores de Lagrange:

1er. Caso: En $\mathbb{R}^2$ F(x,y) con una sola ecuación de Ligadura: $L:\ \varphi(x,y)=0$

$L:\ \varphi(x,y)=0$ cumple hipótesis de función implícita:

$\Rightarrow \exists\ y=y(x)\quad \forall x\in B_\delta(a)$ diferenciable, tal que

$$\varphi(x,y(x))=0 \qquad \forall x\in B_\delta(a)$$

$$y'(a) = -\varphi_x(a,b)\Big/\varphi_y(a,b)$$

(a,b) extremo de F condicionado a L

a extremo relativo de la función compuesta F(x,y(x)) definida $\forall x\in B_\delta(a)$

a interior a $B_\delta(a)$

a punto crítico de la función compuesta F(x,y(x)

$$F_x(a,b) + F_y(a,b)\, y'(a) = 0$$

$$F_x(a,b) + F_y(a,b)\left(-\varphi_x(a,b)\Big/\varphi_y(a,b)\right) = 0$$

Llamando $\lambda = -F_y(a,b)\Big/\varphi_y(a,b)$

resulta

$$F_y(a,b) + \lambda\varphi_y(a,b)=0 \qquad (1)$$

$$F_x(a,b) + \lambda\varphi_x(a,b)=0 \qquad (2)$$

$$\varphi(a,b) = 0 \qquad (3)$$

Siendo la función de Lagrange:

$$G(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y)$$

(1) (2) (3) $\Rightarrow \begin{cases} G_x(a,b,\lambda)=0 \\ G_y(a,b,\lambda)=0 \\ G_\lambda(a,b,\lambda)=0 \end{cases}$

Luego: (a,b,λ) es punto crítico de la f. de Lagrange G $\square$

Caso General: En $\mathbb{R}^q$ con m ecuaciones de Ligadura L:

Idem. Demostración del 1er. Caso, sustituyendo:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

$$L: \ \varphi(x,y) = 0 \ \begin{cases} \varphi_1(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\det J_y \varphi \neq 0$ en vez de $\varphi_y \neq 0$

$J_y \varphi$ en vez de φ_y , $J_x \varphi$ en vez de φ_x

matriz inversa $(J_y \varphi)^{-1}$ en vez de $1/\varphi_y$

Función de Lagrange

$$G(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda_1 \varphi_1(x,y) + \lambda_2 \varphi_2(x,y) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(x,y)$$

en vez de $G(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$

$\square$

CLASE 25 PARTE 5:
Aplicación del TEOREMA de los MÚLTIPLICADORES DE LAGRANGE.
Distancia entre dos curvas.

Bibliografía de la Clase 25:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.6, parágrafo 49.

Ejercicios para las clase 26

•Práctico 8 del año 2007.

DEFINICIÓN: **Dadas en $\mathbb{R}^2$ dos curvas $L_1 : \varphi_1(x,y) = 0$ y $L_2 : \varphi_2(x,y) = 0$ la distancia entre ambas es**

$$\min\{\|A-B\|,\ A \in L_1,\ B \in L_2\}$$

PROPOSICIÓN 1: Ese mínimo absoluto existe. Dem: La distancia entre dos puntos es una función acotada inferiormente (por 0), luego existe el ínfimo

$$I = \inf\{\|A-B\|,\ A \in L_1,\ B \in L_2\}$$

Para demostrar que es un mínimo, hay que probar que se alcanza para una pareja de puntos $A \in L_1,\ B \in L_2$

Por definición de ínfimo, para todo natural n exite un par de puntos $A_n \in L_1,\ B_n \in L_2$ tales que:

$$I \leq \|A_n - B_n\| < I + (1/n)$$

Como las sucesiones A_n, B_n son acotadas, por Bolzano-Weierstrass existe subsucesión convergente

$$A_n \longrightarrow A, \quad B_n \longrightarrow B$$

Por ser continua la función distancia:

$$I \leq \lim \|A_n - B_n\| = \|A-B\| \leq \lim I + (1/n) = I$$

$$\Rightarrow \|A-B\| = I$$

Las curvas son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$ (sus complementos son abiertos), (aunque no sean conjuntos compactos) y toda sucesión convergente de puntos de un cerrado tiene punto límite en ese cerrado:

$$\Rightarrow A \in L_1,\ B \in L_2 \quad \square$$

PROPOSICIÓN 2: La distancia entre las dos curvas diferenciables

$$L_1:\ \varphi_1(x,y)=0 \quad y \quad L_2:\ \varphi_2(x,y)=0$$

es

$$d= ||A-B|| = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

donde $(A,B,\lambda)=(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2)$ es alguno de los puntos críticos de la función de Lagrange:

$$G(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2)=(x-u)^2+(y-v)^2+\lambda_1\varphi_1(x,y)+\lambda_2\varphi_2(u,v)$$

Dem:

Por definición, d es el mínimo relativo condicionado de la función

$$||A-B|| = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

siendo A= (x,y) en la curva $L_1:\ \varphi_1(x,y)=0$

y siendo B = (u,v) en la curva $L_2:\ \varphi_2(u,v)=0$

Entonces d^2 es también el mínimo condicionado de la distancia al cuadrado, y por el teorema de multiplicadores de Lagrange, es un punto crítico de G.

EJEMPLO: Hallar la distancia entre la elipse $x^2+4y^2=4$ y la recta $y=-x+6$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Aplicando la proposición anterior, hallemos los puntos críticos de la función de Lagrange:

$$\boxed{G(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) = (x-u)^2+(y-v)^2+\lambda_1(x^2+4y^2-4)+\lambda_2(v+u-6)}$$

$$\begin{cases} G_x(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) = 2(x-u)+2\lambda_1 x = 0 \\ G_y(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) = 2(y-v)+8\lambda_1 y = 0 \\ G_u(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) = -2(x-u)+\lambda_2 = 0 \\ G_v(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) = -2(y-v)+\lambda_2 = 0 \\ G_{\lambda_1}(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+4y^2-4 = 0 \\ G_{\lambda_2}(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) = v+u-6 = 0 \end{cases}$$

G tiene dos puntos críticos:

$(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2) =$

$(\sqrt{2},\ \sqrt{2}/2,\ 3-\sqrt{2}/4,\ 3+\sqrt{2}/4,\ -(3\sqrt{2}/4)-3/8,\ 6+3\sqrt{2}/2)$

$(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}/2,\ 3+\sqrt{2}/4,\ 3-\sqrt{2}/4,\ (3\sqrt{2}/4)-3/8,\ 6-3\sqrt{2}/2)$

Evaluemos $F=||A-B||^2=(x-u)^2+(y-v)^2$ en los dos puntos críticos de G, y después seleccionemos el punto donde F toma el menor valor.

$$F(\sqrt{2},\ \sqrt{2}/2,\ 3-\sqrt{2}/4,\ 3+\sqrt{2}/4)= =(3-5\sqrt{2}/4)^2+(3-\sqrt{2}/4)^2$$

$$F(-\sqrt{2},-\sqrt{2}/2,\ 3+\sqrt{2}/4,\ 3-\sqrt{2}/4)= =(3+5\sqrt{2}/4)^2+(3+\sqrt{2}/4)^2$$

Respuesta: La distancia d buscada es:

$$\boxed{d=\sqrt{(3-5\sqrt{2}/4)^2+(3-\sqrt{2}/4)^2}}$$

NOTA: El otro punto crítico NO es máx. de la distancia entre puntos A y B de las dos curvas, ya que este máx. abs. NO EXISTE

CLASE 26 PARTE 1:
ESTUDIO DE MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTOS.

Bibliografía de la Clase 26:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.6, parágrafo 49, ejemplo 49_2.

Ejercicios para las clase 26

•Práctico 8 del año 2007.

ESTUDIO DE MÁXIMO Y/O MÍNIMO ABSOLUTOS

1er. Paso: Investigar existencia de Max. y/o Mín. Absolutos de f en D:

- **Si f es continua y si D es compacto (cerrado y acotado) Teor de Weierstrass→ Existen Máx. y Mín. Abs.de f en D**
- **Aunque f sea continua, si D no es comptacto (si es cerrado pero no acotado, o si es acotado pero no ce-rrado, o si no es ni acotado ni cerrado): estudiar cada caso particular. Puede existir o no Máx absoluto, y existir o no Mín. absoluto. (Ver ejemplos)**

2do. Paso: SABIENDO QUE EXISTE MÁX. Y/O MÍN. ABSOLUTOS, HALLARLO(s).

(1) Juntar bolsa de candidatos (ver pizarrón siguiente).

(2) Evaluar f en cada punto p de la bolsa de candidatos

(3) El mayor de los valores de f hallados es el MAX. ABSOLUTO, si ya se sabía que este MAX. ABSOLUTO EXISTE.

(4) El menor de los valores de f hallados es el MÍN. ABSOLUTO, si ya se sabía que este MÍN. ABSOLUTO EXISTE.

BOLSA DE PUNTOS CANDIDATOS DONDE PODRÍA ALCANZARSE MÁX. o MÍN. ABSOLUTOS.

