La teoría matemática del caos determinista.

Eleonora Catsigeras *

13 de octubre de 2000

Resumen

Esta presentación expone algunas definiciones, hipótesis de trabajo, y objetos de estudio de la teoría del caos determinista en los sistemas dinámicos, como área de investigación actual de la matemática. Está dirigida a un público general con formación matemática preuniversitaria.

1 Introducción.

Cuando recibí la invitación de participar en la mesa interdisciplinaria del XIV Congreso de la Federación Latinoamericana de Psicoterapia para hablar sobre el tema del título, me pregunté qué relación tiene lo que investigamos los matemáticos puros con ciencias como la psicología y la psiquiatría. Hay una relación obvia que es la que engloba en un sentido amplio a las distintas áreas científicas en la búsqueda del conocimiento humano. Pero, ¿hay una relación más estrecha? ¿Es el modelo matemático del caos determinista aplicable a ciencias como, por ejemplo, la psicología y la psiquiatría? No puedo responder esa pregunta, desde mi punto de vista demasiado insertado en la matemática pura. Por eso, y no por esquivar preguntas, ya que éstas son nuestra motivación, esta presentación se centrará en los objetos matemáticos de la teoría del caos, su significado para la matemática pura, y no sobre su conexión o aplicabilidad a ciencias humanas y de la naturaleza.

La nomenclatura usada en matemática, utiliza casi siempre palabras extraídas del idioma, que suelen tener en nuestra lengua un significado diferente al concepto preciso y bien delimitado, que tiene en la matemática. En el lenguaje usual, una misma palabra suele tener un sentido mucho más amplio que en la matemática, y a veces casi disjunto. Se corre el riesgo, por ejemplo cuando un matemático habla sobre la teoría del caos, que las palabras sean interpretadas en su sentido usual, y que los teoremas, que inocentemente el matemático afirma que están demostrados, sean

*E-mail: eleonora@fing.edu.uy Instituto de Matemática, Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

interpretados como respuestas dogmáticas a preguntas planteadas en un contexto diferente, cuyo abordaje no puede ni intenta hacer la matemática.

Cuando se usa la palabra *caos* en matemática, no se la refiere a su significado literal de desorden, confusión y desorganización.

La *teoría matemática del caos* es una rama de la ciencia exacta. No se admiten imprecisiones, indefiniciones. Los teoremas demostrados continúan siendo resultados obtenidos por deducción lógica clásica y con precisión científica. No estudia sistemas totalmente desorganizados ni confusos. Cierto es que el nombre de la teoría estuvo inspirado en el significado usual de la palabra, porque el objeto de su estudio era percibido como desordenado, cualitativamente y antes de descubrir o inventar un ordenado abordaje matemático. La teoría matemática del caos no estudia sistemas caóticos, en el sentido literal de la palabra.

La matemática dispone de su propio diccionario, constituido por las definiciones. Todo resultado matemático, está supeditado al contexto preciso de la definición de sus términos hipotéticos. Cuando se le intenta aplicar, o a veces extrapolar a un contexto más general, donde las hipótesis no son verificadas con precisión, puede conducir a contradicciones [1] [2]. De todas formas, el progreso de la matemática está basado justamente en la motivación, frecuentemente inspirada en preguntas de otras ciencias, por generalizar sus propios resultados previos. Y también son motivación para los matemáticos y otros científicos, las implicaciones humanas y filosóficas de su quehacer [3], [4], [5], [6], aunque no se acostumbra que esta motivación se haga explícita en los reportes técnicos de sus investigaciones.

La matemática tiene la gran ventaja de que sus conceptos son abstracciones que se inventan o se crean (se definen) a medida de las necesidades, y no permanecen inmutables. Constantemente se están adaptando, modificando, ampliando, y particularizando, para empujar la frontera de lo desconocido y generalizar los teoremas ya conocidos, haciéndolos más abstractos y menos casuísticos.

En este artículo presentaremos la definición matemática del *caos determinista.* Ya la palabra *determinista* contradice al sustantivo *caos,* en el contexto general de su significado extra-matemático, y no se le podría añadir como adjetivo.

