

CLASES DE INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN

Eleonora Catsigeras

2015

GARCÍA, V LÓPEZ, A MARTÍNEZ, M CATSIGERAS, E (orientadora)	<i>Atractores periódicos en redes neuronales con interacciones inhibitorias.</i> Avance de programa de introducción a la investigación de ayudantes del proyecto “Neurodinámica”. Facultad de Ingeniería, Udelar, Montevideo.	2015	1
BARRIOS, M CUBRÍA, F LORENZO, P CATSIGERAS, E (orientadora)	<i>Dynamics of Cooperative Neuronal Networks Depending on their Associated Graphs.</i> Del programa de introducción a la investigación de ayudantes del proyecto “Neurodinámica”. Facultad de Ingeniería, Udelar, Montevideo.	2015	2
CATSIGERAS, E	<i>Dinámica Topológica- Conexión de los Conjuntos Omega-Límite</i> Trabajo de asesoramiento de los estudiantes de posgrado Odalis Ortega y Leonardo Parra- Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.	2015	3
CATSIGERAS, E	<i>Topología y Transitividad del Shift Unilateral.</i> Trabajo de asesoramiento de los estudiantes de posgrado Odalis Ortega y Leonardo Parra. Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.	2015	4
CATSIGERAS, E	<i>Sobre Transitividad Topológica. Sobre Entropía Topológica.</i> Trabajo de asesoramiento del estudiante de posgrado Kendry Vivas Ferrer. Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Caracas, Venezuela	2015	5
CATSIGERAS, E	<i>On C0 Expanding Maps - Comments - About the questions and ideas of the Graduate Student Quan Jie Han.</i>	2013	6

1

Atractores periódicos en redes neuronales con interacciones inhibitorias.

**Avance de programa de introducción a la investigación de ayudantes del proyecto
“Neurodinámica”. Facultad de Ingeniería, Udelar, Montevideo.**

Estudiantes:
GARCÍA, Victoria
LÓPEZ DE LACALLE, Agustín
MARTÍNEZ, Mauro

CATSI GERAS, Eleonora (orientadora)

2015

Atractores periódicos en redes neuronales con interacciones inhibitorias¹

Victoria García, Agustín López de Lacalle, Mauro Martínez²
Orientadora: Eleonora Catsigeras

Presentación en el Seminario de Mecánica Estadística y Física No Lineal³
17 de agosto de 2015

RESUMEN

Se definen los elementos fundamentales de un modelo matemático simple de red neuronal inhibitoria y no inhibitoria, describiendo tanto el comportamiento individual de la neurona como el global de la red. Se estudia la dinámica asintótica de la red, demostrando los siguientes teoremas:

- 1) En el caso de dos neuronas, una inhibitoria y la otra excitatoria, los atractores son órbitas periódicas. Para demostrar este resultado se aplica la teoría del número de rotación y el teorema de Denjoy -Schwarz.
- 2) En el caso de n neuronas (con n finito arbitrariamente grande) y todas las neuronas inhibitorias, se demuestra que genéricamente, los atractores también son órbitas periódicas. Para obtener este resultado, primero se reduce matemáticamente el problema al estudio de la dinámica de un mapa contractivo a trozos, y después se aplica un teorema de Budelli-Catsigeras sobre la dinámica asintótica de este tipo de mapas.

1 Trabajo realizado en el marco del Proyecto “Neurodinámica”, financiado por L'Oréal-Unesco-Dicyt

2 Filiación de los tres autores y la orientadora: Instituto de Matemática y Estadística “Rafael Laguardia” (IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.

3 <http://fisicanonlineal.fisica.edu.uy/> Instituto de Física - Facultad de Ciencias - Universidad de la República

ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE UNA RED NEURONAL INHIBITORIA

Universidad:	UDELAR
Facultad/Centro/Instituto:	IMERL/FACULTAD DE INGENIERÍA
Autor/es:	GARCÍA, Victoria; LÓPEZ DE LACALLE, Agustín; MARTÍNEZ, Mauro
Director/es:	CATSIGERAS, Eleonora; BARBONI, Leonardo
Título del trabajo:	Estudio de la Dinámica de una Red Neuronal Inhibitoria
Núcleo Disciplinario / Comité Académico / Otros temas:	10-Matemática Aplicada
Dirección electrónica:	mavigt182@hotmail.com;agustini@fing.edu.uy;maumart@fing.edu.uy
Palabras claves:	neurodinámica, red neuronal inhibitoria, mapa de Poincaré, mapa contractivo
Resumen: Se definen en este trabajo los elementos fundamentales de la dinámica de una red neuronal inhibitoria, describiendo tanto el comportamiento individual de la neurona con el de la red en conjunto. Finalmente, se estudia cómo la dinámica de la red se reduce al estudio de la dinámica de un mapa que es contractivo a trozos.	

10-Estudio de la dinámica de una red neuronal inhibitoria

INTRODUCCIÓN

El resultado abstracto sobre la dinámica de mapas continuos y contractivos a trozos, puede ser aplicado a la comprensión de redes dinámicas idealizadas compuestas por un gran número de osciladores mutuamente acoplados, con aplicación a la ingeniería o confiabilidad en las comunicaciones.

En particular, el resultado puede ser usado como un modelo matemático determinístico de una red idealizada compuesta por una gran cantidad de neuronas artificiales o biológicas simplificadas, cada una comportándose de manera lineal u oscilando de manera no lineal, que son mutuamente acopladas instantáneamente por sinapsis inhibitoria.

Dicha red neuronal puede ser estudiada como la discretización de un sistema dinámico continuo a trozos, a través de la proyección del Mapa de Poincaré (o Mapa de Retorno) ρ , sobre una sección transversal al flujo.

El objetivo de este trabajo es entonces estudiar el comportamiento de una red neuronal inhibitoria y demostrar que la dinámica de la misma se reduce al estudio de la dinámica de un mapa que es contractivo a trozos y con la propiedad de separación.

METODOLOGÍA

Se buscó comprender y analizar el comportamiento dinámico de una red neuronal inhibitoria. Para ello, se idealizó el comportamiento de una neurona a través de un modelo matemático.

Una vez definido el modelo, se pasó al estudio de un sistema formado únicamente por dos neuronas. En primer lugar, se analizó la evolución de dicho sistema cuando no hay sinapsis, es decir, cuando no hay interacción entre ambas neuronas y luego se estudió el caso en el cual las neuronas hacen

sinapsis inhibitoria.

Generalizamos el problema y pasamos al estudio de una red conformada por m neuronas, todas interconectadas entre sí con sinapsis inhibitoria. En particular se definió un modelo matemático para dicho sistema y las interacciones entre los elementos que la conforman.

Probamos que el sistema que define el modelo, evoluciona en un subconjunto compacto de R^n y define un mapa ρ , que es continuo a trozos y uniformemente contractivo para una métrica particular en cada una de las piezas de continuidad; Mapa de Poincaré.

Se observó además, que ρ posee la "propiedad de separación", es decir, piezas de continuidad distintas poseen imágenes disjuntas.

Este resultado, nos lleva al estudio de un sistema dinámico discreto, definido por iteraciones de mapas continuos a trozos y localmente contractivos, en un espacio compacto de dimensión finita. En particular, los sistemas que verifican la propiedad de separación, "genéricamente" su atractor está formado por una cantidad finita de órbitas periódicas.

RESULTADOS

Definimos una neurona como un elemento, celda, o unidad i cuyo estado en el instante $t \in R^+$ está dado por una variable x . Esta es la solución a la ecuación diferencial: $dx/dt = \gamma_i(x)$, donde $\gamma_i: [-V_{min}, \theta_i] \rightarrow R$ es de clase C^2 , es positivo y con derivada negativa, y representa el "*potencial de membrana*" de la neurona. Como se puede apreciar, x está definida entre un valor mínimo $-V_{min}$ y un umbral θ_i (cuyo valor, para simplificar, será 1) que depende de la neurona, llamado "*umbral de disparo*". Notar que la solución de la ecuación diferencial alcanza el valor θ , pues γ_i es positiva. El tiempo en el cual esto ocurre, se denomina "instante de disparo" y provoca que el potencial de la neurona se "resetee a cero".

Podemos pensar x como una variable en S^1 (la circunferencia de radio 1) y en el caso de tener dos neuronas que no interactúan entre sí, podemos pensar su dinámica como conjunto, como una sola dinámica en el toro T^2 . De modo que para saber que sus dinámicas se sincronizan en algún momento, o sea, que en algún momento descargan a la misma vez, alcanza con saber que ambos períodos son racionales entre sí. Si sus períodos son irracionales entre sí, las rotaciones tienen órbitas densas.

La interacción entre dos neuronas biológicas se llama sinapsis. Ocurre cuando una de las neuronas, que es llamada presináptica, alcanza su umbral y descarga, produciendo con esta un cambio (salto en el potencial) en la otra neurona, llamada postsináptica.

La sinapsis puede ser de tipo excitatoria, cuando el salto que produce en la otra neurona es positivo, o inhibitoria, cuando el salto producido es negativo.