Contiene TODOS los puntos p tales que:

p está en el interior de D y además cumple ALGUNA de las condiciones siguientes:

- **f no es diferenciable en p, ó**
- **p es punto crítico de f (no es necesario clasificarlos)**

p está en la frontera de D y en D, y además cumple ALGUNA de las condiciones siguientes:

- **f no es diferenciable en p, ó**
- **La función en la ecuación de la frontera de D no es diferenciable en p, ó p es un punto “esquina de la frontera” ó p es un punto de la “frontera de la frontera”, ó**
- **Si se usa el método de la función de Lagrange L, p es punto crítico de L (no es necesario clasificarlos), ó**
- **Si se usa el método de despejar una variable en la ecuación de la frontera y sustituir en f, p es un punto crítico de la función resultante después de sustituir en f la variable despejada.**

CLASE 26 PARTE 2: EXISTENCIA DE MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTOS. EJEMPLOS

Bibliografía de la Clase 26:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.6, parágrafo 49, ejemplo 49_2.**

Ejercicios para las clase 26

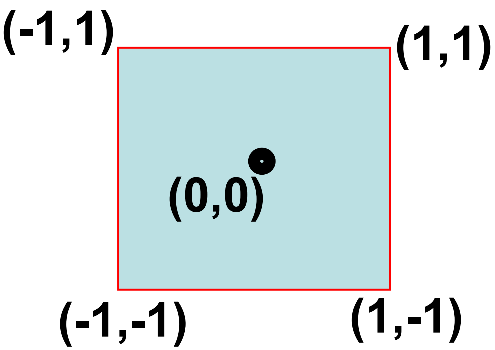
- **Práctico 8 del año 2007.**

EJEMPLO DE ESTUDIO DE EXISTENCIA DE MÍNIMO O MÁXIMO ABSOLUTO:

Investigar si la función

$$f(x,y)=x^2+y^2 \quad \text{definida } \forall (x,y) \in D = \quad \text{máx}\{|x|,|y|\}<1$$

tiene máximo y/o mínimo absolutos en D.



D es el cuadrado abierto (sin el borde) de la figura.
f es continua en D.
D es acotado pero no es cerrado: no es compacto.
No podemos aplicar el teorema de Weierstrass a D para deducir si hay máximo o mínimo absolutos de f en D.

Consideramos la clausura $\overline{D}$ de D ($\overline{D}$ es el cuadrado cerrado), $\overline{D}$ es compacto, y f ADMITE UNA EXTENSIÓN CONTINUA f AL CONJUNTO COMPACTO $\overline{D}$ (en este ejemplo; no siempre sucede; en este ejemplo la función extendida se puede definir con la misma fórmula dada para f, pero con su dominio $\overline{D}$ en vez de D).

Por el teorema de Weierstrass existe Máximo y mínimo absolutos de f en $\overline{D}$.
Hallemos primero ese máximo y ese mínimo de f, que se alcanzan en puntos de $\overline{D}$.

Para hallar máx. y mín. absoluto de f en $\overline{D}$, podemos aplicar el método general, sabiendo ya que existen los extremos absolutos en $\overline{D}$. Pero en este caso, en vez de aplicar el método general usaremos particularidades especiales de la función f y del dominio cuadrado $\overline{D}$.

Como f es el cuadrado de la distancia de (x,y) al origen, el máximo absoluto de f en $\overline{D}$ se alcanza en sus cuatro vértices (1,1), (-1,1), (-1,-1) y (1,-1) de $\overline{D}$ y vale $\sqrt{2}$. El mínimo absoluto de f en $\overline{D}$ se alcanza en el origen (0,0) y vale 0.

Si alguno de los puntos de $\overline{D}$ donde se alcanza el máximo absoluto de f cae también en D, entonces existe máximo absoluto de f en D y es el mismo que el de f en $\overline{D}$. En caso contrario no existe máximo absoluto de f en D. Idem para el mínimo absoluto.

En nuestro ejemplo ninguno de los cuatro vértices donde se alcanza el valor $\sqrt{2}$ pertenece a D, entonces

NO EXISTE MÁXIMO ABSOLUTO DE f en D.

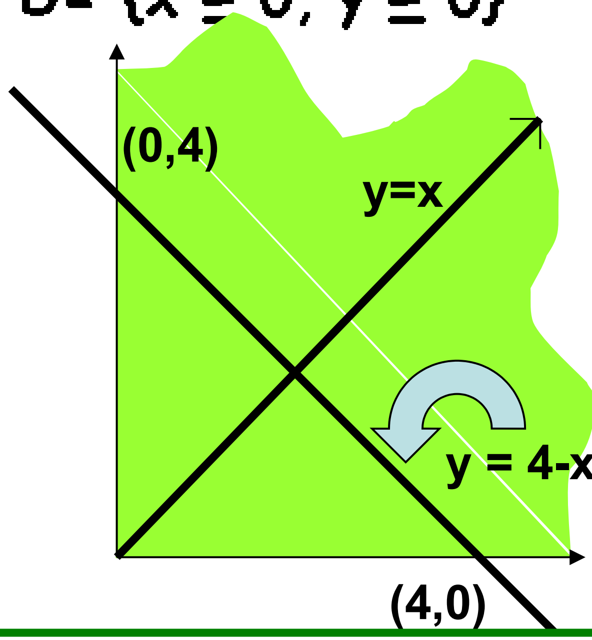
El origen donde se alcanza el valor 0 pertenece a D, entonces

EXISTE MÍNIMO ABSOLUTO DE f en D, se alcanza en el Origen y vale f(0,0)= 0.

EJEMPLO: Investigar si la función

$$f(x,y) = (x+y-4)^2 \text{ definida } \forall (x,y) \in D = \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

tiene máximo y/o mínimo absolutos en D.



D es el primer cuadrante cerrado (incluido su borde formado por los dos semiejes coordenados positivos y el origen).

D es cerrado pero no es acotado: no es compacto. No podemos aplicar el teorema de Weierstrass para deducir si existen o no máximo y/o mínimo absolutos de f en D.

Investiguemos primero si f es acotada en D:

¿Acotada superiormente? En la semirrecta x=y, x>0 contenida en D, si hacemos $x \to +\infty$ (estamos dentro de D) resulta: $f(x,x) = (2x-4)^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Luego f no es acotada superiormente en D.

NO EXISTE MÁXIMO ABSOLUTO de f en D.

¿Acotada inferiormente? Sí, porque

$$f(x,y) = (x+y-4)^2 \geq 0 \ \forall (x,y) \in D$$

Existe ínfimo de f en D.

Si se alcanza el ínfimo de f en algún punto de D, será mínimo absoluto de f en D. En caso contrario no existe mínimo absoluto de f en D.

$f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=4-x$;

$y=4-x$; (x,y) en D $\Leftrightarrow$ $\boxed{y = 4-x,\ 0 \leq x \leq 4.}$

Es un segmento de recta incluido en D donde se alcanza el ínfimo 0. $\Rightarrow$

EXISTE MÍNIMO ABSOLUTO DE f EN D, vale 0 y se alcanza en todos los puntos de ese segmento.

CLASE 26 PARTE 3:
BÚSQUEDA DE MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTOS. EJEMPLO.

Bibliografía de la Clase 26:

•Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 3, sección 3.6, parágrafo 49, ejemplo 49_2.

Ejercicios para las clase 26

•Práctico 8 del año 2007.

EJEMPLO DE BÚSQUEDA DE MÁX. Y MÍN. ABSOLUTOS SABIENDO QUE EXISTEN. Sea la función:

$$F(x,y)=|x-y|+x^2 \text{ definida } \forall (x,y) \in D = \text{máx}\{|x|,|y|\} \leq 1$$

Encontrar, si existen, el máximo y el mínimo absoluto de f en D.

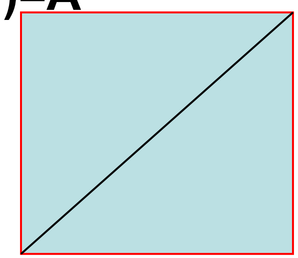
D es el cuadrado cerrado (interior+frontera) de la figura.

D es cerrado y acotado: es compacto.

F es continua en D.

Por el teorema de Weierstrass existen Máximo y Mínimo absolutos de F en D

(-1,1)=A (1,1)=B



(-1,-1)=D (1,-1)=C

Puntos candidatos (a medida que los hallamos ya evaluamos F(x,y) en ellos):

1) En el interior de D: los puntos críticos y los puntos donde f no es derivable.

$$F_x(x,y)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x > y \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x < y \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$F_y(x,y)=\begin{cases} -1 & \text{si } x > y \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } x < y \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

las derivadas parciales no existen en el segmento $x = y$, $-1 \leq x \leq 1$ (segmento DB)

Puntos críticos no hay porque $F_y(x,y)$ no se anula nunca.

Puntos donde f no es diferenciable:

Segmento DB:

$x = y$, $-1 \leq x \leq 1$

Evaluación de f en los puntos del segmento DB:

$$\begin{cases} F(x,x)=x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ \text{mayor valor } F(1,1)=F(-1,-1)=1 \\ \text{menor valor } F(0,0)=0 \end{cases}$$

2) En la frontera de D: **la descomponemos en los cuatro segmentos AB, BC, CD, y DE (lados del cuadrado D). Buscamos los candidatos en cada uno de esos segmentos (y a medida que encontramos candidatos ya vamos evaluando la función F en cada uno de ellos.**

$$\text{segmento } AB \begin{cases} F(x,1)=x^2-x+1, & -1\le x\le 1 \\ (x^2-x+1)'=2x-1=0 & \\ x=1/2;\ y=1 & F(1/2,1)=3/4 \\ \text{extremos del segmento } AB & \\ (-1,1);\ (1,1):\ F(-1,1)=3;\ F(1,1)=1 & \end{cases}$$

$$\text{segmento } DC \begin{cases} F(x,-1)=x^2+x+1, & -1\le x\le 1 \\ (x^2+x+1)'=2x+1=0 & \\ x=-1/2;\ y=1 & F(-1/2,-1)=3/4 \\ \text{extremos del segmento } AB & \\ (-1,-1);\ (1,-1):\ F(-1,-1)=1;\ F(1,-1)=3 & \end{cases}$$

$$\text{segmento } CB \begin{cases} F(1,y)=2-y, & -1\le y\le 1 \\ (2-y)'=-1\neq 0 & \\ \text{extremos del segmento } CB & \\ (1,-1);\ (1,1):\ F(1,-1)=3;\ F(1,1)=1 & \end{cases}$$

$$\text{segmento } DA \begin{cases} F(-1,y)=2+y, & -1\le y\le 1 \\ (2+y)'=+1\neq 0 & \\ \text{extremos del segmento } CB & \\ (-1,-1);\ (-1,1):\ F(-1,-1)=1;\ F(-1,1)=3 & \end{cases}$$

CONCLUSIÓN: El mayor de los valores de F evaluados en cada uno de los candidatos fue F(-1,1)=F(1,-1)=3. Entonces 3 es el MáXIMO ABSOLUTO DE F EN D

El menor de los valores de F evaluados en cada uno de los candidatos fue F(0,0)=0.