Por otro lado, la teoría matemática desarrollada aún es muy limitada, a pesar que está inspirada en problemas científicos extra-matemáticos y es utilizada por investigadores de diversas áreas, en particular en trabajos recientes desarrollados en nuestro país [7]. La matemática del caos determinista es una rama actual y en desarrollo. Se dispone de una serie de definiciones matemáticas, (inspiradas a veces en descripciones de fenómenos físicos). Se ha demostrado algunos teoremas bajo hipótesis bastante generales. Aún se está en la etapa de estudio de casos particulares, para tratar de inducir propiedades generales. En la frontera del desarrollo de la teoría hay muchas preguntas abiertas y algunas conjeturas (enunciados de teoremas sin demostración ni contraejemplos), que se alimentan e inspiran de la interacción con las otras ciencias.

2 Los sistemas dinámicos y la hipótesis determinista.

Cuando diseña o estudia un circuito eléctrico, el ingeniero admite, independientemente del instante en que lo haga, y de los valores iniciales de voltaje y corriente existentes al encender el equipo, la validez de las leyes del electromagnetismo. Aún, según sea el caso, puede utilizar una versión más o menos simplificada de esas leyes. Y aún cuando no conozca en detalle esas leyes, un técnico electricista admite que existen y son las mismas, hoy, mañana, el año que viene, antes y después de encender las luces, y no importa si al encender las luces ya estaba la radio encendida o no lo estaba. La ley de Ohm, que dice que el voltaje es igual al resultado de multiplicar la corriente por la resistencia, sigue siendo la misma, no importa que hoy la corriente sea de medio Ampère y mañana sea de 1 Ampère. Lo que son variables son la corriente, y el voltaje. Varían en el tiempo. Pero la Ley de Ohm que las vincula, es la misma.

La hipótesis determinista asume la existencia (aunque no se les conozca con precisión) de *leyes* $\mathcal{L}$ no azarosas, que regulan las variables del sistema, que ante la misma causa producen el mismo efecto y que son invariantes (las leyes, no las variables o las causas) en todo instante.

Lo que nos interesa muchas veces, no es sólo conocer las leyes $\mathcal{L}$ que tienen interés en sí mismas, sino también predecir el *estado del sistema* en cada instante.

En el símil del circuito eléctrico, lo que pretende el ingeniero es asegurar, por ejemplo, que el conjunto de corrientes en todas las ramas de su circuito se estabilizan al cabo de 10 milisegundos en ciertos valores deseables, u, otro ejemplo, que oscilarán periódicamente a 50 ciclos por segundo.

El *estado* $P(n)$ de un sistema en un instante dado n, es el conjunto de valores numéricos de todas las variables que describen la situación del sistema en ese instante n. (Por ejemplo los valores de las corrientes en todas las ramas de un circuito y de los potenciales eléctricos en todos sus nodos).

El estado varía con el tiempo, o sea depende del instante n. La noción matemática de variable incluye también el caso particular en que ella es constante (la misma para todo n). Es decir, constante no es lo opuesto de variable, sino un caso particular. Las variables, cuyos valores numéricos (en función de n) describen el estado del sistema, se llaman *variables de estado*. Pueden ser pocas o muchas, aún infinitas. Si es una sola, el sistema se llama unidimensional; si son dos, bidimensional; si son infinitas, infinito-dimensional.

Las variables de estado, toman valores numéricos, para describir en términos cuantitativos la situación del sistema. Elegir las variables de estado implica **modelar con cifras, cuantificar cada situación posible del sistema.** Los sistemas digitales usan cuantificadores binarios (si o no, correspondientes a los valores 1 o 0). Matemáticamente se puede tomar algunas variables binarias, y otras con valores numéricos reales (en un continuo). También se pueden tomar algunas o todas las variables de estado tomando valores no numéricos, en otras entidades matemáticas. [1] Esta abstracción ha permitido demostrar algunos resultados teóricos importantes. Sin embargo, la mayoría de los resultados hasta hoy obtenidos referentes a los sistemas caóticos aún están restringidos a estructuras matemáticas en que las variables de estado son una cantidad finita y toman valores numéricos.

El *espacio de fases*, es el conjunto de todos los estados posibles, no importa si van a ser alcanzados o no por el sistema en algún instante n. Por ejemplo, en una rama de un circuito eléctrico las variables de estado son dos: la corriente I que circula a lo largo de la rama en cada instante y la tensión V que hay entre sus dos nodos extremos en el mismo instante. Ese sistema es bidimensional, y su espacio de fases es el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales, (un número de la pareja corresponde al valor de I, y el otro al de V). Se suele dibujar este espacio de fases, en un plano, con dos ejes coordenados cartesianos (uno para la I y otro para la V). Decimos que cada punto del plano, corresponde a un estado posible, y que todo el plano es el espacio de fases.

