

# CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III (Cálculo Vectorial)

Autor: Eleonora Catsigeras

IMERL. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República.  
Montevideo, Uruguay, 2001.

Ir al índice de clases con enlaces a los videos y a las fotos de los pizarrones [aquí](#)

## RESUMEN

El curso consta de aproximadamente 40 horas de videos con audio a tiempo real. Las clases fueron grabadas en el año 2001 en el Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, los archivos fueron grabados en un CD de audio y se distribuyeron copias entre los estudiantes, siempre en CD. Se reproducían con un software gratuito de Real Player, que se bajaba de internet. En el 2001 se pidió autorización a Real Player para incluir este software en el CD, pero fue denegado. En el año 2007 el software para reproducir los videos dejó de existir. Y los archivos de los videos quedaron obsoletos e inconvertibles. Afortunadamente uno de mis ex-estudiantes, Yuri Damián Vallejo, conservó el software antiguo de Real Player en su computadora, y en el año 2015, pudo reproducir todos los videos y volver a grabarlos. Le llevó un año entero de trabajo esa re-edición. Entonces los subió a YouTube a medida que iba re-editando cada video.

Enlaces a los videos de Cálculo 3 en youtube y a las fotos de los pizarrones

Los videos de todas las clases (desde 01 hasta 35) se encuentran en el siguiente canal de YouTube

<https://www.youtube.com/@pizarronesleonora4494/videos>

Índice clase a clase: enlaces a cada video de youtube y al archivo de fotos de pizarrones

Clases [01](#), [02](#), [03](#), [04](#), [05](#), [06](#), [07](#), [08](#), [09](#), [10](#), [11](#), [12](#), [13](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [20](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#), [25](#), [26](#), [27](#), [28](#), [29](#), [30](#), [31](#), [32](#), [33](#), [34](#), [35](#).

Clase 01 <https://www.youtube.com/watch?v=LsdOpNL8NnY&t=38s>

Definición de curvas paramétricas, ejemplos, circunferencia, elipse, hélice, cicloide

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 02 [https://www.youtube.com/watch?v=tB9\\_8NNDEi4](https://www.youtube.com/watch?v=tB9_8NNDEi4)

Vector velocidad y versor tangente. Longitud y abscisa curvilínea.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 03 [https://www.youtube.com/watch?v=Ay\\_7PTfp7zg](https://www.youtube.com/watch?v=Ay_7PTfp7zg)

Curvatura de curvas planas, versor normal. Astroide.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 04 <https://www.youtube.com/watch?v=X4yeh2SZW0c>

Curvas planas cerradas simples, sentido antihorario, teorema de Jordan, curva  $C^1$  a trozos. Cambio de parámetros, cálculo de áreas encerradas, área encerrada por una elipse. Áreas de sectores en coordenadas polares.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 05 <https://www.youtube.com/watch?v=e8GgVyZTOo>

Definición de uno-forma diferencial o forma diferencial lineal. Definición de integral curvilínea.

Independencia de la parametrización. Ejemplos de cálculo. Aditividad de la integral en suma de curvas. Cambio de signo de la integral al cambiar la orientación de la curva.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 06 [https://www.youtube.com/watch?v=Z\\_66icTx2Gg](https://www.youtube.com/watch?v=Z_66icTx2Gg)

Definición de campo vectorial. Ejemplo de campo plano. Campo asociado a una uno-forma.

Circulación de un campo a lo largo de una curva orientada. Flujo de un campo plano a través de una curva plana orientada.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 07 <https://www.youtube.com/watch?v=7yQvH8XNYS&t=8s>

Uno-formas exactas y cerradas. Definiciones, teorema y ejemplo. Potenciales escalares. Ejemplo de una uno-forma cerrada que no es exacta. Campos de gradientes e irrotacionales.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 08 [https://www.youtube.com/watch?v=Qqh3PtB\\_IBc](https://www.youtube.com/watch?v=Qqh3PtB_IBc)

Operadores diferenciales. Gradiente de una función escalar. Demostración de que es intrínseco.

Rotor y divergencia de un campo. Laplaciano de una función escalar.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 09 <https://www.youtube.com/watch?v=n2YBvIhV7Rc&t=19s>

Integrales curvilíneas de uno-formas exactas o campos de gradientes. Teorema de la diferencia de potencial. Conjuntos conexos, componentes conexas. Cálculo de un potencial escalar. Teorema de caracterización de uno-formas exactas o campos de gradientes.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 10 [https://www.youtube.com/watch?v=VsA8\\_M4ZIKk&t=7s](https://www.youtube.com/watch?v=VsA8_M4ZIKk&t=7s)

Conjuntos simplemente conexos, deformación continua de curvas, homotopías, curvas homotópicas.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 11 <https://www.youtube.com/watch?v=l8imffWom04>

Teorema fundamental de las uno-formas exactas o campos de gradientes. Enunciado y demostración.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 12 <https://www.youtube.com/watch?v=7OBVjeLdwvE>

Campos irrotacionales y uno-formas cerradas en el plano sin un punto  $P_0$ : integrales de curvas cerradas que no rodean a  $P_0$ , período alrededor de  $P_0$ , condición para que la uno-forma sea exacta o el campo sea de gradientes.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 13 <https://www.youtube.com/watch?v=TxMJILeorAU>