Entonces 0 es el MÍNIMO ABSOLUTO DE F EN D.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 1.
Topología en R^n.

1. (a) Investigar si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son normas:
   i. $f(x,y) = |x| + |y|$
   ii. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   iii. $f(x,y) = |x+y|$
   iv. $f(x,y) = \text{máx}(|x|,|y|)$

   (b) Para aquellas que sean normas dibujar la bola de centro $(3,4)$ y radio 2 e indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ella: $(3,4)$, $(4,5)$ y $(0,1)$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en $\mathbb{R}^2$:

$$a_n = \left(e^{-n}, \frac{3}{n}\right) \quad b_n = \left(e^{-n}+2, [1+(-1)^n]n\right) \quad c_n = \left((-1)^n, (-1)^n + \frac{1}{n}\right)$$

3. Probar que si una sucesión tiene límite, entonces toda subsucesión tiene el mismo límite.

4. Sea $(x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión *contractiva*, es decir, tal que existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$, que cumple

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \qquad \forall\, n \geq 1.$$

   Demostrar que:

   (a) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

   (b) Si $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, entonces $\|x_p - x_q\| \leq \dfrac{k^q}{1-k}\|x_1 - x_0\|$. Sugerencia: desigualdad triangular.

   (c) (x_n) es de Cauchy y por lo tanto convergente.

5. Se definen los siguientes conjuntos:

   (a) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$
   (b) $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y > 0\}$
   (c) $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
   (d) $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, (x,y) \neq (0,0)\}$
   (e) $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
   (f) $A_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\}$
   (g) $A_7 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + e^{-n}, n \geq 1\} \cup \{(-1,0)\} \cup \{A_1 \cap \mathbb{Q}^2\}$
   (h) $A_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$
   (i) $A_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$

   (a) Representar gráficamente e investigar si son acotados.
   (b) Hallar el interior, el exterior, la frontera y la clausura.
   (c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.
   (d) Indicar si son abiertos o cerrados.

6. (a) Probar que toda bola abierta es un conjunto abierto.
   (b) Probar que si A es un conjunto abierto y $p \in A$ entonces $A \backslash \{p\}$ es abierto.
7. Sean A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $C = A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Hallar $int(C)$, $\bar{C}$, y ∂C.
8. Sean A y B dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto suma $A + B$ de la siguiente forma:

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n \ : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

   Demostrar que si A es abierto entonces $A + B$ es abierto. ¿Qué se puede decir de $A + B$ si A es cerrado?
9. Probar los siguientes resultados:
   (a) A es abierto sii $A = int(A)$ sii A^c es cerrado sii $A \cap \partial A = \phi$.
   (b) $int(A) = \bar{A} - \partial A$ y que $int(A)$ es el mayor conjunto abierto incluido en A.
   (c) A es cerrado sii A^c es abierto sii $A = \bar{A}$ sii $\partial A \subseteq A$ sii $A' \subseteq A$.
   (d) $\bar{A} = A \cup \partial A = A \cup A'$ y que $\bar{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.
   (e) A' es un conjunto cerrado.
10. (a) Probar que la unión de una familia arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
    (b) Probar que la intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. ¿Es cierto que la intersección de una cantidad arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto?
    (c) Extraer conclusiones sobre la unión e intersección de conjuntos cerrados.
11. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $A \subseteq C$ cerrado. Probar que A es también compacto.
12. **El Conjunto de Cantor (Optativo)**
    (a) Sea $(K_m)_{m \geq 0}$ una sucesión dec reciente de conjuntos compactos no vacíos en R^n, es decir que:
        – $K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y no vacío $\forall\, m \geq 0$.
        – $K_{m+1} \subseteq K_m \ \forall\, m \geq 0$.

        Probar que $K = \cap_{m=0}^{\infty} K_m$ es compacto y no vacío.
    (b) Nos limitaremos ahora al caso $n = 1$. Se define la sucesión $(K_m)_{m \geq 0}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ mediante el siguiente procedimiento: $K_0 = [0, 1]$, $K_1 = K_0 \backslash (1/3, 2/3)$, $K_2 = K_1 \backslash [(1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)]$,... En general, K_{m+1} se obtiene de K_m quitándole los tercios centrales abiertos de cada uno de los intervalos que forman K_m. Sea $K = \cap_{m=0}^{\infty} K_m$ (denominado "conjunto de Cantor"). Probar que:
        – K es compacto y no vacío.
        – $K = K'$.
        – K tiene interior vacío.
    (c) Observar que cada número real $x \in [0, 1]$ admite una representación "ternaria" de la forma:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} \quad \text{con } \alpha_k \in \{0, 1, 2\} \ \forall\, k \geq 1$$

        ¿Cómo es la representación ternaria de los puntos del conjunto de Cantor?. Deducir que K no es numerable.
    (d) ¿Cuál es la "longitud" de $[0, 1] \backslash K$?

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 2.
Funciones de varias variables: representaciones gráficas y límites.

1. Hacer un croquis del dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones.

$$\text{(a) } x^2+y^2 \qquad \text{(b) } x^2-y^2 \qquad \text{(c) } f(x,y)=x^2 \qquad \text{(d) } y/x \qquad \text{(e) } xy$$

2. Hacer un croquis del dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones.

$$\text{(a) } \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{(b) } \log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{(c) } \cosh\left(x^2-y^2\right) \qquad \text{(d) } \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\text{(e) } \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \qquad \text{(f) } \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right) \qquad \text{(g) } x^{(y^2)}$$

3. Probar que en los siguientes casos NO existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$\text{(a) } f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{(b) } f(x,y)=\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(c) } f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x+y\neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y=0 \end{cases}$$

4. (a) Probar que si $\lim_{x\to p} f(x)=0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p, entonces $\lim_{x\to p} f(x)g(x)=0$.
   (b) Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x,y)\to(0,0)$:

$$\text{(a) } x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{(b) } \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \text{(c) } \frac{xy^3}{x^2+y^4}$$

5. (a) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ y existen los límites unidimensionales: $\lim_{x\to a} f(x,y)$ y $\lim_{y\to b} f(x,y)$, entonces existen los límites iterados y se tiene:

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)=L$$

   (b) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x-y)/(x+y)$ existen en $(0,0)$ pero son distintos.
   (c) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x^2y^2)/(x^2y^2+(x-y)^2)$ existen y dan iguales en $(0,0)$ pero no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
   (d) Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\operatorname{sen}\frac{1}{y}, & \text{si } y\neq 0 \\ 0, & \text{si } y=0 \end{cases}$$

   Mostrar que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ y que un límite iterado no existe. ¿Esto contradice la parte (a)?

6. Calcular:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2+xy+1}{x^2-x-y}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\,y\,\log|y|$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2}$ (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$

7. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Graficar f y mostrar que $f(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ a lo largo de cualquier recta por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual, salvo en el origen, $f(x,y)$ tenga el valor constante 1. Concluir que f no tiene límite en el origen.

8. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en una bola reducida $U = B_R^*((0,0))$ de centro $(0,0)$ y radio R. Mediante el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, se obtiene $g\colon V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, donde $V = (0,R)\times[0,2\pi)$.

   (a) Probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ sii $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $|g(r,\theta) - L| < \varepsilon\ \forall\, r \in (0,\delta), \theta \in [0,2\pi)$.

   (b) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ entonces $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta) = L\ \forall\, \theta \in [0,2\pi)$.

   (c) Se consideran las funciones f siguientes

   (i) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (ii) $f(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (iii) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   Calcular, cuando existan, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta)$, éste último en función de $\theta \in [0,2\pi)$.

   (d) Probar que es falso el recíproco de la parte (b).

   (e) En el caso particular en el que g tiene la forma $g(r,\theta) = h(r)k(\theta)$, con h y k funciones $h\colon (0,R) \to \mathbb{R}$ y $k\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}$, probar que si k es una función acotada y $\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

   (f) Calcular:

   (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

9. Se considera la función

$$f(x,y) = \frac{ax+y+by^2}{\mathrm{sen} y + \log(1+x)} \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinar a y b para que todos los límites direccionales de f en $(0,0)$ sean iguales.

   (b) Para los a y b determinados en la parte anterior, probar que f carece de límite.

10. Discutir según $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la existencia del límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+xy+y^2}$$

11. **Optativo.** Sea $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un inifinitésimo en el origen tal que $\varepsilon(0) = 1$. Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{3x^2\varepsilon(y) - y^2\varepsilon(x)}{\log(x^2 + y^2 + 1)}$$

(a) Analizar si f tiene límite en $(0, 0)$ según el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \neq 0\}$.

(b) Analizar si f tiene límite en $(0, 0)$.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 3.
Funciones continuas de varias variables.

1. Determinar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ son continuas y discontinuas.

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} (4x^2y^3)/(4x^2+y^6) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y-1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x+y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   (d) Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua.