El *estado inicial* $P(0)$, es el estado del sistema en el instante $n = 0$. El instante 0 puede ser cualquiera, en el eje del tiempo. Corresponde a un *punto inicial* en el espacio de fases. El estado siguiente $P(1)$ corresponde a otro punto en el espacio (que podría coincidir con el punto inicial). El estado siguiente $P(2)$, a un nuevo punto, y así sucesivamente. La *trayectoria,* u *órbita,* o *recorrido*, dado el estado inicial, es la sucesión de puntos correspondientes a los estados en cada instante n. Corresponde a la evolución del estado del sistema, y depende del estado inicial.

Definición 2.1. Tenemos un *sistema dinámico determinista* (discreto), o brevemente, *sistema, o dinámica,* si existen aunque no se les conozca una ley o leyes $\mathcal{L}$ que son las mismas para todo instante n, que permiten computar, a partir del estado $P(n-1)$, cuál es el estado siguiente $P(n)$.[2]

[1] por ejemplo en estructuras algebraicas, geométricas, topológicas, medibles abstractas, en espacios funcionales.

[2] Esta definición está restringida a los llamados sistemas dinámicos discretos, porque los momentos de observación son instantes numerados con los números enteros. Se definen también los sistemas dinámicos continuos, en los que el tiempo de observación toma valores en la recta real.

Es decir, el sistema dinámico determinista proviene de una ley de iteración. Aplicada una vez, y otra, y otra ..., da la evolución del estado del sistema hacia el futuro.

Los números $0; 1; 2; 3; 4; \ldots; n; \ldots$, rotulan los momentos de observación. Estos instantes están ordenados crecientemente en el eje real del tiempo, es decir, el instante n viene después del $n-1$, para todo n. Pero no necesariamente el lapso transcurrido entre el instante rotulado como $n-1$ y el rotulado como n tiene que ser siempre el mismo.

Los sistemas dinámicos son invariantes por traslaciones en el tiempo. Una vez alcanzado el estado $P(n)$, en el instante n, puede tomarse ese punto como estado inicial $P(0)$, y comenzar a contar los instantes de nuevo. El sistema dinámico es el mismo. Esta propiedad puede demostrarse rigurosamente a partir de la definición 2.1

También podemos considerar instantes negativos: $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$. Ellos tienen interés en los sistemas dinámicos invertibles, y más aún en los reversibles, según definiremos en la sección 4. En estos sistemas, se considera la órbita como la sucesión (bi-infinita) de estados del sistema $P(n)$ para cada n tanto positivo como negativo.

3 El caos determinista.

Un ejemplo, que es la antítesis del caos en el sentido matemático, es el siguiente sistema dinámico determinista unidimensional, con la ley cuadrática contractiva: $\mathcal{L}(x) = x(1-x)/2$, donde x es la variable de estado que toma valores numéricos reales mayores o iguales que cero y menores o iguales que uno. El espacio de fases es el conjunto de todos los números entre 0 y 1. Si llamamos x_n al estado en el instante n, se tiene $x_1 = x_0(1-x_0)/2$, $x_2 = x_1(1-x_1)/2$, ... $x_n = x_{n-1}(1-x_{n-1})/2$.

Por ejemplo, si el estado inicial es $x_0 = 0,500$, la órbita será 0,500; 0,1250; 0,0547; 0,0238; 0,0116; 0,0057; 0,0028; 0,0014; 0,0007; 0,0004; 0.0002; 0.0001; 0.0000; 0,0000; 0,0000... (los valores son aproximados con 4 cifras después de la coma). La trayectoria se aproxima cada vez más a cero, hasta que cualquier observador (o computadora) que cometa algún error de percepción (o de cálculo) va a terminar viendo $0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; \ldots$. Si el estado inicial no es $0,500$, pero es por ejemplo $0,670$, la sucesión recorrida será diferente de la anterior, pero también tiende a cero. Puede decirse entonces, en este ejemplo, y demostrarse rigurosamente, que no importa cuál sea el estado inicial, la trayectoria tiende a estabilizarse en el *punto de equilibrio* $x = 0$. No hay *sensibilidad a las condiciones iniciales* . Este punto de equilibrio se dice que es *asintóticamente estable*. Hay total predecibilidad en el comportamiento futuro de las trayectorias: a corto plazo, porque existe una ley $\mathcal{L}$, y a largo plazo, porque las órbitas tienden al punto de equilibrio asintóticamente estable. Los errores de aproximación se contraen a una velocidad exponencial.