Enunciados y ejemplos de los teoremas de Gauss o de la divergencia, y de Stokes o del rotor, en el plano. Demostración de la fórmula del área encerrada por una curva plana cerrada simple.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 14 <https://www.youtube.com/watch?v=PCa7rHJgMg>

Demostración del Teorema de Gauss en el plano. Corolarios de Gauss y Stokes: el rotor y la divergencia son intrínsecos.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 15 <https://www.youtube.com/watch?v=20Aweoome7A>

Teoremas o fórmulas de Green en el plano: enunciados y demostraciones. Aplicación: unicidad de la solución a la ecuación de Laplace en el plano, con dato de contorno.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 16 <https://www.youtube.com/watch?v=ZilTY1C9dC4>

Superficies en el espacio  $R^3$ . Definición de parametrización y de superficie parametrizada con o sin borde. Ejemplos. Definición global de superficie sin borde. Parametrizaciones de la esfera y del toro. Superficies compactas conexas (cerradas simples): exterior e interior.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 17 <https://www.youtube.com/watch?v=t6CZ4xqdAeA>

Plano tangente a una superficie. Versores normales. Orientación de superficies. Ejemplo: la normal saliente a la esfera. Primera forma fundamental de superficies.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 18 [https://www.youtube.com/watch?v=2pwt\\_HBosk4](https://www.youtube.com/watch?v=2pwt_HBosk4)

Área de una superficie parametrizada. Integral de una función escalar sobre una superficie. Áreas de la esfera y del toro.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 19 <https://www.youtube.com/watch?v=bqNOUSovCSw>

Flujo de un campo en el espacio a través de una superficie orientada. Dos-formas diferenciales. Integrales de dos-formas sobre superficies. Cálculo de volúmenes encerrados.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 20 [https://www.youtube.com/watch?v=bCP\\_TnMmScI](https://www.youtube.com/watch?v=bCP_TnMmScI)

Producto exterior de uno-formas. Definición y propiedades.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 21 <https://www.youtube.com/watch?v=JrkkLDpRkTY>

Tres-formas diferenciales.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 22 <https://www.youtube.com/watch?v=cwoLDV8NkFI>

Derivada exterior de formas diferenciales. Derivada exterior segunda es siempre nula.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 23 <https://www.youtube.com/watch?v=705XezcqSIQ>

Derivada exterior de uno-forma sobre una superficie parametrizada. Dos-formas cerradas y exactas. Campos solenoidales y de rotores.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 24 [https://www.youtube.com/watch?v=mKOSFo\\_D9ws](https://www.youtube.com/watch?v=mKOSFo_D9ws)

Teorema de existencia de potencial vector. Construcción de potencial vector. Ejemplo.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 25 <https://www.youtube.com/watch?v=iSgtk4PrqyU>

Diferencia de potenciales vectoriales. Ejemplo.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 26 [https://www.youtube.com/watch?v=iJ7gD\\_cdf9w](https://www.youtube.com/watch?v=iJ7gD_cdf9w)

Integral sobre una superficie en sentido global. Volúmenes encerrados por superficies compactas conexas en el espacio tridimensional.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 27 <https://www.youtube.com/watch?v=wsxLiUXSq2c>

Teorema de Gauss o de la divergencia en el espacio. Enunciado y ejemplos.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 28 <https://www.youtube.com/watch?v=bB4VnW7mnbw>

Teorema de Gauss o de la divergencia en el espacio. Demostración y corolarios.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 29 <https://www.youtube.com/watch?v=eA1avZNfO0M>

Teoremas o fórmulas de Green en el espacio. Enunciados, demopstraciones y aplicaciones a la ecuación de Laplace.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 30 <https://www.youtube.com/watch?v=dNclHiVX-hw>

Teorema de Stokes o del rotor en el espacio. Enunciado y ejemplos.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 31 [https://www.youtube.com/watch?v=NAj0BUa\\_jig&t=3s](https://www.youtube.com/watch?v=NAj0BUa_jig&t=3s)

Teorema de Stokes o del rotor en el espacio. Demostración y corolarios.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 32 [https://www.youtube.com/watch?v=W\\_sY6pk2gP8&t=6s](https://www.youtube.com/watch?v=W_sY6pk2gP8&t=6s)

Teorema del valor medio para la ecuación de Laplace. Ecuación de Laplace en coordenadas polares del plano.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 33 [https://www.youtube.com/watch?v=DKLdmGAm\\_mQ](https://www.youtube.com/watch?v=DKLdmGAm_mQ)

Ecuación de Laplace en un círculo plano. Soluciones trigonométricas, superposición finita y fórmula de Poisson.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 34 <https://www.youtube.com/watch?v=M6v9YNMYVOM>

Ecuaciones de Maxwell en el vacío. Consecuencias de los teoremas de Gauss y Stokes en el espacio para los campos eléctrico y magnético. Ecuación de Laplace para el potencial eléctrico.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase 35 <https://www.youtube.com/watch?v=M3vZbrgjYtE&t=213s>

Ecuación de ondas para los campos eléctrico y magnético. Soluciones por propagación de la ecuación de ondas en el espacio.

[Fotos de los pizarrones](#)

[Inicio](#)