   $f(x,y) = \begin{cases} (\varphi(y)-\varphi(x))/(y-x) & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que:
   (a) Si $f(p) > 0$ entonces hay una bola B_p con centro en p tal que $\forall\, x \in B_p$ se tiene $f(x) > 0$.
   (b) El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\} = f^{-1}((0,+\infty))$ es abierto.
   (c) El conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado.

3. Probar que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto $f^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y no acotado, y $f\colon C \to \mathbb{R}^m$ continua, tal que existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Demostrar que f es uniformemente continua en C.

5. Una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice *Lipchitziana* sii existe $k \geq 0$ tal que:

   $$\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\| \quad \forall\, x,y \in A.$$

   (a) Probar que toda función Lipchitziana es uniformemente continua.
   (b) Probar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no Lipchitziana.

6. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, se define el *diámetro* de A como $\operatorname{diam}(A) = \sup(\{d(x,y) : x,y \in A\})$.
   (a) Probar que si $C \subset \mathbb{R}^n$ es compacto entonces existen $x,y \in C$ tal que $\operatorname{diam}(C) = d(x,y)$.
   (b) Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon C \to C$ una función continua tal que

   $$\|f(x)-f(y)\| > \|x-y\| \quad \forall\, x \neq y \in C.$$

   Probar que C no puede ser compacto.

7. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y $f\colon C \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Demostrar que el gráfico de f,

   $$\operatorname{graf}(f) = \{(x,f(x)) \,:\, x \in C\},$$

   es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$.

8. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se llama *camino* (o *arco*) continuo en C a toda función continua $\alpha\colon [0,1] \to C$. Si $a,b \in C$ y α es un camino en C tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$, se dice que α conecta a con b. Se dice que C es *conexo por caminos* (o *arcoconexo*) sii $\forall\, a,b \in C\ \exists\, \alpha$ camino en C que conecta a con b.
   (a) Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo por caminos y $f\colon C \to \mathbb{R}$ continua. Probar que si $a,b \in C$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son tales que $f(a) \leq \mu \leq f(b)$ entonces existe $c \in C$ tal que $f(c) = \mu$. Sugerencia: considerar $f \circ \alpha$ con α un camino de a a b.

(b) Probar que si C es arcoconexo y $f\colon C \to \mathbb{R}^m$ es continua entonces $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m$ es arcoconexo.

(c) Sean $S^1 = \{a \in \mathbb{R}^2 : \|a\| = 1\}$ y $a_0 \in S^1$. Probar que S^1 y $S^1 \backslash \{a_0\}$ son arcoconexos.

(d) Probar que no existe $f\colon S^1 \to [0,1]$ continua y biyectiva. Sugerencia: suponer por absurdo que existe una tal f, sacar un punto de $a_0 \in S^1$ conveniente y considerar la restricción de f a este nuevo conjunto.

9. **Optativo. (Un teorema de punto fijo)**
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $f\colon C \to C$ una *contracción*, esto es, existe $k \in (0,1)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in C.$$

(a) Sea a un punto cualquiera de C. Se define la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ de la siguiente forma: $x_0 = a$ y $x_n = f(x_{n-1})$, si $n \geq 1$. Probar que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \quad \forall\, n \geq 0.$$

(b) Deducir que (x_n) es una sucesión de Cauchy y que existe $p \in C$ tal que $\lim_n x_n = p$.

(c) Demostrar que existe un único punto $p \in C$ tal que $f(p) = p$. Sugerencia: observar que f es continua y tomar p como en la parte anterior.

(d) Analizar si el resultado anterior es válido si C no fuese cerrado.

10. **Optativo.**

(a) Sean V y W espacios vectoriales normados y $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
   i. T es continua en V.
   ii. T es continua en el vector nulo de V.
   iii. Existe $k \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$, $\forall\, x \in V$.
   iv. Existe $k \geq 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$, $\forall\, x, y \in V$.
   v. $T(A)$ es acotado $\forall\, A \subseteq V$ acotado.

(b) Probar que toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es continua.

11. **Optativo.**
Se considera la función determinante $det\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que $det(a,b,c,d) = ad - bc$

(a) Probar que det es una función continua en $\mathbb{R}^4$.

(b) Sean $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, A \text{ es invertible}\}$ y $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, det(A) = 0\}$.
Investigar si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son abiertos, cerrados o ninguna de las dos cosas. Aquí el espacio de matrices se considera como $\mathbb{R}^4$.

12. **Optativo.** Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. Probar que si toda función continua $f\colon C \to \mathbb{R}$ es acotada entonces C es compacto.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 4.
Derivadas parciales y diferenciabilidad.

1. Calcular las derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones $f = f(x, y)$, especificando en cuales puntos las derivadas existen.

$$\text{(a) } ax^\alpha + by^\beta \quad \text{(b) } \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x} \quad \text{(c) } x^2y^{3/2} \quad \text{(d) } \log(x + \frac{y}{x^2}) \quad \text{(e) } \operatorname{tg} x \quad \text{(f) } \operatorname{arctg}(xy)$$

2. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones $f = f(x, y)$.

$$\text{(a) } xy \qquad \text{(b) } \log xy \qquad \text{(c) } e^{x^y} \qquad \text{(d) } \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$$

3. Verificar que la función $u(x, t) = e^{-a^2k^2t}\operatorname{sen} kx$ satisface la ecuación del calor: $u_t = a^2u_{xx}$.

4. Estudiar la continuidad de cada función y la existencia de las derivadas direccionales respectivas.

$$\text{(a) } f(x,y) = \begin{cases} (xy)/(\sqrt{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{(b) } f(x,y) = \begin{cases} (e^{xy}-1)/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(c) } f(x,y) = \begin{cases} x^3/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$\text{(d) } f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\frac{1}{x} \cos\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ a & \text{si } xy = 0 \end{cases} \qquad \text{(e) } f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^3y^2 & \text{si } y < 1 \end{cases}$$

5. (a) Sea $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde U es un abierto, una función tal que las derivadas parciales de f existen y son acotadas en U. Probar que f es continua en U.

   (b) Generalizar el enunciado anterior para $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

6. Representar gráficamente la siguiente función $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bosquejando las curvas de nivel.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x^2 \text{ o } 2x^2 \leq y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$$

   Demostrar que f es continua y que existen todas las derivadas direccionales en $(0, 0)$ y que, sin embargo, f no es diferenciable en dicho punto.

7. Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x} + e^{xy} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de f en los puntos $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$, hallando, si existen, las derivadas parciales.

8. En cada caso hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en el punto P.

$$\text{(a) } 3x^2 + 4y^2,\ P = (0, 1) \qquad \text{(b) } 2\cos(x - y) + 3 \operatorname{sen} x,\ P = (\pi, \pi/2)$$

9. Calcular la matriz Jacobiana en el punto a y el diferencial $df(a)(\Delta x, \Delta y)$ de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = e^{x+y} + 2\operatorname{sen}(2x-y), \quad a = (0,0)$

   (b) $f(x,y,z) = (e^{z+x+y}, x+y+2z), \quad a = (0,1,2)$

   (c) $f(x,y) = (e^{x+y}, \operatorname{sen}(2x-y), \log(1+y^2)), \quad a = (\pi,\pi)$

   (d) $f: \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$, en $a \in \mathbb{R}^p$ fijo cualquiera; siendo $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, donde A es una matriz $q \times p$ y $\mathbf{x}$ se escribe como una matriz columna $p \times 1$.

10. Probar que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es continua pero no tiene derivadas direccionales en $(0,0)$ ni es diferenciable en ese punto. (Solución en J.Burgos, par. 24-1.)

11. Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = x^3 y$. Sean $a = (0,0)$ y $b = (1,2)$. Hallar ξ en el segmento $[a,b]$ tal que $f(b) - f(a) = df(\xi)(b-a)$.

12. Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

   (a) Probar que existen derivadas parciales en todos los puntos y calcularlas.

   (b) Probar que f es diferenciable.

   (c) Probar que f no es de clase C^1.
   (Solución en libro de J. Burgos, par 28-1, punto 2do.)

13. ¿Existe alguna función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f_x(x,y) = e^{x+y}$ y $f_y(x,y) = \cos(xy)$?

Notación de la Regla de la Cadena: En algunos ejercicios se usa la siguiente notación:
Si $u = f(x,y)$, $x = x(r,s)$ e $y = y(r,s)$ entonces

$$u_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \; u_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$x_r = \frac{\partial x(r,s)}{\partial r}, \; x_s = \frac{\partial x(r,s)}{\partial s}, \;\; y_r = \frac{\partial y(r,s)}{\partial r}, \; y_s = \frac{\partial y(r,s)}{\partial s}$$

Regla de la cadena:

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} f(x(r,s), y(r,s)) = u_x(x(r,s), y(r,s)) \cdot x_r(r,s) + u_y(x(r,s), y(r,s)) \cdot y_r(r,s)$$

$$\text{en breve: } u_r = u_x x_r + u_y y_r$$

$$u_s = \frac{\partial}{\partial s} f(x(r,s), y(r,s)) = u_x(x(r,s), y(r,s)) \cdot x_s(r,s) + u_y(x(r,s), y(r,s)) \cdot y_s(r,s)$$

$$\text{en breve: } u_s = u_x x_s + u_y y_s$$

14. Escribir la Regla de la Cadena para los siguientes casos:

(a) $u = f(x, y)$ con $x = x(r, s, t)$ e $y = y(r, s, t)$. Es decir, hallar las derivadas parciales u_r, u_s, u_t de la función compuesta $u = f(x(r, s, t), y(r, s, t))$.

(b) $w = f(x, y, z)$ con $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ y $z = z(s, t)$. Es decir, hallar las derivadas parciales w_s, w_t de la función compuesta $w = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$.