El sistema compuesto por ambas neuronas puede a su vez ser de 3 tipos: excitatorio, si ambas neuronas son excitatorias, inhibitorio, si ambas neuronas son inhibitorias, o combinado, si está compuesto por una neurona inhibitoria y otra excitatoria. Diremos que el sistema es no inhibitorio, si es o bien excitatorio, o combinado.

Supongamos que la neurona "A" es excitatoria, y cuando esta descarga, hace que la neurona "B", que supondremos inhibitoria, sobrepase su umbral. En este caso, ambas neuronas regresan al potencial 0 tras descargar. Por otro lado, saltos negativos en la neurona A, debidos a la descarga de la neurona B, pueden hacer que A alcance un potencial negativo. Esto puede pasar, sin embargo el potencial de A queda acotado inferiormente por el valor $-V_A$.

La sinapsis entre dos neuronas en un sistema combinado, se regirá según la función: $f: \{(x, y) \in [-V_A, 1] \times [-V_B, 1]: x = 1 \text{ o } y = 1\} \rightarrow \{(x, y): x = 0 \text{ o } y = 0\}$, la cual queda determinada mediante:

$$f(x, 1) = \begin{cases} (-V_A, 0), & \text{si } x + a(x) < -V_A \\ (x + a(x), 0), & \text{si } -V_A \leq x + a(x) < 1 \\ (0, 0), & \text{si } x + a(x) \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1, y) = \begin{cases} (0, -V_B), & \text{si } y + b(y) < -V_B \\ (0, y + b(y)), & \text{si } -V_B \leq y + b(y) < 1 \\ (0, 0), & \text{si } y + b(y) \geq 1 \end{cases}$$

Observemos además que si $a(1) < 0$ entonces $f(1, 1) = (1 + a(1), 0)$, y si $a(1) > 0$ entonces $f(1, 1) = (0, 0)$.

Los saltos representados por las funciones a y b , definidas en $[-V_A, 1]$ y $[-V_B, 1]$ respectivamente, son de clase C^2 , de signo constante distinto de cero, $|a|$ y $|b|$ no decrecientes, y $x + a(x)$ e $y + b(y)$ son estrictamente crecientes. Pedimos que $|a|$ y $|b|$ sean no decrecientes, ya que en las neuronas biológicas, los potenciales postsinápticos son menores después de una descarga que en fases posteriores.

La dinámica bineuronal está dada por la función: $\psi(p, t)$ que para cada condición inicial p en $[-V_A, 1] \times [-V_B, 1]$ y para todo t menor o igual que 0, nos da el estado del sistema en tiempo t . Observar también que esta función ψ no será continua en el conjunto $\{x = 1 \text{ o } y = 1\}$.

Por lo anterior, el sistema bineuronal queda perfectamente determinado por 4 funciones reales (u_1, u_2, a, b) , con las propiedades mencionadas anteriormente.

El espacio de sistemas bineuronales será el espacio topológico formado por todas las cuádruplas (u_1, u_2, a, b) con estas propiedades, con la topología producto de la topología usual en C^2 .

Consideramos una red neuronal de m elementos, con $m \geq 2$ como el de la figura 1, donde todas están conectadas dos a dos bidireccionalmente por sinapsis inhibitoria.

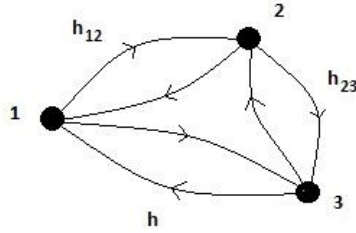


Figura 1: Modelo de una red neuronal inhibitoria para el caso en que $m = 3$.

Definimos $-h_{ij}$ como el aporte al potencial ϕ_j que hace la neurona i a la neurona j , cuando la neurona i dispara.

Consideraremos una neurona $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. El estado de la neurona i en el instante $t \in \mathbb{R}^+$ lo definimos como $\phi_i(t)$, con $\phi_i(t) \in X_i = [-V_{min}, \theta_i]$.

El comportamiento de la neurona i cuando no interactúa con otras, es llamado *dinámica libre* o *Inter Spike Regime*. El potencial de membrana $\phi_i(t)$ es la solución de una ecuación diferencial autónoma no lineal: $\dot{\phi}_i(t) = \gamma_i(\phi_i)$ donde $\gamma_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$, es positivo y con derivada negativa.

Definimos a continuación $\phi_i(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \phi_i(t)$.

Si $\phi_i(t_0^-) \geq \theta_i \Rightarrow \phi_i(t_0) = 0$, estamos ante la situación en que la neurona "disparó".

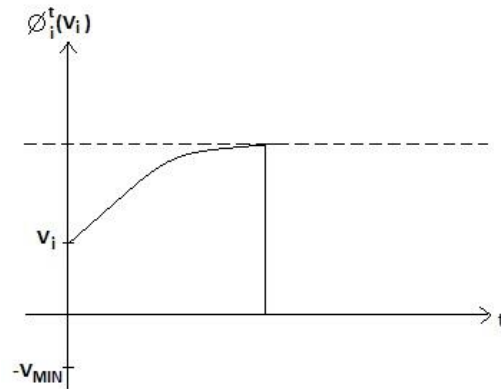


Figura 2: Potencial de una neurona

Otra condición que se tiene que cumplir es: $\forall \phi_i(0) \in X_i, \exists t_0 : \phi_i(t_0^-) = \theta_i$. Esto implica que, para cualquier condición inicial del potencial ϕ_i , la neurona i siempre dispara.

Se expondrán a continuación las reglas de la interconexión de la neurona i con las demás neuronas de la red; *Spiking Synaptical Regime*.

Definición: Definimos $I_0(t_0) \subset \{1, 2, \dots, m\}$ como el conjunto de las neuronas que disparan en el instante t_0 .

Se tiene entonces que

$$\phi_i(t_0) = \begin{cases} \min \left\{ -V_{MIN}, \phi_i(t_0^-) - \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I(t_0)}} h_{ij} \right\}, & \text{si } \phi_i(t_0^-) < \theta_i \\ 0, & \text{si } \phi_i(t_0^-) \geq \theta_i \end{cases}$$

Que $\phi_i(t_0)$ se anule cuando $\phi_i(t_0^-) \geq \theta_i$ significa que el potencial se "resetea".

El estado de la red neuronal se puede describir mediante una m -úpla:

$$(\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)) = \vec{\phi}(t)$$

donde

$$\vec{\phi} \in \prod_{i=1}^m [-V_{min}, \theta_i)$$

La expresión anterior es un homeomorfismo a una bola B , por lo que $\vec{\phi} \in B$. Entonces el estado de la red neuronal completa está descrito por $\vec{\phi}$.

Definimos el mapa contractivo $\rho: B \rightarrow B$ con $B \subset R^m$, $\bar{B}$ compacta. Notar que ρ no es necesariamente continuo, de hecho es continuo si y sólo si no hay interacciones sinápticas ($h_{ij} = 0$ para todo i, j).

Definimos ρ_{i_0} como $\rho_{i_0} = \rho|_{B_{i_0}}$, continua y contractiva, donde J es un subconjunto

de neuronas y B_J es el conjunto de estados tales que en el siguiente disparo las neuronas que disparan son exactamente las de J . Esto define un mapa contractivo a trozos.

A partir de lo anterior, definimos la órbita de x , con $x \in B$.

$$x^n = \rho^n(x) = \rho \circ \rho \circ \dots \circ \rho(x), \forall x \in B$$

$\{\rho^n(x)\}_{n \geq 0}$ es la órbita discreta de x .

Se presenta a continuación una representación del mapa de retorno.

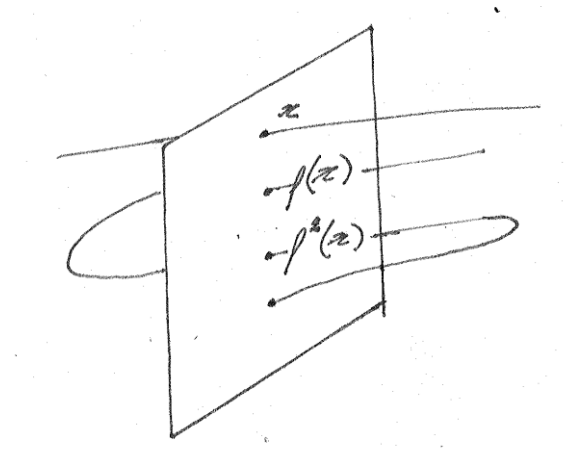


Ilustración 3: Mapa de Poincaré

En lugar de estudiar la órbita $\{\rho^n(x)\}_{n \geq 0}$, estudiamos los cortes de esta con una sección, es decir, estudio la dinámica del mapa de retorno. Se tiene como resultado una sucesión de puntos en la sección que si es periódica, la órbita también es periódica. En esta sección se encuentran los iterados de ρ , es decir, $\rho(x)$, $\rho^2(x)$, $\rho^3(x)$, ..., de modo que tiene una dimensión menos que el espacio, ya que el último iterado coincide con x (es un mapa de retorno).