Ahora veamos otro ejemplo que es un sistema caótico en el sentido matemático. Es un sistema, también unidimensional, con el mismo espacio de fases que antes (los números reales entre 0 y 1) pero con la ley, también muy simple: $\mathcal{L} = 4x(1-x)$, llamada ley cuadrática expansiva. Tomando como dato inicial $x_0 = 0,30$, se obtiene el recorrido 0,30; 0,84; 0,5376; 0,9943; 0,0225; 0,0880; 0,3210; 0,8719; ... (las cifras son aproximadas). La sucesión obtenida es aproximada, y no es la verdadera. Son parecidas al principio, pero muy diferentes después, porque los errores de redondeo se van amplificando.

Aún conociendo la ley, es muy difícil predecir con error aceptable, cuál va a ser el estado del sistema por ejemplo en el instante $n = 10000$.

Ahora tomemos otro dato inicial cercano al anterior, por ejemplo $x_0 = 0,31$. Se obtiene 0,31; 0,8556; 0.4942; 0,9987; 0,0005; 0,0020; 0,0080; 0,0317; ... (las cifras son aproximadas). Ya en el instante $n = 7$ correspondiente a los octavos términos de las sucesiones, los estados difieren considerablemente (0,8719 frente a 0,0317). En una escala entre 0 y 1 se obtuvo una diferencia de 0,84, a pesar que inicialmente diferían en sólo un centésimo (0,30 frente a 0,31). En este último ejemplo hay *sensibilidad a las condiciones iniciales.*

Ambos ejemplos corresponden a lo que se llama la *familia cuadrática:* $cx(1-x)$, donde c es un número real constante. En el primer ejemplo $c = 1/2$, y en el segundo $c = 4$.

Definición 3.1. Un sistema dinámico determinista (o una parte de él) es *expansivo,* o *sensible a las condiciones iniciales, o caótico*[3] si dos estados iniciales diferentes (aunque estén arbitrariamente próximos), dan lugar a órbitas que se separan más que una constante positiva α, llamada constante de expansividad. (A los efectos prácticos α es el umbral de percepción de error).

Si quisiéramos predecir toda la evolución del estado del sistema dinámico caótico (conocer la órbita o trayectoria en el espacio de fases) con un error menor que α, necesitaríamos conocer exactamente el estado inicial del sistema, sin hacer absolutamente ninguna aproximación del mismo, ni de los sucesivos estados obtenidos. No existe especificación tolerable de error en los datos iniciales. Desde el punto de vista matemático teórico, implica la individualidad de la evolución en el tiempo de cada órbita: cada estado inicial da origen a un recorrido único y bien distinguible de los demás, irreproducible con otro dato inicial, por más parecido que sea inicialmente éste al primero. El sistema es determinista porque la misma causa produce el mismo efecto. Pero causas parecidas en un sistema caótico, producen a largo plazo efectos muy diferentes. Desde el punto de vista práctico matemático (en el cálculo numérico por ejemplo), el caos significa que el

[3]Existen otras definiciones matemáticas de sistemas caóticos deterministas [8].

sistema es *impredecible* a largo plazo, porque todo procesador hasta ahora inventado recorta las cifras decimales (es decir aproxima) al trabajar con una cantidad de memoria finita. Entonces, los sucesivos estados calculados no son los reales, sino aproximaciones. Las trayectorias de dos aproximaciones son, a la larga, muy diferentes (muy diferentes significa que se separan más que α), de dónde se desprende que el recorrido computado y el que tendrá verdaderamente son muy distintos entre sí.

Una cuantificación de la *impredecibilidad* de un sistema está dada por lo que se llama *entropía*, o tasa de crecimiento de la cantidad de información, que también suele comprenderse como grado de desorden espacial de la dinámica.