(c) $v = f(p, q, r)$ con $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$ y $r = r(x, y, z)$. Es decir, hallar las derivadas parciales v_x, v_y, v_z de la función compuesta $v = f(p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z))$.

15. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sean $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Calcular la derivada segunda $(f \circ \lambda)''$ en función de las derivadas parciales de f y de las derivadas de λ.

16. Sean f_1, g_1, g_2, h_1, h_2, h_3, k_1, k_2 funciones diferenciables de codomino $\mathbb{R}$, x, y, z, t, ξ, η, u, v, w variables reales y considérense las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$:

(a) $f(x, y, z) = f_1(x, y, z)$ | (c) $h(\xi, \eta) = (h_1(\xi, \eta), h_2(\xi, \eta), h_3(\xi, \eta))$

(b) $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ | (d) $k(u, v, w) = (k_1(u, v, w), k_2(u, v, w))$

(i) En cada caso hallar el dominio y codomino, esto es, especificar el n y m adecuados.

(ii) Hallar los diferenciales de las composiciones $g \circ f$, $h \circ k$, $k \circ h$ y $h \circ g$ en función de las derivadas parciales de f_1, g_1, g_2, h_1, h_2, h_3, k_1, k_2.

17. Hallar, en cada caso, las matrices jacobianas de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$.

(a) $f(u, v) = (\frac{1}{2} \log(u^2 + v^2), \operatorname{arctg}(u/v))$, $g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

(b) $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $g(x, y) = (x \cos y, x \operatorname{sen} y)$.

(c) $f(u, v) = (e^u \cos v, e^u \operatorname{sen} v)$, $g(x, y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.

18. **Opcional.**

(a) Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Hallar $\partial_i T$ para $i = 1, \ldots, n$.

(b) Sea A una matriz simétrica $n \times n$ y $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función dada por $Q(x) = x^t A x$, esto es, $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Hallar $\partial_i Q$ para $i = 1, \ldots, n$.

(c) Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \langle x, T(x) \rangle$. Hallar la derivada direccional $\partial f / \partial u$ para todo versor $u \in \mathbb{R}^n$.

19. **Opcional.**

(a) Demostrar que una función de clase C^2, $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es solución de la ecuación $u_{xy} = 0$ sii existen funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que $u(x, y) = f(x) + g(y)$.

(b) Demostrar que una función de clase C^2, $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es solución de la ecuación $u\, u_{xy} = u_x u_y$ sii existen funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que $u(x, y) = f(x)g(y)$.

(c) Demostrar que una función de clase C^2, $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es solución de la ecuación $u_{xx} = u_{yy}$ sii existen funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$.

20. **Opcional.** Demostrar que todos los planos tangentes a la gráfica de la función $f(x, y) = y\, h(y/x)$, en donde $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, tienen un punto en común.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 5.
Desarrollo de Taylor.

1. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de f en el origen:

   (a) $f(x) = \log\cos x$ (b) $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ (c) $f(x) = \int_0^x \operatorname{arctg}((1+t)^{-1/3})\, dt$

2. Calcular el límite cuando $x \to 0$:

   (a) $\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$ (b) $\dfrac{x^2 e^{\operatorname{sen} x} - \log(1+x^2)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$

   (c) $\left(\dfrac{\cosh x}{\cos x}\right)^{\frac{\log(1+x)}{x-\operatorname{sen} x}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{1-\cos(1-\cos x)} - \sqrt{2}}{x^4}$

3. ¿Cuál es el menor número de términos que hay que tomar en el desarrollo de Taylor de e^x en $x = 0$, para obtener un polinomio que aproxime, con un error menor que 10^{-4}, a e^x en el intervalo $[-1, 1]$?

4. Hallar el polimonio de segundo grado que mejor aproxima a $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ en torno al origen.

5. Desarrollar xyz^2 en potencias de x, $y-1$ y $z+1$.

6. Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x^2+1}$ (b) $f(x,y) = e^x \cos y$

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 6.
Función implícita y función inversa.

1. Probar que la ecuación $xy^2 + 4x^2y - 12 = 0$ determina a y en función de x alrededor del punto $(1, 2)$. Dar la ecuación de la tangente y de la normal a $y = \varphi(x)$ en $x = 1$.

2. Probar que las siguientes ecuaciones determinan a y en función de x alrededor de (x_0, y_0). Hallar $\varphi'(x_0)$ y $\varphi''(x_0)$.
   (a) $x^2y + \log(xy) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
   (b) $x + \operatorname{senh}(x) - \operatorname{sen}(y) = 0$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Hallar $\varphi'''(x_0)$.
   (c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, en (x_0, y_0) genérico tal que $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ e $y_0 \neq 0$.

3. Sea $(x, y) = g(u, v)$ la función inversa local en torno de $(u, v) = (1, 4)$, $(x, y) = (0, 0)$ de $f(x, y) = (1 - 2x - y + x^2,\ 4 - x - y - 3xy)$. Hallar la matriz Jacobiana de g en $(u, v) = (1, 4)$, el diferencial primero $dg(1, 4)(\Delta u, \Delta v)$, y el diferencial segundo $d^2g(1, 4)(\Delta u, \Delta v)$.

4. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f\colon U \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \neq 0$, tal que
$$(x^2 + y^4)f(x, y) + (f(x, y))^3 = 1 \quad \forall\ (x, y) \in U.$$
   Probar que f es de clase C^∞ en U.

5. Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $g(x) = f(x) + (f(x))^5\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$. Probar que si g es de clase C^∞, entonces f también lo es.

6. Demostrar que la ecuación $e^y + y = e^{-2x} - x$ determina una única función $y = \varphi(x)$ definida en todo $\mathbb{R}$. Sugerencia: estudiar las funciones $F(y) = e^y + y$ y $G(x) = e^{-2x} - x$. Hallar $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ y $\varphi'''(0)$.

7. Se considera el conjunto $S = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = c\}$ en donde f es una función real de clase C^1 en el conjunto abierto U tal que $\nabla f(p) \neq 0\ \forall\ p \in S$.
   (a) Probar que para cada $p \in S$ existe alguna bola B_p tal que $S \cap B_p$ es el gráfico de una función de dos variables.
   (b) Probar que $\nabla f(p)$ es ortogonal a S en $p\ \ \forall\ p \in S$. Deducir la ecuación del plano tangente a S en un punto genérico.

8. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $xyz = a^3$, $a > 0$, en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). Demostrar que el volumen del tetraedro limitado por ese plano y los planos coordenados es $9a^3/2$. (Vol. tetraedro = área de la base $\times$ altura /3.)

9. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = axz + x \operatorname{arctg} z + z \operatorname{sen}(2x + y) - 1$, $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Probar que la ecuación $f(x, y, z) = 0$ determina a z en función de x e y alrededor de $(0, \pi/2, 1)$.
   (b) Hallar a para que $(0, \pi/2)$ sea un punto crítico de la función φ definida implícitamente.
   (c) Calcular
$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \frac{\varphi(x, y) - 1 - 3x^2/2 - 2x(y - \pi/2)}{x^2 + (y - \pi/2)^2}$$

10. Sea $z = z(x, y)$ la función definida implícitamente por la ecuación

$$y^2 z + x(\log z - 1) = 0, \quad z(1, -1) = 1$$

Hallar el desarrollo de Taylor de orden 2 de z en un punto apropiado y calcular aproximadamente el valor de $z(4/3, -4/3)$. Dar una cota del error que se comete al hacer dicha aproximación.

11. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2, (x^2 + y^2)^2)$.

   (a) Cada circunferencia centrada en el origen tiene su imagen por f en un punto de una parábola que se determinará.

   (b) Calcular $J_{(x,y)} f$ y probar que f no es localmente invertible en ningún punto del plano.

   (c) Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $J_{(x_0,y_0)} g = 0$. Probar, con algún ejemplo, que g puede ser localmente invertible en (x_0, y_0).

12. **Optativo.** Sean $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u(x, y, z) = (x, y, z)$
$r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Se define

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \ \frac{\partial r}{\partial y}, \ \frac{\partial r}{\partial z} \right)$$

   (a) Mostrar que ∇r es unitario y colineal con u.

   (b) Mostrar que $\nabla r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2} u$, $\alpha > 0$.

   (c) Hallar f tal que $\nabla f = u$.

   (d) Se sabe que el campo eléctrico creado por una carga puntual Q ubicada en $(0, 0, 0)$, en el punto (x, y, z) es $E(x, y, z) = kQu/r^3$ y que el potencial eléctrico es una función V tal que $E = -\nabla V$. Hallar V y deducir que el campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales.

13. **Optativo.** Se considera el conjunto $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : y \leq -1\}$ la función $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda \log(y + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Discutir para que valores de λ existe una única función $y = \varphi(x)$ tal que $f(x, \varphi(x)) = 0$, para todo x en un entorno de 0.

   (b) Calcular $\lim_{x \to 0} \varphi(x)/x^2$

14. **Optativo.** Sea p un polinomio de grado n con coeficientes reales y que admite una raíz x_0 simple. Se considera la siguiente afirmación:

   Si se cambian un poco los coeficientes del polinomio p, se obtiene un nuevo polinomio q de grado n que admite una raíz simple y_0 próxima a x_0.

   Considere la validez de la afirmación anterior. En caso de ser verdadera formalícela y justifíquela.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 7.
Extremos relativos, condicionados y absolutos.

1. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:
   (a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.
   (b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$.
   (c) $f(x,y) = (x-y+1)^2$.
   (d) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$.
   (e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
   (f) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x+y)$ en $[0,\pi]\times[0,\pi]$.
   (g) $(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.
2. Sea $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$. Hallar todos sus puntos críticos y clasificarlos. ¿Tiene f extremos absolutos en todo $\mathbb{R}^2$?
3. Hallar los extremos absolutos y relativos y los puntos de silla de $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ en $[0,1]\times[0,1]$.
4. Verificar que la función f dada por $f(x,y,z) = x^4+y^4+z^4-4xyz$ tiene un punto estacionario en $(1,1,1)$ y determinar la naturaleza de dicho punto.
5. Hallar los extremos relativos condicionados de f:
   (a) $f(x,y) = xy$ con $x+y=1$.
   (b) $f(x,y) = ax+by$ con $x^2+y^2=1$.
   (c) $f(x,y,z) = x-2y+2z$ con $x^2+y^2+z^2=1$.
   (d) $f(x,y,z) = (x-y)^2$ con $x^2+y^2+z^2=1$, $z=2x-y$.
   (e) $f(x,y,z) = y$ con $3x-4y=0$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.
6. Hallar extremos absolutos de f en D:
   (a) $f(x,y) = xy$ con $D = \{(x,y) : 5x^2-6xy+5y^2 \leq 4\}$.
   (b) $f(x,y) = e^{(x-1)^2+y^2}$ con $D = \{(x,y) : 2x^2+y^2 \leq 1\}$.
7. Sea $f(x,y) = x^2+y^2-xy$
   (a) Hallar los extremos relativos de f en $\mathbb{R}^2$.
   (b) Hallar los extremos relativos de f condicionados por $x^2+y^2+xy=1$.
   (c) Hallar los extremos relativos de f condicionados por $x^2+y^2+xy\leq 1$.
8. Hallar la máxima y mínima distancia desde el origen a la curva $5x^2+6xy+5y^2=8$. Hallar además los puntos en que hay tangentes horizontales y verticales.
9. Hallar los puntos de la superficie $z^2-xy=1$ más próximos al origen.
10. Calcular la mínima distancia de la elipse $x^2/4+y^2=1$ a la recta de ecuación $x+y-4=0$.

11. Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-2x+2y+3}$$

en la región:

$$D = \{\ (x,y)\ /\ 2x+y \geq 0,\ y \leq 0\ \}$$

12. Hallar los extremos absolutos de la función:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+(z+1)(x+y+1)$$

en la región:

$$D = \{\ (x,y,z)\ /\ x^2+y^2-2z^2 \leq 0,\ x+y+4z-4 \leq 0,\ z \geq 0\ \}$$

Sugerencia: entender previamente como es el conjunto D.

13. Hallar el máximo condicionado de $f(x,y,z) = \log(x)+\log(y)+3\log(z)$ con $x^2+y^2+z^2 = 5r^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ y deducir que si a,b,c son tres reales positivos entonces se cumple que

$$abc^3 \leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

14. **Optativo.** Sea $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por $g(X,Y) = \langle X,Y\rangle$. Hallar los extremos condicionados de f a $\|X\|^2+\|Y\|^2 = 1$ y deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

15. **Optativo.** Demostrar que existe una función $y=\phi(x)$ definida para todo $x\in\mathbb{R}$ implícitamente por la ecuación $3x^3+6x^2y+3xy^2+2y^3 = 16$.

    (Sugerencia: para cada x real fijo probar que $3x^3+6x^2y+3xy^2+2y^3-16$ es estrictamente creciente con y y tiene codominio todo el eje real.)

    Hallar los máximos y mínimos de la función $y=\phi(x)$.

    Completar el estudio de ϕ y hacer su representación gráfica.

    Mostrar que ϕ tiene una sola raíz y calcularla con error menor que 10^{-2}.

16. **Optativo.** **Método de mínimos cuadrados:** Dados n números reales diferentes $x_1,\dots,x_n$ y otros n números (no necesariamente diferentes) $y_1,\dots,y_n$, hallar una función lineal $f(x)=ax+b$ tal que minimice el "error cuadrático":

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(f(x_i)-y_i\right)^2$$

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 8.
Integrales paramétricas e integrales iteradas dobles y triples.

1. Hallar $f'(x)$ en los siguientes casos:
   (a) $f(x) = \int_1^{2x} \log(tx+1)\, dt$, $x > 0$ (de dos maneras).
   (b) $f(x) = \int_x^{x^2} t^{-1} e^{tx}\, dt$, $x > 0$.
2. Sea $f(x) = \int_0^{\pi} \log(x - \cos(t))\, dt$, $x > 1$.
   (a) Calcular $f'(x)$.
   (b) Determinar f sabiendo que $f(5/3) = \pi \log(3/2)$.
   (c) Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi} \log\left(\frac{3-\cos(x)}{2-\cos(x)}\right) dx$.
3. Hallar extremos los relativos de
$$f(a,b) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} + ax^2 + bx\right)^2 dx.$$
4. Hallar a y b para que la integral $\int_0^{\pi} (a + b\,\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(2x))^2\, dx$ sea mínima.
5. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de f sobre ciertos dominios. Dibujar esos dominios y expresar las integrales iteradas en el orden inverso de integración.
$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\, dx \qquad \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\, dy \qquad \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx$$
$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\, dy \qquad \int_1^e dx \int_0^{log(x)} f(x,y)\, dy$$
6. Calcular $\int\int_D f(x,y)\, dx\, dy$ en cada uno de los siguientes casos:
   (a) $f(x,y) = 2x - y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3\}$.
   (b) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.
   (c) $f(x,y) = xy^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y \le x \le y+1\}$.
   (d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \mathrm{sen}\, x\}$.
   (e) $f(x,y) = xy$ y $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1\}$; $D_2 = D_1 \cap \{y \ge 0\}$.
   (f) $f(x,y) = x^2y^2$ y D la región del primer cuadrante comprendida entre las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.
7. Calcular $\int\int\int_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ en los siguientes casos:
   (a) $f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^2}$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y,\ 0 \le x,\ x+y+z \le 1\}$.
   (b) $f(x,y,z) = x$ y D la región limitada por $z = 0$, $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$ y $x + y + z = 6$.
   (c) $f(x,y,z) = xyz$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y,\ 0 \le x,\ 0 \le z,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.
   (d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ y D la región limitada por $z = 0$, $z = 1$ y $z^2 = x^2 + y^2$.
   (e) $f(x,y,z) = z$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le a \le x^2 + y^2 + z^2 \le b\}$.
   (f) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le r\}$.
   (g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ y D la región limitada por $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ y $z = 2$.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 9.
Integrales múltiples. Cambio de variables, áreas, volúmenes e integrales impropias.

1. Calcular $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ en cada uno de los siguientes casos haciendo cambios de variable convenientes.

   (a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le r^2\}$.

   (b) $f(x,y) = x+y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x,\ 0 \le y \le x,\ x^2+y^2 \le 1\}$.

   (c) $f(x,y) = x^2+y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y,\ x^2+y^2 \ge 1,\ x^2+y^2-2x \le 0\}$.

   (d) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ y D el triángulo de lados $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$. Se sugiere pasar a polares.

   (e) $f(x,y) = (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)$ y D el cuadrado de vértices $(0,\pi)$, $(2\pi,\pi)$ y $(\pi,2\pi)$.

   (f) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 2-x^2\}$. Se sugiere hacer el cambio de variable $x = \sqrt{v-u}$, $y = v+u$.

2. Calcular $\int\int_D x\,dx\,dy$ donde D el paralelogramo de vértices $(-2/3,-1/3)$, $(2/3,1/3)$, $(4/3,-1/3)$ y $(0,-1)$. Hacerlo de dos formas: en cartesianas y haciendo un cambio de variables lineal que transforme D en el cuadrado de vértices: $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

3. Sean $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ y $h\colon U \to h(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por $h(u,v) = (u+v, v-u^2)$.

   (a) Probar que h es un cambio de coordenadas y hallar explícitamente h^{-1}.

   (b) Hallar Jh y $\det(Jh)$ en un punto genérico. Hallar $\det(J(h^{-1}))$ en $(2,0) = h(1,1)$.

   (c) Sea T el triángulo de lados $u = 0$, $v = 0$ y $u+v = 2$. Calcular el área de $S = h(T)$.

4. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\int\int_D f(xy)\,dx\,dy = \log(2)\int_1^2 f(u)\,du$$

   Donde D es la región del primer cuadrante limitada por $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.

5. Hallar $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Sugerencia: Dado $r > 0$ sea D_r el disco de centro en el origen y radio r, y sea Q_r el cuadrado de centro en el origen y lados paralelos a los ejes con longitud r. Demostrar las desigualdades siguientes, calcular las integrales dobles y luego hacer $r \to +\infty$:

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \int\int_{Q_r} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \int\int_{D_{\sqrt{2}r}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

   La integral en Q_r conviene calcularla en coordenadas cartesianas, pero las integrales en los discos D_r y $D_{\sqrt{2}r}$ conviene calcularlas en coordenadas polares.

6. Calcular en cada caso el área del conjunto D.

   (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{x^2}{a^2} \le 1\}$.

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2} \le y \le 1\}$.

   (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le r^2,\ x^2 \ge |r|\}$.

   (d) D comprendido entre $x = y^2$ y $x = 4-y^2$.

7. Calcular en cada caso el volumen del conjunto D.

   (a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

   (b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$.

   (c) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ x^2+y^2 \geq |rx|\}$.

   (d) D comprendido entre $z = x^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

8. Sea S el sólido determinado por las condiciones $z \leq 0$, $x^2+y^2 \leq 4$, $x^2+y^2 \geq z^2$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 16$. Pasando a coordenadas cilíndricas calcular $\int\int\int_S z\,dx\,dy\,dz$.

9. Sean $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ 0 \leq x\}$ y $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{6}{(x+y+1)^3}$.