En el mapa contractivo, los puntos de discontinuidad actúan como si tuvieran una dilatación infinita, es decir, dos puntos que se acercan, pero están en secciones distintas cumplen que:

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{d(\rho(x), \rho(y))}{d(x, y)} = \infty$$

Una de las herramientas que se utilizaron para lograr demostrar que los mapas son contractivos, fue la Fórmula de Liouville.

$$\frac{d\phi_i^t(V_i)}{dV_i} = \exp \int_0^t \gamma'(\phi_i^s(V_i)) ds$$

El instante en el cual la neurona i dispara, está dado por: $t = t_i(V) \Leftrightarrow \phi_i^t(V) = 1$.

Es decir, $t_i(V_i)$ es la función implícita $\phi_i^t(V_i) = 1$.

De todas aquellas neuronas que disparan, nos interesó el instante en el cual dispara la primera. Definimos $\bar{t}$ como el mínimo de los $t_i(V_i)$:

$$\bar{t}(V) = \min_{1 \leq i \leq m} t_i(V_i).$$

Posteriormente, definimos $J(V)$ como el conjunto de las neuronas que disparan en dicho instante $\bar{t}(V)$, como: $J(V) = \{i \in \{1, \dots, m\} : t_i(V_i) = \bar{t}(V)\} \neq \emptyset$.

$J(V)$ tiene medida de Lebegg nula, es decir, por probabilidad 1 dispara una sola neurona.

Mientras no dispara ninguna neurona, es decir, $J(V) = \{\emptyset\}$ el potencial de cada una de las neuronas responde a la ecuación diferencial correspondiente a la *dinámica libre*. En caso de que alguna neurona dispare, la función a aplicar sobre el potencial de las neuronas está dada por:

$$\sigma: \phi^{\bar{t}(V)}(V) \subset \{W \in [-1, 1]^m : \exists i / W_i = 1\} \rightarrow \sigma(\phi^{\bar{t}(V)}) \subset \{W \in [-1, 1]^m : \exists i / W_i = 1\}$$

definida por

$$\sigma(W_1, W_2, \dots, W_m) = (U_1, U_2, \dots, U_m)$$

Donde $U_i = 0$ si $W_i = 1$, o sea si $i \in J(V)$. Se tiene entonces que $\frac{d\phi_i^t}{dt} = \gamma_i(\phi_i^t)$ si $-1 \leq \phi_i^t \leq 1$. Mientras ϕ_i^t esté entre $[-1, 1]$ vale la ecuación diferencial, y si alguna llega a 1, aplicamos σ .

$$U_j = \max \left\{ -1, W_j - \sum_{i \in J(V)} h_{ij} \right\}$$

Si $W_j < 1$, o sea, $j \in J(V)$, $W_j = \phi_j^{\bar{t}(V)}(V_j) < 1$.

Se distinguen dos casos. El primero de ellos es aquel en el que $J(V) = \{i\}$. Si ocurre esto, entonces se tiene que

$$\sigma(\phi^{\bar{t}(V)}(V)) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$$

Donde $\sigma_i = 0$ si $\{i\} = J(V)$, y $\sigma_j = \max \{-1, W_j - h_{ij}\}$, con $j \neq i$.

El segundo caso es aquel en el que $J(V) = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Se tiene entonces que $\sigma(\phi^{\bar{t}(V)}(V))$ esta multivariada. Cada una la defino como si fuera la "ganadora", como es lo que en realidad pasa, sólo una dispara.

Esto nos da continuidad a trozos en los conjuntos de todos los posibles estados en que gana la neurona i .

Una vez que aplico σ , considero el vector $\phi^{\bar{t}(V)}(V)$ como condición inicial del sistema $\frac{d\phi_i^t}{dt} = \gamma_i(\phi_i^t)$. Busco $\phi^{t-\bar{t}(U)}(U)$, con $U = \sigma(\phi^{\bar{t}(V)}(V))$. Para ello resuelvo $\phi^t(U)$.

Definimos la sección de Poincaré como $B = \{W \in [-1, 1]^m : \exists i / W_i = 0\}$.

Si definimos B_i , como $B_i = \{W \in [-1, 1]^m : W_i = 0\}$, tenemos entonces que $B = \bigcup_{i=1}^m B_i$.

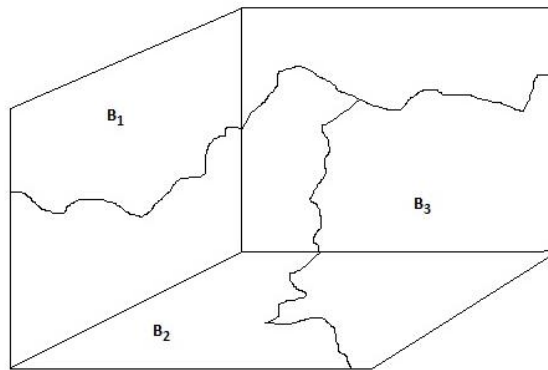


Figura 4: Sección de Poincaré

De esta forma B_1 , por ejemplo, es el "pedazo" de la sección de Poincaré de manera que si la condición inicial V está en B_1 , entonces dispara la neurona 1.

La ventaja de la partición, es que se obtienen funciones continuas en compactos, por lo que podemos usar toda la artillería relacionada.

El objetivo ahora, es probar que el mapa de Poincaré es contractivo a trozos. Por lo tanto debemos probar que cada ρ_i es contractiva.

Otra herramienta que se utilizó para lograr el objetivo de este trabajo, fue el "Teorema del Flujo Tubular".

Consideremos la ecuación diferencial: $\frac{d\phi_i^t}{dt} = \gamma_i(\phi_i^t)$ con $\gamma_i: R^m \rightarrow R^m$ de clase C^1 .

Sea U un abierto de R^m tal que γ no tiene ceros en $\bar{U}$. Entonces:

$\exists$ un difeomorfismo $\xi: \bar{U} \rightarrow \xi(\bar{U})$ de modo que $\frac{d\xi(\phi^t)}{dt} = \vec{a}$ cte.

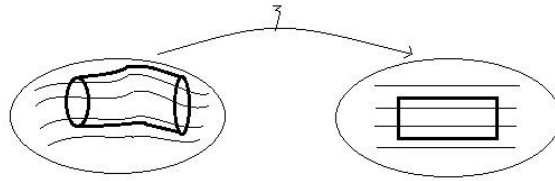


Figura 5: Teorema "Flujo Tubular"

En definitiva, se trata de un cambio de variable.

Aplicamos ese cambio de variable a nuestra ecuación diferencial, es decir a todo el "cubo". Esto provoca que el cubo se deforme, pero las órbitas pasan a ser rectas paralelas. Miro ahora el plano ortogonal al flujo: "Plano proyección". Es sobre ese hiperplano que obtendremos la contractividad.

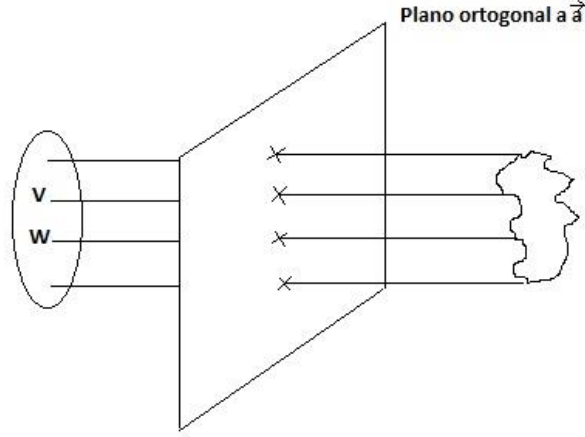


Figura 6: “Plano proyección” ortogonal al flujo “planchado”

Teorema: Existe una métrica en B tal que $\rho_i: B^+ \rightarrow B^+$ es contractivo $\forall i = 1, \dots, m$.

Donde:

$$B = B \cap \rho(B)$$

$$B_i = B_i \cap \rho(B)$$

$$\rho: B \rightarrow B^+ \xrightarrow{\rho} B^+ \xrightarrow{\rho} B^+ \dots$$

El teorema es válido luego de aplicar al menos 1 vez el mapa.

Todas las propiedades dinámicas de mapas contractivos a trozos en espacios métricos completos, valen para el mapa de Poincaré de la red inhibitoria.

Teorema: Sea B un espacio métrico completo, ρ un mapa contractivo a trozos en B , entonces “genéricamente” el atractor está formado por una cantidad finita de órbitas periódicas.

La velocidad del flujo luego de aplicar el cambio de variable “que plancha”, queda: $\frac{d\xi\phi^t(V)}{dt} = \vec{a} \text{ cte}$. Para probar que el mapa es contractivo, definiremos previamente una métrica.

Sea π la proyección sobre el hiperplano ortogonal al flujo “planchado”, entonces:

$$\text{dist}(V, V + dV) = \|\pi. d\xi. dV\|$$

A partir de lo anterior es que definimos:

$$\text{dist}(U, V) = \int_0^1 \|\pi. d\xi. (U - V)\| ds$$

$$V + s(U - V)$$

Veamos que con esta métrica los mapas son contractivos.