Uno de los abordajes matemáticos de los sistemas dinámicos deterministas, que es especialmente útil cuando el sistema es caótico (aunque también se aplica a los que no lo son) consiste en usar los conceptos y técnicas de la teoría de las probabilidades, dando lugar a la llamada *teoría ergódica* [8]. En vez de estudiar la evolución del sistema intentando predecir exactamente los estados a largo plazo, la teoría ergódica estudia los promedios temporales, definiendo probabilidades de visita a las diferentes regiones del espacio de fases.

Podría preguntarse si la presencia del caos es debida a una cantidad muy grande de variables de estado (las que describen el estado del sistema), como si ello fuera la causa de la impredecibilidad y de la sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema. La respuesta es negativa. La cantidad de variables de estado no está en relación con la presencia de caos: en el segundo ejemplo al principio de esta sección, hay una sola variable de estado y no obstante, el sistema es caótico. Por otro lado, cualquier operador contractivo en un espacio vectorial infinito-dimensional[4], puede usarse como ley para definir un sistema dinámico no caótico, completamente predecible, cuyas órbitas tienden todas al estado $f = \vec{0}$, a pesar de que la dimensión del espacio es infinita (y, si se desea, ni siquiera numerable).

Uno de los ejemplos inspiradores de la definición matemática del caos determinista, es el llamado *atractor de Lorenz* [9]. Es un sistema dinámico con sólo tres variables de estado, que sirve como modelo para fenómenos de convección en la atmósfera, de utilidad, entre otras ciencias, a la meteorología. Está regido por leyes muy sencillas, a pesar de lo cual es caótico, y muestra una de las razones por las cuales no pueden hacerse predicciones meteorológicas a largo plazo.

La familia cuadrática, es la familia de sistemas dinámicos unidimensionales dados por la ley cuadrática $cx(1-x)$, donde c es un número real constante. El espacio de fases (donde varía

[4] por ejemplo, en un espacio funcional real, la multiplicación de la función f por un número real λ positivo menor que uno.

x) es el conjunto de los números reales entre 0 y 1. Es el ejemplo más sencillo de dinámica unidimensional [10] en el que aparece la conducta caótica. Vimos, al principio de esta sección, que cuando c es $1/2$ el sistema es contractivo, y por lo tanto no caótico, y que cuando c es 4, es expansivo, es decir caótico. Se ha demostrado que la probabilidad de que un sistema dinámico de la familia cuadrática sea caótico, es positiva. Esto significa que si se elige la constante c al azar, equidistribuida entre 0 y 4, la probabilidad de que el sistema obtenido sea caótico no es nula. Este fenómeno es lo que en matemática se llama *abundancia* de sistemas caóticos.

Se han generalizado esos teoremas relativos a la familia cuadrática unidimensional, a dimensiones mayores finitas, al estudiar los llamados *mapas de Hénon,* donde las leyes son polinomios de segundo grado, como en la familia cuadrática, y los mapas del *tipo de Hénon,* donde las leyes no son necesariamente polinomios de segundo grado. Esos resultados prueban que los sistemas caóticos son abundantes, aún cuando las leyes que los regulen sean tan simples como polinomios de segundo grado. Concluimos que no es requerimiento para el caos determinista que la ley $\mathcal{L}$ tenga una expresión complicada.

En dimensión uno[5], es condición necesaria para la existencia del caos que las leyes sean de grado mayor que uno (dos en adelante). Sin embargo, en dimensión dos o mayor, existen leyes de grado uno (sistemas lineales) que dan lugar a dinámicas caóticas.

Los llamados sistemas de Anosov, y más en general los sistemas llamados hiperbólicos [11], son ejemplos notables de sistemas caóticos. El estudio de estos sistemas, realizado en las décadas del 60 y 70, abrió las puertas al estudio de los sistemas caóticos. Se demostró que los sistemas hiperbólicos son *persistentes.* Esto significa que continúan exhibiendo una dinámica equivalente aunque se modifique un poco la ley $\mathcal{L}$ que los regula (o sea se cambie $\mathcal{L}$ por otra ley $\mathcal{L}'$, cercana, más complicada o más simple, obteniendo otro sistema que evoluciona en el espacio de fases, al transcurrir el tiempo, en forma equivalente al anterior). El teorema de la persistencia de los sistemas hiperbólicos permite concluir que el caos determinista es un fenómeno que puede resistir modificaciones en la propia estructura que define el sistema dinámico. Es decir, el fenómeno del caos (entre otros) en los sistemas hiperbólicos no aparece o desaparece cuando la ley $\mathcal{L}$ que debería usarse para definir el sistema dinámico es sustituida por una aproximación de ella. Por eso, a veces, no es tan importante conocer con precisión la ley $\mathcal{L}$. Concluimos que la presencia del caos no es debida a las aproximaciones hechas durante la elección del modelo matemático (de la ley) que regula el sistema.