   (a) Sea $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ 0 \leq x,\ x+y \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Calcular $\int\int_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$.

   (b) Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ 0 \leq x,\ x+y\}$. ¿Existe (es decir converge) la integral impropia $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$?

   (c) Sea $E_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y,\ 0 \leq x,\ x^2+y^2 \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\int_{E_n} f(x,y)\,dx\,dy$.

10. (a) Calcular $\int\int_{D_n} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, donde $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

    (b) Calcular, si existe, la integral impropia $\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2006.

Práctico 10.

1. Calcular las derivadas parciales de $F(u,v)$ para $u>0,\ v>0$, siendo:

   $F(u,v)=\iint_{D(u,v)} \operatorname{sen}((u+v)(x^2-y^2))\,dxdy, \quad D(u,v)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le u,\ 0\le y\le uvx\ \}$

   Sugerencia: Derivar las integrales simples paramétricas:
   $F(u,v)=\int_0^u G(u,v,x)\,dx, \quad G(u,v,x)=\int_0^{uvx} \operatorname{sen}((u+v)(x^2-y^2))\,dy \quad (1).$
   Respuesta:
   (2) $\partial G/\partial u = xv\,\operatorname{sen}((u+v)(x^2-u^2v^2x^2))+\int_0^{uvx}(x^2-y^2)\,\cos((u+v)(x^2-y^2))\,dy$
   (3) $\partial F/\partial u = G(u,v,u)+\int_0^u \partial G/\partial u\,dx$
   Sustituyendo (1) y (2) en (3) se obtiene $\partial F/\partial u$.

2. Sean m y n números naturales positivos. Se define

   $$S(m,n)=\frac{1}{m^3n^3}\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} n^2(m+2i)^2+m^2j^2$$

   Demostrar que existen, son iguales entre sí, y calcular los siguientes límites:

   $$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} S(m,n)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} S(m,n)$$

   Sugerencia: Calcular $\int_1^3\int_0^1(x^2+y^2)\,dxdy$. Después escribir la integral doble anterior como límite de sumas de Riemann en particiones formadas por mn rectangulitos $R_{i,j}$ todos iguales, de ancho $2/m$ y alto $1/n$, evaluando la función integrando para cada $R_{i,j}$ en el punto de $R_{i,j}$ con mayor abscisa y mayor ordenada.

   Respuesta: $L=28/6$.

3. Sea $f(x,y)$ una función real continua para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que

   $$f(x,y)=0 \text{ si } y=x^4, \quad f(x,y)>0 \text{ si } y\neq x^4.$$

   Se define la integral doble paramétrica:

   $$F(u,v)=\int_0^{(u+1)^2} dx\int_0^{v^2} f(x,y)\,dy$$

   Encontrar y clasificar todos los puntos críticos de $F(u,v)$. Probar que F no tiene máximo absoluto en el plano $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

   Sugerencia: Calcular las derivadas parciales de F respecto de u y v como en el ejercicio 1. Escribir la derivada parcial de F respecto de u como $u+1$ por la integral de una función no negativa. Usar que la integral de una función no negativa es cero si y solo si o bien el dominio de integración tiene medida nula, o bien la función es idénticamente nula excepto a lo sumo en un conjunto de medida nula. Para clasificar cada punto crítico (u_0,v_0) estudiar el signo de $F(u,v)-F(u_0,v_0)$.

   Respuesta: Los puntos críticos forman dos rectas: $u=-1$, v cualquiera, y $v=0$, u cualquiera. Son todos mínimos relativos. Si F tuviera máximo absoluto en $\mathbb{R}^2$ como sería interior, sería un máximo relativo, y por lo tanto un punto crítico. Pero todos los puntos críticos son mínimos relativos.

4. En este ejercicio x, y, z se miden en cm. Encontrar la masa (en $gr.$) del sólido S definido como:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^2 + y^2 \leq z, \ \ 0 \leq z \leq 1 \ \}$$

sabiendo que su densidad puntual es:

$$d(x,y,z) = \left(100 \, \frac{gr.}{cm.^6}\right) \ |\, x \, y \, z \,| \ cm.^3$$

Sugerencia: La masa es la integral triple en S de la función densidad puntual. Para integrar pasar a coordenadas cilíndricas.

Respuesta: $12,5 gr.$

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2007.

Práctico 1.
Ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Resolver (hallar la solución general, es decir: todas las soluciones) las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

   (a) $(1+y^2)yy' + (1+y^2) = 0$

   (b) $xe^{2y}y' - (1+e^{2y}) = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el cambio de variables $u(x) = y(x)/x$, de forma de llevarlas a ecuaciones de variables separadas del tipo $u' = A(u)B(x)$:

   (a) $x^2y' + y(y-x) = 0$

   (b) $(x+y)y' = x - y$

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas:

   (a) $y' + y\cos x = 0$

   (b) $x(x-1)y' + (1-2x)y = 0$

   (c) $y' - (2/x)y = 0$

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas:

   (a) $y' + y\cos x = \cos x \; senx$

   (b) $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$

   (c) $y' - (2/x)y = x^4$

5. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(I)\;\; y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (II)\;\; y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad ;\; (III)\;\; 2y'' + 2y' + y = 0$$

   (a) Encontrar las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ para las que se cumple los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

   y demostrar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes en el espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

   (b) Dadas las constantes a y b reales, hallar la solución $y(x)$ tal que $\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$ y probar que se cumple $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Deducir que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forman una base del espacio vectorial de todas las soluciones de la ecuación diferencial, y concluir que ese espacio tiene dimensión dos.

6. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^x$ sea una solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' - 2y = 0$. Hallar la solución general de dicha ecuación. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

7. Hallar las constantes a y b reales para que $y(x) = e^{2x}\cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

8. Hallar todos los valores reales de la constante a para que las ecuaciones $y'' + ay' - 2y = 0$ e $y'' - 2y' + ay = 0$ tengan soluciones en común además de $y(x) \equiv 0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

9. Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

   (a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

   (b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

   (c) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

   (d) $y'' + y = 3x^2 - 5x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

   (e) $y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

   (f) $y'' + y = (1 + x)^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2007.

Práctico 2.
Topología en R^n.

1. (a) Investigar si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son normas:
   i. $f(x,y) = |x| + |y|$
   ii. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   iii. $f(x,y) = |x+y|$
   iv. $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$

   (b) Para aquellas que sean normas dibujar la bola de centro $(3,4)$ y radio 2 e indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ella: $(3,4)$, $(4,5)$ y $(0,1)$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en $\mathbb{R}^2$:

$$a_n = \left(e^{-n}, \frac{3}{n}\right) \quad b_n = \left(e^{-n}+2, [1+(-1)^n]n\right) \quad c_n = \left((-1)^n, (-1)^n + \frac{1}{n}\right)$$

3. Probar que si una sucesión tiene límite, entonces toda subsucesión tiene el mismo límite.

4. Se definen los siguientes conjuntos:

   (a) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$
   (b) $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y > 0\}$
   (c) $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
   (d) $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, (x,y) \neq (0,0)\}$
   (e) $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
   (f) $A_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\}$
   (g) $A_7 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + e^{-n}, n \geq 1\} \cup \{(-1,0)\} \cup \{A_1 \cap \mathbb{Q}^2\}$
   (h) $A_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$
   (i) $A_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+1 \leq z\}$

   (a) Representar gráficamente e investigar si son acotados.
   (b) Hallar el interior, el exterior, la frontera y la clausura.
   (c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.
   (d) Indicar si son abiertos o cerrados.

5. (a) Probar que toda bola abierta es un conjunto abierto.
   (b) Probar que si A es un conjunto abierto y $p \in A$ entonces $A \backslash \{p\}$ es abierto.

6. Probar los siguientes resultados: (A^c indica el complemento de A, $int(A)$ indica el interior de A, $\bar{A}$ indica la clausura o adherencia de A, ∂A indica el borde o frontera de A, y A' indica el conjunto de puntos de acumulación de A).
   (a) A es abierto sii $A = int(A)$ sii A^c es cerrado sii $A \cap \partial A = \phi$.
   (b) $int(A) = \bar{A} - \partial A$ y que $int(A)$ es el mayor conjunto abierto incluido en A.
   (c) A es cerrado sii A^c es abierto sii $A = \bar{A}$ sii $\partial A \subseteq A$ sii $A' \subseteq A$.
   (d) $\bar{A} = A \cup \partial A = A \cup A'$ y que $\bar{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.
   (e) A' es un conjunto cerrado.

7. (a) Probar que la unión de una familia arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
   (b) Probar que la intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto; y que la intersección de una cantidad infinita de conjuntos abiertos no necesariamente es abierta.
   (c) Probar que la intersección de una familia arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
   (d) Probar que la unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado; y que la unión de una cantidad infinita de conjuntos cerrados no necesariamente es cerrada.

8. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $A \subseteq C$ cerrado. Probar que A es también compacto.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2007.

Práctico 3.
Funciones de varias variables: representaciones gráficas y límites. Del 27 al 31 de agosto.

1. Hacer un croquis del dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones.

$$\text{(a) } x^2+y^2 \qquad \text{(b) } x^2-y^2 \qquad \text{(c) } f(x,y)=x^2 \qquad \text{(d) } y/x \qquad \text{(e) } xy \qquad \text{(f) } 1/\sqrt{x^2+y^2}$$

2. Probar que en los siguientes casos NO existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$\text{(a) } f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{(b) } f(x,y)=\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(c) } f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x+y\neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y=0 \end{cases}$$

3. (a) Probar que si $\lim_{x\to p} f(x)=0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p, entonces $\lim_{x\to p} f(x)g(x)=0$.