Demostración: Sean $V, W \in \hat{B}_i$ $i \in J(V), i \in J(W)$. Entonces:

$$\text{dist}(\rho_i(V), \rho_i(W)) = \int_0^1 \|\pi. d\xi. (\rho_i(W) - \rho_i(V))\| ds$$

$$\rho_i(V) + s(\rho_i(W) - \rho_i(V))$$

Posteriormente, vimos qué valor toma cada componente $(\rho_i(W) - \rho_i(V))$:

$$(\rho_i(W) - \rho_i(V))_j = \phi_j^{t_i(W)}(W_j) - \phi_j^{t_i(V)}(V) = D_V \phi_j^{t_i(V)}(V). (W - V) + \text{Resto}$$

Tomamos como válido que $\text{Resto} \rightarrow 0$

Hallamos a continuación la matriz D_V . Para ello es necesario calcular:

$$\frac{\partial \phi_j^{t_i(V)}}{\partial V_k} = \left(\frac{\partial \phi_j^{t_i(V)}}{\partial V_k} \Big|_{t=t_i(V)} \right) + \left(\frac{\partial \phi_j^{t_i(V)}}{\partial t} \Big|_{t=t_i(V)} \right) \cdot \left(\frac{\partial t_i(V)}{\partial V_k} \right)$$

Ahora, si $k \neq j \Rightarrow \frac{\partial \phi_j^{t_i(V)}}{\partial V_k} = 0$

Posteriormente usando la fórmula de Liouville para el caso en que $k = j$, se llegó a que:

$$\frac{\partial \phi_j^{t_i(V)}}{\partial V_k} \leq \lambda < 1$$

Observamos, luego:

$$\pi. d\xi \left(\frac{\partial \phi_j^{t_i(V)}(V)}{\partial V_k} \right) = \pi \begin{pmatrix} \leq \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \leq \lambda \end{pmatrix} + \pi d\xi \left(\frac{d\phi_j^t(V)}{dt} \Big|_{t=t_i} \frac{\partial \phi_j^{t_i(V)}}{\partial V_k} \right)$$

Como:

$$\frac{d\phi_j^t(V)}{dt} = \vec{a} \Rightarrow \pi d\xi \frac{d\phi_j^t(V)}{dt} = 0$$

De esta forma:

$$\pi d\xi (\rho_i(W) - \rho_i(V)) = \pi d\xi \begin{pmatrix} \leq \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \leq \lambda \end{pmatrix} \cdot (W - V) + \pi d\xi \cdot (Resto)$$

Tomando norma:

$$\|\pi d\xi (\rho_i(W) - \rho_i(V))\| = \lambda \|\pi d\xi \cdot (W - V)\| + \|\pi d\xi \cdot (Resto)\|$$

Recordando la métrica que estamos utilizando y despreciando el *Resto*,
llegamos a que:

$$dist(\rho_i(V), \rho_i(W)) \leq \lambda \cdot \int_0^1 \|\pi d\xi \cdot (W - V)\| = \lambda \cdot dist(V, W)$$

■

CONCLUSIONES

Se estudió de forma rigurosa una red conformada por unidades dinámicas acopladas entre sí, llamadas neuronas. Se observó que el comportamiento de esta red se reduce al estudio de mapas continuos a trozos.

Podemos concluir que con la métrica definida, dichos mapas definidos en cada una de las piezas de continuidad son localmente contractivos. Por lo cual "genéricamente" el atractor está formado por una cantidad finita de órbitas periódicas.

AGRADECIMIENTOS

A L'Oreal-Unesco-Dinacyt por la financiación del proyecto: "Neurodinámica" a través del Premio L'Oreal-Unesco-Dinacyt 2014 de Uruguay.

BIBLIOGRAFÍA

E. Catsígeras, (2010). "Contractive Picewise Continuous Maps Modeling

Networks Of Inhibitory Neurons". IJPAM

E. Catsígeras, (2011). "Topological Dynamics of Generic Piecewise Contractive Maps in n Dimensions"

2

Dynamics of Cooperative Neuronal Networks Depending on their Associated Graphs.

Del programa de introducción a la investigación de ayudantes del proyecto
“Neurodinámica”. Facultad de Ingeniería, UdelaR, Montevideo.

Estudiantes:

BARRIOS, Marcos
CUBRÍA, Florencia
LORENZO, Pilar

Orientadora:

CATSIGERAS, Eleonora

2015

Gmail

Eleonora Catsigeras

Seminario Sistemas Dinámicos

Matias Carrasco <matiascapi@gmail.com>

26 de agosto de 2015, 23:02

Para: sisdin@fing.edu.uy, todos@cmat.edu.uy, todos_imerl@fing.edu.uy, listaestudiantes@cmat.edu.uy

Buenas,

este viernes 28/8 a las 14:30 en el salon de seminarios del IMERL tenemos el placer de escuchar a Marcos Barrios.

Abajo titulo y resumen.

Saludos

Titulo: Estudio dinámico de un modelo de redes neuronales

Resumen: En primer lugar, introduciremos el modelo definido por Renato E. Mirollo y Steven H. Strogatz en [1] de redes neuronales cooperativas.

Dado que el objetivo es representar fenómenos biológicos con este modelo, surgen naturalmente preguntas sobre la dinámica de la red, en particular aquellas relacionadas con la sincronización de la misma.

Para responder a estas preguntas consideraremos dos enfoques: uno analítico y otro combinatorio.

El analítico se concentrará en las funciones de carga de las neuronas, mientras que el combinatorio tendrá como principal herramienta la interacción entre las mismas.

En ambos casos obtendremos resultados de sincronización.

3

Dinámica Topológica- Conexión de los Conjuntos Omega-Límite.

Trabajo de asesoramiento de los estudiantes de posgrado Odalis Ortega y Leonardo Parra- Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

Eleonora Catsigeras

2015

Dinámica Topológica

Conexión de los conjuntos omega-límite.

Eleonora Catsigeras¹

Asesoramiento a Leonardo Parra².

Directora de Posgrado: Cristina Lizana³

7 de Septiembre de 2015

Sea X un espacio topológico.

Definición 1. (Conjunto conexo)

Un conjunto no vacío $A \subset X$ se dice *conexo* si para toda pareja de abiertos disjuntos tales que

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$$

se cumple

$$A \cap U = \emptyset \text{ ó } A \cap V = \emptyset.$$

Por ejemplo, un intervalo en la recta es conexo. Una propiedad importante es que si $\varphi : A \mapsto B$ es una función continua, y A es conexo, entonces B es conexo. Dicho de otra forma, la imagen continua de un conexo, es conexo. En particular sea $\varphi : I \mapsto X$, donde I es un intervalo de la recta real, una parametrización continua de la curva $\varphi(I) \subset X$. Entonces, como I es conexo, y la parametrización φ es continua, la curva $\varphi(I)$ es un conjunto conexo de X .

Sea ahora X un espacio métrico compacto.

Definición 2. (Flujo o Sistema Dinámico a Tiempo Real)

Un *sistema dinámico continuo a tiempo real* en el espacio X , llamado también *flujo*, es una aplicación continua:

$$\phi : X \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \mapsto X,$$

(donde $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es el conjunto de los números reales no negativos, y se llama semieje del tiempo hacia el futuro), tal que:

$$\phi(x, 0) = x \quad \forall x \in X, \quad \text{y} \quad \phi(x, t + s) = \phi(\phi(x, t), s) \quad \forall x \in X, \quad \forall t, s \geq 0.$$

¹Instituto de Matemática y Estadística “Rafael Laguardia” (IMERL), Universidad de la República, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

²Estudiante de la Maestría en Matemática en la Universidad de Los Andes (ULA), Mérida, Venezuela. Correo electrónico: leonardoparra088@gmail.com

³Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Correo electrónico: clizana@ula.ve

Definición 3. (Órbita)

Dado un punto $x \in X$, y un flujo ϕ , se llama *órbita* por el flujo ϕ del punto x , o también órbita con estado inicial x , a la curva paramétrica:

$$\text{orb}(x) : t \mapsto \phi(x, t)$$

definida para todo t real no negativo. Se denota $\text{orb}(x) = \{\phi(x, t)\}_{t \geq 0}$. Se observa que la órbita del punto x es una curva continua (y por lo tanto conexa) en el espacio X , parametrizada por la variable tiempo $t \geq 0$, y además esta curva $\text{orb}(x)$ tiene extremo inicial en el punto x , pues $\phi(x, 0) = x$.

Definición 4. (Omega-límite) Sea ϕ un flujo en el espacio métrico compacto X . Dado un punto $x \in X$ se llama *omega-límite de x* al conjunto $\omega(x) \subset X$ definido por:

$$\omega(x) := \{y \in X : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x, t_n) = y\}.$$

Dicho de otra forma, $\omega(x)$ es el conjunto de todos los puntos límites de la órbita $\text{orb}(x) = \{\phi(x, t)\}_{t \geq 0}$ para subsucesiones $\{t_n\}_{n \geq 0}$ de instantes $t = t_n$ que tienden a $+\infty$.

Ejercicio 5. Probar que $\omega(x)$ es compacto y no vacío, cualquiera sea el punto $x \in X$.