[5] La variable es real acotada, tomando valores, por ejemplo, entre cero y uno.

4 Invertibilidad y reversibilidad.

En encuentros informales con no matemáticos, he creído entender que el concepto de invertibilidad y reversibilidad es utilizado en un sentido mucho más fuerte que en matemática. Algunas personas conciben la invertibilidad en el tiempo como la inversión de la causa-efecto, y consideran que si un sistema fuera invertible o reversible, entonces sería posible modificar su pasado, alterando el presente. Confunden la imposiblidad de invertir la causa-efecto, con la efectiva posiblidad de considerar instantes negativos. Cuando en matemática se consideran instantes negativos (así como en el calendario se consideran años antes de Cristo) no se pretende alterar la causa-efecto. Los sistemas invertibles y los reversibles en el tiempo son simplemente aquellos en los que el estado presente es suficiente para **conocer** el estado pasado. Cuando hay más de un estado pasado *posible* compatible con el presente, el sistema no es invertible. Cuando hay uno sólo, el sistema es invertible. Algunos sistemas dinámicos son *invertibles,* y otros no lo son.

Definición 4.1. Un sistema es invertible, si existen leyes $\mathcal{M}$ (que son las mismas en todo instante n) que permiten computar, a partir del estado $P(n)$, cuál fue el estado anterior $P(n-1)$. (Compárese con la definición 2.1.)

En caso que exista $\mathcal{M}$, ésta se llama *inversa* de $\mathcal{L}$.

De la definición 4.1 se desprende que un sistema es invertible si y sólo si su ley $\mathcal{L}$ es *unívoca* (es decir, existe un sólo estado anterior). En ese caso la ley inversa $\mathcal{M}$ también es invertible y la inversa de $\mathcal{M}$ vuelve a ser $\mathcal{L}$.

Los ejemplos unidimensionales cuadráticos dados al principio de la sección 2, no son invertibles. Está demostrado que no existen sistemas invertibles caóticos en espacios compactos[6] de dimensión uno, pero sí existen de dimensión dos o mayor. (Los sistemas hiperbólicos son ejemplos de éstos últimos.)

Un ejemplo para ilustrar el concepto de invertibilidad, es el siguiente: P(40) es el estado (vector que da la posición y la velocidad) de un planeta el 1 de enero del año 2000. Hubo un y un solo estado P(0) del mismo planeta el 1 de enero de 1960. Decimos que P(40) se obtiene de P(0) aplicando la ley $\mathcal{L}$, 40 veces consecutivas; y que P(0) se obtiene de P(40) aplicando la ley inversa $\mathcal{M}$, 40 veces consecutivas. El sistema es invertible.

La invertibilidad y la reversibilidad que definiremos en 4.2 no implican que un acto del presente pueda alterar el pasado. Es mucho menos que eso. Es simplemente decir que existen reglas (la ley

[6] La variable de estado es real variando en un conjunto cerrado y acotado; por ejemplo cuando x es mayor o igual que cero y menor o igual que uno.

$\mathcal{M}$) que permiten conocer cuál fue el estado pasado, observando el estado presente del sistema.

Los sistemas dinámicos *reversibles* son casos particulares de sistemas dinámicos invertibles. La reversibilidad es más fuerte que la invertibilidad porque no sólo pide que exista una ley inversa $\mathcal{M}$, sino que también pide que $\mathcal{M}$ sea esencialmente la misma que $\mathcal{L}$, o mejor dicho, equivalentes a través de cierta traducción.[7] En los sistemas reversibles, observar el futuro es, a menos de una traducción, lo mismo que observar el pasado.