   (b) Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x,y)\to(0,0)$:

$$\text{(a) } x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{(b) } \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \text{(c) } \frac{xy^3}{x^2+y^4}=y\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

   Para las partes (b) y (c) se sugiere usar la siguiente desigualdad válida para todos A y B reales: $2|AB|\leq A^2+B^2$.

4. (a) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ y si existen los límites unidimensionales: $\lim_{x\to a} f(x,y)$ y $\lim_{y\to b} f(x,y)$, entonces existen los límites iterados y se tiene:

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)=L$$

   (b) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x-y)/(x+y)$ existen en $(0,0)$ pero son distintos. Concluir que no existe $\lim_{(x,y)}\to(0,0)f(x,y)$.

   (c) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x^2y^2)/(x^2y^2+(x-y)^2)$ existen y dan iguales en $(0,0)$ pero no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   (d) Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\operatorname{sen}\frac{1}{y}, & \text{si } y\neq 0 \\ 0, & \text{si } y=0 \end{cases}$$

   Mostrar que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ y que un límite iterado no existe. ¿Por qué esto NO contradice la parte (a)?

5. Calcular:

$$\text{(a) } \lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} \qquad \text{(b) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,y\,\log|y| \qquad \text{(c) } \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

$$\text{(d) } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad \text{(e) } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \qquad \text{(f) } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$

6. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Graficar f y mostrar que $f(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ a lo largo de cualquier recta por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual, salvo en el origen, $f(x,y)$ tenga el valor constante 1. Concluir que f no tiene límite en el origen.

7. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en una bola reducida $U = B_R^*((0,0))$ de centro $(0,0)$ y radio R. Mediante el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, se obtiene $g\colon V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$, donde $V = (0,R) \times [0,2\pi)$.

   (a) Probar que $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ sii $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ (independiente de θ) tal que $|g(r,\theta) - L| < \varepsilon\ \forall\ r \in (0,\delta), \theta \in [0,2\pi)$.

   (b) Probar que si $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ entonces $\text{lím}_{r\to0^+} g(r,\theta) = L\ \forall\ \theta \in [0,2\pi)$.

   (c) Se consideran las funciones f siguientes

   (i) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (ii) $f(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (iii) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   Calcular, cuando existan, $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\text{lím}_{r\to0^+} g(r,\theta)$, éste último en función de $\theta \in [0,2\pi)$.

   (d) Probar que es falso el recíproco de la parte (b).

   (e) En el caso particular en el que g tiene la forma $g(r,\theta) = h(r)k(\theta)$, con h y k funciones $h\colon (0,R) \to \mathbb{R}$ y $k\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}$, probar que si k es una función acotada y $\text{lím}_{r\to0^+} h(r) = 0$ entonces $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

   (f) Calcular:

   (i) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ (ii) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2007.

Práctico 4.
Funciones continuas de varias variables. Del 3 al 7 de setiembre.

1. Determinar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ son continuas y discontinuas.
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} (4x^2y^3)/(4x^2+y^6) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y-1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x+y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que:
   (a) Si $f(p) > 0$ entonces hay una bola B_p con centro en p tal que $\forall\, x \in B_p$ se tiene $f(x) > 0$.
   (b) El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\} = f^{-1}((0,+\infty))$ es abierto.
   (c) El conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado.

3. Probar que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto $f^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y no acotado, y $f\colon C \to \mathbb{R}^m$ continua, tal que existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Demostrar que f es uniformemente continua en C.

5. Una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice *Lipchitziana* sii existe $k \geq 0$ tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in A.$$

   (a) Probar que toda función Lipchitziana es uniformemente continua.
   (b) Probar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no Lipchitziana.

Facultad de Ingeniería - IMERL
Cálculo 2 - Curso 2007.

Práctico 5.
Derivadas parciales y diferenciabilidad. Del 10 al 19 de setiembre.

1. Calcular las derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones $f = f(x,y)$, especificando en cuales puntos las derivadas existen.

$$\text{(a) } ax^\alpha + by^\beta \quad \text{(b) } \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x} \quad \text{(c) } x^2y^{3/2} \quad \text{(d) } \log(x + \frac{y}{x^2}) \quad \text{(e) } \operatorname{tg} x \quad \text{(f) } \operatorname{arctg}(xy)$$

2. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones $f = f(x,y)$.

$$\text{(a) } xy \qquad \text{(b) } \log xy \qquad \text{(c) } e^{x^y} \qquad \text{(d) } \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$$

3. Estudiar la continuidad de cada función y la existencia de las derivadas direccionales respectivas.

$$\text{(a) } f(x,y) = \begin{cases} (xy)/(\sqrt{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{(b) } f(x,y) = \begin{cases} (e^{xy}-1)/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{(c) } f(x,y) = \begin{cases} x^3/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \qquad \text{(d) } f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^3y^2 & \text{si } y < 1 \end{cases}$$

4. Representar gráficamente la siguiente función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bosquejando las curvas de nivel.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x^2 \text{ o } 2x^2 \leq y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$$

Demostrar que f es continua y que existen todas las derivadas direccionales en $(0,0)$ y que, sin embargo, f no es diferenciable en dicho punto.

5. En cada caso hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en el punto P.

$$\text{(a) } 3x^2 + 4y^2,\ P = (0,1) \qquad \text{(b) } 2\cos(x-y) + 3\operatorname{sen} x,\ P = (\pi, \pi/2)$$

6. Calcular la matriz Jacobiana en el punto a y el diferencial $df(a)(\Delta x, \Delta y)$ de las siguientes funciones:
   (a) $f(x,y) = e^{x+y} + 2\text{sen}(2x-y),\quad a = (0,0)$
   (b) $f(x,y,z) = (e^{z+x+y}, x+y+2z),\quad a = (0,1,2)$
   (c) $f(x,y) = (e^{x+y}, \text{sen}(2x-y), \log(1+y^2)),\quad a = (\pi,\pi)$

7. Probar que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es continua pero no tiene derivadas direccionales en $(0,0)$ ni es diferenciable en ese punto. (Solución en J.Burgos, par. 24-1.)

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = x^3y$. Sean $a = (0,0)$ y $b = (1,2)$. Hallar ξ en el segmento $[a,b]$ tal que $f(b) - f(a) = df(\xi)(b-a)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

   (a) Probar que existen derivadas parciales en todos los puntos y calcularlas.

(b) Probar que f es diferenciable.

(c) Probar que f no es de clase C^1.
(Solución en libro de J. Burgos, par 28-1, punto 2do.)

10. ¿Existe alguna función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f_x(x,y) = e^{x+y}$ y $f_y(x,y) = \cos(xy)$?

Notación de la Regla de la Cadena: En algunos ejercicios se usa la siguiente notación:
Si $u = f(x,y)$, $x = x(r,s)$ e $y = y(r,s)$ entonces

$$u_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \ u_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$x_r = \frac{\partial x(r,s)}{\partial r}, \ x_s = \frac{\partial x(r,s)}{\partial s}, \ \ y_r = \frac{\partial y(r,s)}{\partial r}, \ y_s = \frac{\partial y(r,s)}{\partial s}$$

Regla de la cadena:

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} f(x(r,s),y(r,s)) = u_x(x(r,s),y(r,s)) \cdot x_r(r,s) + u_y(x(r,s),y(r,s)) \cdot y_r(r,s)$$

en breve: $u_r = u_x x_r + u_y y_r$

$$u_s = \frac{\partial}{\partial s} f(x(r,s),y(r,s)) = u_x(x(r,s),y(r,s)) \cdot x_s(r,s) + u_y(x(r,s),y(r,s)) \cdot y_s(r,s)$$

en breve: $u_s = u_x x_s + u_y y_s$

11. Escribir la Regla de la Cadena para los siguientes casos:

(a) $u = f(x,y)$ con $x = x(r,s,t)$ e $y = y(r,s,t)$. Es decir, hallar las derivadas parciales u_r, u_s, u_t de la función compuesta $u = f(x(r,s,t), y(r,s,t))$.

(b) $w = f(x,y,z)$ con $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ y $z = z(s,t)$. Es decir, hallar las derivadas parciales w_s, w_t de la función compuesta $w = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$.

(c) $v = f(p,q,r)$ con $p = p(x,y,z)$, $q = q(x,y,z)$ y $r = r(x,y,z)$. Es decir, hallar las derivadas parciales v_x, v_y, v_z de la función compuesta $v = f(p(x,y,z), q(x,y,z), r(x,y,z))$.

12. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sean $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Calcular la derivada segunda $(f \circ \lambda)''$ en función de las derivadas parciales de f y de las derivadas de λ.

13. Sean f_1, g_1, g_2, h_1, h_2, h_3, k_1, k_2 funciones diferenciables de codominio $\mathbb{R}$, x, y, z, t, ξ, η, u, v, w variables reales y considérense las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$:

(a) $f(x,y,z) = f_1(x,y,z)$ (c) $h(\xi,\eta) = (h_1(\xi,\eta), h_2(\xi,\eta), h_3(\xi,\eta))$
(b) $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ (d) $k(u,v,w) = (k_1(u,v,w), k_2(u,v,w))$

(i) En cada caso hallar el dominio y codominio, esto es, especificar el n y m adecuados.

(ii) Hallar los diferenciales de las composiciones $g \circ f$, $h \circ k$, $k \circ h$ y $h \circ g$ en función de las derivadas parciales de f_1, g_1, g_2, h_1, h_2, h_3, k_1, k_2.

14. Hallar, en cada caso, las matrices jacobianas de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$.

(a) $f(u,v) = (\frac{1}{2}\log(u^2+v^2), \operatorname{arctg}(u/v))$, $g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

(b) $f(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $g(x,y) = (x\cos y, x \operatorname{sen} y)$.