Sugerencia: Para demostrar que $\omega(x) \neq \emptyset$, recordar que en un espacio métrico compacto, toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Para demostrar que $\omega(x)$ es compacto, basta demostrar que $\omega(x)$ es cerrado, pues el espacio X donde está contenido el conjunto $\omega(x)$ es compacto. Y finalmente, para demostrar que $\omega(x)$ es cerrado, basta demostrar que cualquier sucesión de puntos $p_n \in \omega(x)$, si es convergente en X , entonces su límite pertenece a $\omega(x)$.

Teorema 6. (Conexión del omega-límite)

Sea ϕ un flujo continuo en el espacio métrico compacto X . Para cualquier punto $x \in X$ el conjunto omega-límite $\omega(x)$ es conexo.

Demostración: Supongamos por absurdo que $\omega(x)$ no es conexo. Entonces, aplicando la Definición 1, existen dos abiertos $U, V \subset X$ disjuntos tales que

$$\omega(x) = (\omega(x) \cap U) \cup (\omega(x) \cap V), \quad (1)$$

y además

$$\omega(x) \cap U \neq \emptyset, \quad \omega(x) \cap V \neq \emptyset. \quad (2)$$

Tomemos dos puntos $z_1 \in \omega(x) \cap U$, $z_2 \in \omega(x) \cap V$. Por la Definición 4 del conjunto omega-límite de x , y teniendo en cuenta que $z_1, z_2 \in \omega(x)$, deducimos que existen sucesiones $t_n, s_n \rightarrow +\infty$ tales que $\lim_n \phi(x, t_n) = z_1$, $\lim_n \phi(x, s_n) = z_2$. Como $z_1 \in U$, $z_2 \in V$ y los conjuntos U, V son abiertos, de la definición de límite deducimos que $\phi(x, t_n) \in U$, $\phi(x, s_n) \in V$ para todo n suficientemente grande. Entonces, sin pérdida de generalidad (eventualmente

borrando una cantidad finita de términos de la sucesiones $\{t_n\}$ y $\{s_n\}$ y reindexando después estas sucesiones), podemos asumir que

$$\phi(x, t_n) \in U, \quad \phi(x, s_n) \in V \quad \forall n \geq 0, \quad \lim t_n \rightarrow +\infty, \quad \lim s_n \rightarrow +\infty.$$

Ahora construimos subsucesiones $\{t_h^*\}_{h \geq 0}$ y $\{s_h^*\}_{h \geq 0}$ de $\{t_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$ respectivamente, tales que

$$t_h^* < s_h^* < t_{h+1}^* < s_{h+1}^* \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Como $\{t_h^*\}_{h \geq 0}$ y $\{s_h^*\}_{h \geq 0}$ son subsucesiones de $\{t_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$ respectivamente, tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} t_h^* = +\infty, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} s_h^* = +\infty,$$

$$\phi(x, t_h^*) \in U, \quad \phi(x, s_h^*) \in V \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Consideremos para $h \in \mathbb{N}$ fijo, la curva $\mathcal{C}_h = \{\phi(x, \tau)\}_{t_h^* \leq \tau \leq s_h^*}$, que es un arco conexo y compacto de la órbita por el punto x . Por construcción, tenemos

$$\phi(x, t_h^*) \in \mathcal{C} \cap U \neq \emptyset, \quad \phi(x, s_h^*) \in \mathcal{C} \cap V \neq \emptyset.$$

Siendo $\mathcal{C}_h \subset X$ conexo, de la Definición 1, deducimos:

$$\mathcal{C}_h \neq (\mathcal{C} \cap U) \cup (\mathcal{C}_h \cap V),$$

o equivalentemente, existe un punto

$$p_h \in \mathcal{C}_h \setminus (U \cup V).$$

Como $p_h \in \mathcal{C}_h = \{\phi(x, \tau)\}_{t_h^* \leq \tau \leq s_h^*}$, existe un instante $\tau_h \in [t_h^*, s_h^*]$ tal que

$$p_h = \phi(x, \tau_h) \in X \setminus (U \cup V), \quad t_h^* \leq \tau_h \leq s_h^*.$$

El espacio métrico X es compacto, entonces toda sucesión en X tiene alguna subsucesión convergente. Por lo tanto, existe una subsucesión

$$p_{h_j} = \phi(x, \tau_{h_j})_{j \rightarrow +\infty} \rightarrow q, \quad \tau_{h_j} \geq t_{h_j}^* \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $p_{h_j} \in X \setminus (U \cup V)$, y $U \cup V$ es abierto, $X \setminus (U \cup V)$ es cerrado; luego $q = \lim_j p_{h_j} \in X \setminus (U \cup V)$. Equivalentemente

$$q \notin U \cup V.$$

Por otra parte, como $\tau_{h_j} \geq t_{h_j}^* \rightarrow +\infty$, y $p_{h_j} = \phi(x, \tau_{h_j}) \rightarrow q$, tenemos

$$q \in \omega(x).$$

Por lo tanto

$$q \in \omega(x) \setminus (U \cup V),$$

de donde

$$\omega(x) \neq (\omega(x) \cap U) \cup (\omega(x) \cap V),$$

contradiciendo la igualdad (1), y terminando la demostración del Teorema 6. $\square$

Definición 7. (Sistema Dinámico Discreto a Tiempo Natural)

Un *sistema dinámico discreto a tiempo natural* en el espacio X , llamado también *sistema dinámico por iterados de f* , es una aplicación continua:

$$\phi : X \times (\mathbb{N}) \mapsto X,$$

tal que:

$$\phi(x, 0) = x \quad \forall x \in X, \quad \text{y} \quad \phi(x, n + m) = \phi(\phi(x, n), m) \quad \forall x \in X, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Si denotamos $f(x) = \phi(x, 1)$ obtenemos $\phi(x, 2) = \phi(\phi(x, 1), 1) = (f \circ f)(x) =: f^2(x)$. Por inducción en $n \in \mathbb{N}^+$, deducimos $\phi(x, n) = f^n(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall n \geq 1$, donde f^n denota la composición de f consigo misma n veces, es decir $f^n := f \circ f \circ \dots \circ f$ donde f está repetida n veces.

Por convención $f^0 = id$ es el mapa identidad. Entonces $\phi(x, 0) = x = f^0(x) \quad \forall x \in X$.

Deducimos que el sistema dinámico ϕ a tiempo natural $n \in \mathbb{N}$ es el sistema dinámico por iterados de una aplicación continua $f : X \mapsto X$. Más precisamente

$$\phi(x, n) = f^n(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 8. (Órbita)

Dado un punto $x \in X$, y el sistema dinámico por iterados de $f : X \mapsto X$, se llama *órbita* del punto x , o también órbita con estado inicial x , a la sucesión

$$\text{orb}(x) : n \in \mathbb{N} \mapsto f^n(x),$$

definida para todo $n \geq 0$ natural. Se denota $\text{orb}(x) = \{f^n(x)\}_{n \geq 0}$. Se observa que la órbita del punto x es una sucesión (y en el espacio X con punto inicial en el punto x , pues $f^0(x) = x$).

Definición 9. (Omega-límite) Sea $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema dinámico por iterados de $f : X \mapsto X$ en el espacio métrico compacto X . Dado un punto $x \in X$ se llama *omega-límite de x* al conjunto $\omega(x) \subset X$ definido por:

$$\omega(x) := \{y \in X : \exists n_j \rightarrow +\infty \text{ tal que } \lim_{j \rightarrow +\infty} f^{n_j}(x) = y\}.$$

Dicho de otra forma, $\omega(x)$ es el conjunto de todos los puntos límites de las subsucesiones convergentes de la órbita $\text{orb}(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejercicio 10. Para el sistema dinámico por iterados de f , donde $f : X \mapsto X$ es una aplicación continua en el espacio métrico compacto X , probar que $\omega(x)$ es compacto y no vacío, cualquiera sea el punto $x \in X$.

Proposición 11.

Sea el sistema dinámico por iterados de un mapa continuo $f : X \mapsto X$ en un espacio métrico compacto. Sea $x \in X$. El conjunto omega-límite $\omega(x)$ no es necesariamente conexo ni es necesariamente desconexo.

Demostración: Basta exhibir dos ejemplos f_1 y f_2 . Uno, para el cual exista un punto p_1 con $\omega(p_1)$ conexo, y otro para el cual existe un punto p_2 con $\omega(p_2)$ desconexo.

El primer ejemplo: Sea $X = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$, y sea $f_1 : X \mapsto X$ definida por

$$f_1(x, y) := (x/2, y/2) \quad \forall \quad -2 \leq x \leq 2, \quad \forall \quad -2 \leq y \leq 2.$$

Entonces

$$f_1^n(x, y) = (x/2^n, y/2^n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} (0, 0) \quad \forall (x, y) \in X,$$

de donde se deduce que $\omega(x, y) = (0, 0)$ es conexo, para todo $p = (x, y) \in X$.