La traducción es un cambio de coordenadas en el espacio de fases que lleva los estados del futuro en los del pasado y recíprocamente. Puede ser por ejemplo una simetría respecto a un subespacio del espacio de fases, como una reflexión en un espejo. La imagen de la imagen es la identidad. Esta última propiedad se refiere con el nombre *involución*.[8] La involución puede o no deformar las distancias en el espacio de fases, es decir la imagen en el espejo puede agrandar algunas regiones del espacio y disminuir otras. Que la involución transforme el sistema dado en su inverso, quiere decir que, mientras el sistema dado L evoluciona hacia el futuro, su imagen en el espejo es otro sistema M, **que también evoluciona hacia el futuro,** siendo el futuro de M igual al pasado de L y viceversa.

Definición 4.2. Decimos que un sistema dinámico invertible, es además reversible, si existe un cambio de coordenadas involutivo en el espacio de fases (por ejemplo una reflexión en espejo), tal que transforma el sistema con ley $\mathcal{L}$ en el sistema con la ley inversa $\mathcal{M}$.

La involución es, por definición, un cambio de coordenadas en el espacio de fases. Es decir, es una traducción que se realiza mirando el mismo sistema con coordenadas de referencia diferentes.

Para ilustrar las ideas de reversibilidad e irreversibilidad, sigamos con el ejemplo de la posición y la velocidad del planeta al variar el tiempo. Al ser el sistema invertible, cabría preguntarse si es o no reversible. Sería reversible si fuera posible, simplemente mediante una traducción al leer las variables que describen el estado del planeta, observarlo el 1 de enero del año 2040 en el estado P(80), imagen en un espejo del estado P(0) que tenía el 1 de enero de 1960.

Se ha probado que no existen sistemas dinámicos caóticos unidimensionales invertibles (en espacio de fases compacto), y por lo tanto tampoco reversibles. En dimensión finita mayor o igual que dos, existen sistemas dinámicos reversibles y caóticos,por ejemplo, algunos sistemas hiperbólicos. Teoremas recientes [12] relacionan la tasa de disipación de energía de los sistemas hiperbólicos reversibles con las descripciones probabilísticas de evolución hacia el futuro y el pasado

[7] Más precisamente, existe una traducción h que es un cambio de coordenadas en el espacio de fases, tal que aplicar $\mathcal{L}$ y luego h, es lo mismo que aplicar h y luego la ley inversa $\mathcal{M}$.

[8] h es una involución, si aplicada dos veces consecutivas, resulta la identidad.

de sus diferentes órbitas. No se sabe aún si esas relaciones valen también en sistemas caóticos reversibles no hiperbólicos.

Referencias

[1] D. Ruelle. *Deterministic Chaos: the science and the fiction.* Proceedings of the Royal Society of London **A 427** (1990), pp 241-248.

[2] A. Sokal, J. Bricmont. *Imposturas intelectuales.* Ed. Paidós. Barcelona (1999).

[3] D. Ruelle. *Azar y caos.* Editorial Alianza. Madrid (1993).

[4] I. Stewart. *Does God play dice? The new mathematics of Chaos.* Ed. Basil Blackwell. London (1989).

[5] E. Lorenz. *La esencia del caos.* Editorial Debate. Madrid (1995).

[6] R. Markarian, R. Gambini, editores. *Certidumbres. Incertidumbres. Caos. Reflexiones en torno a la ciencia contemporánea.* Ediciones Trilce. Montevideo (1997).

[7] R. Markarian, G. Tancredi, editores. *Caos en el Uruguay. Qué hacen los investigadores uruguayos que trabajan en sistemas caóticos?.* Universidad de la República. Montevideo (1997).

[8] J.P. Eckmann, D. Ruelle. *Ergodic Theory of chaos and strange attractors.* Reviews of modern Physics **Vol. 57, No. 3, Part I** (1985), pp 617-656.

[9] E.N. Lorenz. *Deterministic nonperiodic flow.* Journal of Atmosphere Science **Vol.20** (1963), pp 130-141.

[10] W. de Melo, S. van Strien. *One-dimensional dynamics.* Editorial Springer-Verlag. Berlín (1993).

[11] J. Palis, F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations.* Cambridge University Press (1993).

[12] G. Gallavotti. *Reversible Anosov diffeomorphisms and large deviations.* Mathematical Physics Electronic Journal **1** (1995), pp 1-12.