El segundo ejemplo: Sea $X = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$, y sea $f_2 : X \mapsto X$ definida por

$$f_2(x, y) = (-\sqrt[3]{x}, y/2) \quad \forall \quad -2 \leq x \leq 2, \quad \forall \quad -2 \leq y \leq 2.$$

Entonces,

$$f_2^n(x, y) = ((-1)^n \sqrt[3]{x}, y/2^n) \quad \forall (x, y) \in X.$$

Si $x \neq 0$, entonces toda subsucesión convergente de $\{f_2^n(x, y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es, o bien una subsucesión de $\{f_2^{2m}(x, y)\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converge a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (x^{1/3^{2m}}, y/2^{2m}) = (1, 0),$$

o bien una subsucesión de $\{f_2^{2m+1}(x, y)\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converge a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (-x^{1/3^{2m+1}}, y/2^{2m+1}) = (-1, 0).$$

Entonces $\omega(x, y) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ si $x \neq 0$, que es un conjunto desconexo. □

4

Topología y Transitividad del Shift Unilateral.

Trabajo de asesoramiento de los estudiantes de posgrado Odalis Ortega y Leonardo Parra. Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

Eleonora Catsigeras

2015

Topología y Transitividad del Shift Unilateral.

Eleonora Catsigeras¹

Asesoramiento a Odalis Sofía Ortega².

Directora de Posgrado: Cristina Lizana³

31 de Agosto de 2015

Consideremos el conjunto $\{0, 1\}$, al que llamamos *alfabeto* de dos símbolos 0 y 1.

Definición 1. (Espacio del shift unilateral)

Se llama *espacio del shift unilateral* con el alfabeto $\{0, 1\}$ al espacio métrico de las sucesiones

$$\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

dotado de la métrica

$$\text{dist}(\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\theta_n - \phi_n|}{2^n}.$$

Definición 2. (La transformación shift)

Se llama *shift* a la transformación $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$\sigma(\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ donde } \gamma_n := \sigma_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3. (Transitividad topológica)

Sea X un espacio métrico. Una transformación $T : X \mapsto X$ se dice *transitiva topológicamente* (o en breve *transitiva*), si para toda pareja de abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existe $n \geq 1$ tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Observación: La transitividad topológica de una transformación no depende de la métrica elegida en X , siempre que esta defina una misma topología. Es decir, depende solo de la topología, y no de la métrica particular que la induce.

¹Instituto de Matemática y Estadística “Rafael Laguardia” (IMERL), Universidad de la República, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

²Estudiante de la Maestría en Matemática en la Universidad de Los Andes (ULA), Mérida, Venezuela. Correo electrónico: odalisortega18@gmail.com

³Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Correo electrónico: clizana@ula.ve

Teorema 4.

El shift unilateral es transitivo.

Antes de demostrar el Teorema 4, veamos algunas propiedades de la topología del espacio métrico del shift:

Definición 5. (Cilindros)

Sea

$$\Theta = \{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

una sucesión de símbolos con el alfabeto $\{0, 1\}$. Sean k y r números naturales tales que $k \geq 0$ y $r \geq 1$.

Se llama *cilindro que contiene a Θ , de radio r y con coordenadas fijas $k, k+1, \dots, k+r-1$* , al siguiente conjunto $C(\Theta, k, r)$ contenido en el espacio del shift $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$:

$$C(\Theta, k, r) := \{\Psi = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \psi_{k+j} = \theta_{k+j} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, r-1\}\}.$$

Es decir, el cilindro $C(\Theta, k, r)$ es el conjunto de todas las sucesiones Ψ del espacio del shift tales que los r términos de Ψ que ocupan los lugares $k, k+1, \dots, k+r-1$, coinciden con los r términos de Θ que ocupan esos mismos lugares. En los demás lugares (que son infinitos lugares a la derecha a partir del lugar $k+r$ inclusive, y finitos lugares, si existen, a la izquierda del lugar k), los términos de las sucesiones Ψ en el cilindro, son libres de tomar cualquier valor en el alfabeto.

Teorema 6. *El conjunto de cilindros forman una base de la topología del espacio métrico del shift unilateral.*

Es decir, todo cilindro es abierto no vacío, y cualquier abierto no vacío es unión de cilindros.

Demostraremos el Teorema 6, mediante la combinación de los Lemas 7 y 8 siguientes:

Lema 7.

Todo cilindro es abierto no vacío en el espacio métrico $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ del shift unilateral.

Demostración: De la Definición 5 sabemos que el cilindro $C(\Theta, k, r)$ contiene a $\Theta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$; por lo tanto el cilindro es no vacío.

Para demostrar que el cilindro $C(\Theta, k, r)$ es abierto, consideremos cualquier sucesión $\Phi \in C(\Theta, k, r)$ y probemos que existe una bola

$$B(\Phi, r') := \{\Psi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \text{dist}(\Phi, \Psi) < r'\},$$

centrada en Φ con radio $r' > 0$ tal que $B(\Phi, r') \subset C(\Theta, k, r)$. En efecto, sea

$$r' := \min \left\{ \frac{1}{2^j} : 0 \leq j \leq k+r-1 \right\}.$$

Si $\Psi \in B(\Phi, r')$ entonces

$$\text{dist}(\Phi, \Psi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|\phi_j - \psi_j|}{2^j} < r' = \min \left\{ \frac{1}{2^j} : 0 \leq j \leq k+r-1 \right\}.$$

Pero como $|\phi_j - \psi_j|$ solo puede tomar el valor 0 o el valor 1, deducimos que

$$\phi_j = \psi_j \quad \forall 0 \leq j \leq k+r-1,$$

y en particular para $j \in \{k, k+1, \dots, k+r-1\}$.

Por otra parte como $\Phi \in C(\Theta, k, r)$, de la Definición 5 obtenemos que

$$\phi_j = \theta_j \quad \forall j \in \{k, k+1, \dots, k+r-1\}.$$

Concluimos que $\psi_j = \theta_j$ para todo $j \in \{k, k+1, \dots, k+r-1\}$. Por lo tanto $\Psi \in C(\Theta, k, r)$ para cualquier sucesión $\Psi \in B(\Phi, r')$. Equivalentemente $B(\Phi, r') \subset C(\Theta, k, r)$, como queríamos demostrar. $\square$

Lema 8.

Todo abierto no vacío del espacio métrico del shift es unión de cilindros.

Demostración: Sea $V \neq \emptyset$ abierto del espacio métrico $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Entonces, para todo punto $\Theta \in V$ existe una bola abierta $B(\Theta, r')$ contenida en V , y por lo tanto V es unión de esas bolas abiertas (una para cada punto $\Theta \in V$). Si demostramos que toda bola abierta $B(\Theta, r')$ contiene algún cilindro $C(\Theta, k, r)$, entonces obtendríamos V como unión de esos cilindros (uno para cada punto $\Theta \in V$).

En efecto, sea dada una bola abierta

$$B(\Theta, r') := \{\Phi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \text{dist}(\Theta, \Phi) < r'\}.$$

Construyamos dos naturales $k \geq 0$ y $r \geq 1$ tales que el cilindro $C(\Theta, k, r)$ esté contenido en $B(\Theta, r')$.

Dado $r' > 0$, sean $k := 0$ y $r \geq 1$ tal que

$$\sum_{j=r}^{+\infty} \frac{1}{2^j} < r'.$$

(Tal natural $r \geq 1$ existe porque la serie $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}$ es convergente, y por lo tanto su cola $\sum_{j=r}^{+\infty}$ tiende a cero cuando $r \rightarrow +\infty$.)

Basta ahora probar que $C(\Theta, 0, r) \subset B(\Theta, r')$. Sea $\Phi \in C(\Theta, 0, r)$. De la Definición 5, obtenemos $\phi_j = \theta_j$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Entonces

$$\text{dist}(\Phi, \Theta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|\phi_j - \theta_j|}{2^j} = \sum_{j=r}^{+\infty} \frac{|\phi_j - \theta_j|}{2^j}.$$

Como $|\phi_j - \theta_j|$ vale 0 o vale 1, de la última igualdad obtenemos:

$$\text{dist}(\Phi, \Theta) = \sum_{j=r}^{+\infty} \frac{|\phi_j - \theta_j|}{2^j} \leq \sum_{j=r}^{+\infty} \frac{1}{2^j} < r'.$$

Concluimos que $\Phi \in B(\Theta, r')$ cualquiera sea $\Phi \in C(\Theta, 0, r)$. Por lo tanto, el cilindro $C(\Theta, 0, r)$ está contenido en la bola $B(\Theta, r')$, como queríamos demostrar. $\square$

Demostración del Teorema 6. Es consecuencia inmediata de los Lemas 7 y 8. $\square$

Ahora demostraremos el Teorema 4. Para ello, primero probaremos el siguiente lema:

Lema 9. *Para cualquier cilindro $C(\Theta, k, r)$ existe un número natural $n \geq 1$ tal que*

$$\sigma^n(C(\Theta, k, r)) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Es decir, todo cilindro tiene algún iterado por el shift que es igual a todo el espacio.

Demostración: Sea dado el cilindro $C(\Theta, k, r)$, donde k y r son números naturales tales que $k \geq 0$ y $r \geq 1$. Elijamos $n = k + r \geq 1$. Usando la Definición 2, escribimos extensivamente el conjunto $\sigma^n(C(\Theta, k, r))$ de la siguiente forma:

$$\sigma^n(C(\Theta, k, r)) = \left\{ \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \exists \{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}} \in C(\Theta, k, r) \text{ tal que } \psi_j = \phi_{n+j} \forall j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ahora, usando la igualdad anterior y la Definición 5 de cilindro, obtenemos:

$$\sigma^n(C(\Theta, k, r)) = \left\{ \{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} :$$

$$\exists \{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \phi_h = \theta_h \forall h \in \{k, k+1, \dots, k+r-1\}, \text{ y } \psi_j = \phi_{n+j} \forall j \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1)$$

Pero si $n = k+r$ entonces, dada cualquier sucesión $\{\psi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$, se puede construir la sucesión $\{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ del siguiente modo:

$$\phi_h := \psi_{h-n} \quad \text{si } h \geq n = k+r,$$

$$\phi_h := \theta_h \quad \text{si } 0 \leq h \leq n-1 = k+r-1.$$

Usando la igualdad (1) deducimos que cualquier sucesión $\{\psi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ pertenece al conjunto $\sigma^n(C(\Theta, k, r))$, y por lo tanto este conjunto es todo el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, como queríamos demostrar. $\square$

Demostración del Teorema 4:

De acuerdo a la Definición 3, debemos probar que dada una pareja (U, V) de abiertos no vacíos del espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, existe un número natural $n \geq 1$ tal que $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Usando el Lema 8, existen cilindros $C(\Theta_1, k_1, r_1)$ y $C(\Theta_2, k_2, r_2)$ contenidos en los abiertos U y V respectivamente. Por lo tanto, basta demostrar que existe un número natural $n \geq 1$ tal que $\sigma^n(C(\Theta_1, k_1, r_1)) \cap C(\Theta_2, k_2, r_2) \neq \emptyset$.

Pero por el lema 9, existe $n \geq 1$ tal que $\sigma^n(C(\Theta_1, k_1, r_1))$ es todo el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Concluimos que $\sigma^n(C(\Theta_1, k_1, r_1))$ contiene, y por lo tanto intersecta, al cilindro $C(\Theta_2, k_2, r_2)$ como queríamos demostrar. $\square$

Definición 10. (Espacio del shift bilateral)

Se llama *espacio del shift bilateral* con el alfabeto $\{0, 1\}$ al espacio métrico de las sucesiones bilaterales

$$\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$$

dotado de la métrica

$$\text{dist}(\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\theta_n - \phi_n|}{2^{|n|}}.$$

Definición 11. (La transformación shift hacia la izquierda)

Se llama *shift hacia la izquierda* a la transformación $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mapsto \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ definida por

$$\sigma(\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ donde } \gamma_n := \sigma_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definición 12. (Cilindros en el espacio del shift bilateral)

Sea

$$\Theta = \{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$$

una sucesión bilateral de símbolos con el alfabeto $\{0, 1\}$. Sea k y r números enteros tales que $r \geq 1$.

Se llama *cilindro que contiene a Θ , de radio r y con coordenadas fijas $k, k+1, \dots, k+r-1$* , al siguiente conjunto $C(\Theta, k, r)$ contenido en el espacio del shift $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$:

$$C(\Theta, k, r) := \{\Psi = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \psi_{k+j} = \theta_{k+j} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, r-1\}\}.$$

Es decir, el cilindro $C(\Theta, k, r)$ es el conjunto de todas las sucesiones Ψ del espacio del shift bilateral tales que los r términos de Ψ que ocupan los lugares $k, k+1, \dots, k+r-1$, coinciden con los r términos de Θ que ocupan esos mismos lugares. En los demás lugares (que son infinitos lugares a la derecha a partir del lugar $k+r$ inclusive, e infinitos lugares a la izquierda a partir del lugar $k-1$ inclusive), los términos de las sucesiones Ψ en el cilindro, son libres de tomar cualquier valor del alfabeto.

Ejercicio 13.

Demostrar las siguientes proposiciones:

1. Todo cilindro es abierto no vacío en el espacio métrico $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ del shift bilateral.
2. Cualquier abierto no vacío del espacio métrico $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es unión de cilindros.
3. El conjunto de cilindros forman una base de la topología del espacio métrico del shift bilateral.
4. Para cualquier cilindro $C(\Theta, k, r)$ y para todo natural $n \geq 1$ se cumple

$$\sigma^n(C(\Theta, k, n)) \neq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Es decir, ningún cilindro tiene un iterado por el shift bilateral que es igual a todo el espacio.

5. Dada una pareja $(C(\Theta_1, k_1, r_1), C(\Theta_2, k_2, r_2))$ de cilindros en el espacio del shift bilateral $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, existe un natural $n \geq 1$ tal que

$$\sigma^n(C(\Theta_1, k_1, r_1)) \cap C(\Theta_2, k_2, r_2) \neq \emptyset.$$

6. El shift hacia la izquierda en el espacio del shift bilateral, es transitivo.

5

Sobre Transitividad Topológica. Sobre Entropía Topológica.

Trabajo de asesoramiento del estudiante de posgrado Kendry Vivas Ferrer. Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Caracas, Venezuela

Eleonora Catsigeras

2015

Sobre Transitividad Topológica

Eleonora Catsigeras¹, en asesoramiento a Kendry Vivas Ferrer².

Sea X un espacio topológico. Sea $f : X \mapsto X$ un mapa continuo.

Definition 3.6 de [1], page 37

The map $f : X \mapsto X$ is called *topologically transitive* if for any given nonempty open sets $U, V \subset X$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Exercise 3.7 de [1], page 56

Let $f : I \mapsto I$ be a continuous onto map, where $I \subset \mathbb{R}$ is an interval. Show that the following properties are equivalent:

1. f is topologically transitive;
2. for any open interval $J \subset I$, the set $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(J)$ is dense in I ;
3. for any open interval $J \subset I$, the set $\bigcup_{n \geq 0} f^n(J)$ is dense in I .

Pregunta (de Kendry Vivas, 02 Nov 2015):

El ejercicio es mostrar que las 3 proposiciones son equivalentes. Ya hice 1) implica 2) y 3) implica 1). Sólo resta ver que 2) implica 3), y esa es la parte que no he hecho. Le escribo para pedirle una sugerencia al respecto para poder resolver este problema en particular.

Sugerencias:

Probar las siguientes afirmaciones intermedias (ver comentario abajo de estas sugerencias).

A) Si para todo abierto $U \subset X$ el conjunto $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$ es denso en el espacio X , entonces para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 0$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Dicho de otra forma, la propiedad 2 del ejercicio 3.7 implica la 1.

B) Si para *una* pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 0$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ entonces, $U \cap f^n(V) \neq \emptyset$ para esa pareja de abiertos.

C) Si *para toda* pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 0$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces aplicar la propiedad B) a (V, U) en lugar de (U, V) , y deducir que *para toda* pareja de abiertos (U, V) existe $m \geq 0$ tal que $V \cap f^m(U) \neq \emptyset$.

D) Si para toda pareja de abiertos (U, V) existe $m \geq 0$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces para todo abierto U el conjunto $\bigcup_{m \geq 0} f^m(U)$ es denso en X .

¹Instituto de Matemática y Estadística “Rafael Laguardia” (IMERL), Universidad de la República, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

²Postgraduando en Matemática en el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Venezuela. Correo electrónico: kvivas.ferrer@gmail.com

Comentario:

Las afirmaciones de las sugerencias anteriores son válidas en un contexto más general que el del Ejercicio 3.7 del libro [1]. Aquí el mapa $f : X \mapsto X$ es continuo, pero no necesariamente sobreyectivo, y el espacio topológico X no es necesariamente el intervalo I . La continuidad no se necesita explícitamente en las demostraciones de esas afirmaciones, pero se acostumbra aplicar la Definición 3.6 solo cuando f es continua, nada más que por una cuestión de convención.

Ejercicio (más general que el ejercicio 3.7):

Sea X un espacio topológico y sea $f : X \mapsto X$ un mapa continuo (no necesariamente inyectivo y no necesariamente sobreyectivo). Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes entre sí:

1. f es topológicamente transitivo.
2. Para todo abierto $U \subset X$ el conjunto $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$ es denso en X .
3. Para todo abierto $U \subset X$ el conjunto $\bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$ es denso en X .
4. Para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 1$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$
5. Para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe una sucesión estrictamente creciente de naturales positivos n_j tales que $f^{-n_j}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo j .
6. Para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 1$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$
7. Para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe una sucesión estrictamente creciente de naturales positivos n_j tales que $f^{n_j}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo j .

Comentarios sobre el ejercicio anterior:

No creo que lo mejor sea probar las implicaciones de las proposiciones en el orden en que están enunciadas.

Para que sean ciertas algunas de las equivalencias (por ejemplo para que 1 y 4 sean equivalentes) es necesaria la hipótesis de continuidad de f .

Referencias

- [1] L. Barreira, C. Valls, *Dynamical Systems. An Introduction*. Springer Universitext, Springer-Verlag, London, 2013

Sobre Entropía Topológica

Eleonora Catsigeras¹, en asesoramiento a Kendry Vivas Ferrer².

Sea X un espacio métrico compacto. Sea $f : X \mapsto X$ un mapa continuo. Primero tomo algunas definiciones y enunciados del libro [1] y les agrego algunas otras definiciones y propiedades que son usuales cuando se define la entropía topológica. Observar que ninguna de las definiciones y enunciados siguientes requiere que el mapa f sea invertible.

Definition Section 3.4.1 of [1], page 41

For each $n \in \mathbb{N}$ we define the *dynamical distance* d_n (up to time n) as:

$$d_n(x, y) = \max\{d(f^k(x), f^k(y)) : 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Definición (bola dinámica)

Sean $n \in \mathbb{N}$, $p \in X$ y $\epsilon > 0$.

Llamamos *bola dinámica de centro p y radio ϵ* hasta tiempo n , al siguiente conjunto:

$$B(n, \epsilon, p) := \{x \in X : d_n(x, p) < \epsilon\} = \{x \in X : d(f^k(x), f^k(p)) < \epsilon \forall k = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Definition 3.8 of [1], page 42

The *topological entropy* of f is defined by

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon), \quad (3.12)$$

where $N(n, \epsilon)$ is the largest number of points $p_1, \dots, p_m$ such that $d_n(p_i, p_j) \geq \epsilon$ for $i \neq j$.

We note that $N(n, \epsilon)$ is always finite.

We also note that the function $\epsilon \mapsto \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon)$ is non-increasing and thus, the limit in (3.12) when $\epsilon \rightarrow 0$ always exists.

Definición (ϵ, n -separador)

Se llama ϵ, n -separador a un conjunto finito de puntos $p_1, \dots, p_m \in X$ tales que $d_n(p_i, p_j) \geq \epsilon$ for $i \neq j$. Un $\epsilon - n$ -separador se llama *maximal* si cualquier otro $\epsilon - n$ -separador tiene igual cantidad o menos puntos que él. El número $N(n, \epsilon)$ en la definición de entropía topológica es la cantidad de puntos de un ϵ, n -separador maximal. Se observa que las órbitas (hasta

¹Instituto de Matemática y Estadística “Rafael Laguardia” (IMERL), Universidad de la República, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

²Postgraduando en Matemática en el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Venezuela. Correo electrónico: kvivas.ferrer@gmail.com

tiempo n) de una pareja cualquiera de puntos de un ϵ, n separador se separan por lo menos ϵ en algún instante entre 0 y $n - 1$.

Definitions 3.10 and 3.11 of [1], page 45

Given $n \in \mathbb{N}$ and $\epsilon > 0$, we denote by $M(n, \epsilon)$ the least number of points $p_1, \dots, p_m \in X$ such that each $x \in X$ satisfies $d_n(x, p_i) < \epsilon$ for some i .

We denote by $C(n, \epsilon)$ the least number of elements of a cover of X by sets $U_1, \dots, U_m$ with $\sup\{d_n(x, y) : x, y \in U_i\} < \epsilon$ for $i = 1, \dots, m$.

Definición (ϵ, n -generador):

Se llama ϵ, n -generador a un conjunto finito de puntos $p_1, \dots, p_m \in X$ tales que para todo $x \in X$ existe p_i tal que $d_n(x, p_i) < \epsilon$. Un ϵ, n -generador se llama *minimal* si cualquier otro ϵ, n -generador tiene igual cantidad o más puntos que él. El número $M(n, \epsilon)$ es la cantidad de puntos de un ϵ, n -generador minimal. Se observa que la órbita (hasta tiempo n) de un punto cualquiera $x \in X$ está ϵ -acompañada siempre por la órbita (hasta tiempo n) de algún punto p_i de un ϵ, n generador. (Estar ϵ -acompañada hasta tiempo n significa, por definición, que $d(f^k(x), f^k(p_i)) < \epsilon$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.)

Observación importante: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\epsilon > 0$, el número $M(n, \epsilon)$ es igual a la cantidad mínima de bolas dinámicas $B(n, \epsilon, p)$ necesarias para cubrir X .

Demostración. Sea un cubrimiento $\{B(n, \epsilon, p_1), \dots, B(n, \epsilon, p_m)\}$ con una cantidad mínima m de bolas dinámicas de radio ϵ y centros $p_1, \dots, p_m$ respectivamente. Por ser un cubrimiento, dado cualquier punto $x \in X$, existe p_i tal que $x \in B(n, \epsilon, p_i)$. Luego, por definición de bola dinámica: $d_n(x, p_i) < \epsilon$. Deducimos que $\{p_1, \dots, p_m\}$ es un ϵ, n -generador. Entonces la cantidad de puntos $M(n, \epsilon)$ de un ϵ, n -generador minimal es menor o igual que m . Hemos probado que

$$M(n, \epsilon) \leq m.$$

Ahora probemos la desigualdad opuesta. Sea $p_1, \dots, p_k$ un $\epsilon - n$ -generador minimal. Entonces,

$$M(n, \epsilon) = k.$$

Consideremos las bolas dinámicas $B(n, \epsilon, p_1), \dots, B(n, \epsilon, p_k)$. Como cualquier punto $x \in X$ está a distancia d_n menor que ϵ de algún p_i (esto es por la definición de $\epsilon - n$ -generador), resulta $x \in B(n, \epsilon, p_i)$ para algún i . Deducimos que $X = \bigcup_{i=1}^k B(n, \epsilon, p_i)$. Dicho de otra forma,

$$\{B(n, \epsilon, p_1), \dots, B(n, \epsilon, p_k)\}$$

es un cubrimiento del espacio X con bolas dinámicas de radio ϵ . Por lo tanto k es mayor o igual que la cantidad mínima m de bolas dinámicas de radio ϵ necesarias para cubrir X . Hemos probado que

$$m \leq k = M(n, \epsilon).$$

Concluimos que $m = M(n, \epsilon)$, como queríamos demostrar. □

Proposition 3.9 of [1], page 45

For each $n \in \mathbb{N}$ and $\epsilon > 0$, we have

$$C(n, 2\epsilon) \leq M(n, \epsilon) \leq N(n, \epsilon) \leq M(n, \epsilon/2) \leq C(n, \epsilon/2).$$

Theorem 3.4 of [1], page 46

If $f : X \mapsto X$ is a continuous map on a compact metric space X , then

$$\begin{aligned} h(f) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log M(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log M(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log C(n, \epsilon). \end{aligned}$$

Exercise 3.16 of [1], page 55

Compute the topological entropy of the endomorphism of the torus $\mathbb{T}^2$ induced by the matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pregunta (de Kendry Vivas, 04 Nov 2015):

En el texto encuentro el cálculo de la entropía topológica para el caso de automorfismos en particular, pero no hay nada referente al cálculo para un endomorfismo en general.

Sugerencias:

A) Dibujar la superficie del toro $\mathbb{T}^2$ como un cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el que se identifican los puntos $(x, 1) \sim (x, 0)$ e $(y, 1) \sim (y, 0)$ (ver la figura 3.5 de [1], página 49).

Tomar un número natural $q \geq 1$. Denotemos $\epsilon := 1/q$. Probar que para cualquier punto $p \in \mathbb{T}^2$ el cuadrado Q con centro en p y lados paralelos a los ejes con longitud ϵ , contiene la bola (con la distancia $d = d_1$) de centro p y radio ϵ . Y además Q está contenido en la bola de centro p y radio $2 \cdot \epsilon$.

B) Aplicando la transformación lineal con la matriz dada al cuadrado Q de lados paralelos a los ejes con longitud ϵ , y centro p (cualquier punto del toro) probar que para todo $n \geq 1$, la bola dinámica $B(n, \epsilon, p)$ de centro p y radio ϵ está contenida en el rectángulito $R_n(p, \epsilon)$ de centro p , lados paralelos a los ejes, altura $\epsilon/3^n$ y ancho $\epsilon/2^n$. Análogamente, probar que la bola dinámica $B(n, 2 \cdot \epsilon, p)$ contiene al rectángulito $R_n(p, \epsilon)$.

C) Contar la cantidad mínima $H(n, \epsilon)$ de rectángulitos *compactos* $R_n(p, \epsilon)$ como los de la parte B), necesarios para cubrir el toro. (Recordar que $\epsilon = 1/q$ donde q es un natural positivo).

D) Probar que $H(n, \epsilon) \leq M(n, \epsilon)$ y que $M(n, 2\epsilon) \leq H(n, \epsilon)$. Para ello se sugiere:

Recordar la “observación importante”, probada anteriormente, que dice que el número $M(n, \epsilon)$ es igual a la cantidad mínima de bolas dinámicas necesarias para cubrir X .

Usar las propiedades de la parte B) que relaciona los rectángulos $R_n(p, \epsilon)$ con las bolas dinámicas de radio ϵ y 2ϵ .

Usar que los números $M(n, \epsilon)$, $M(n, 2\epsilon)$ y $H(n, \epsilon)$ son mínimas cantidades de bolas dinámicas $B(n, \epsilon, p)$, o $B(n, 2\epsilon, p)$, o de rectángulos $R_n(p, \epsilon)$ respectivamente, necesarios para cubrir X .

E) Aplicar la igualdad $h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log M(n, \epsilon)$ (Teorema 3.4 del libro [1]), y las desigualdades de la parte D) de estas sugerencias, para deducir que existe el siguiente límite y es igual a la entropía topológica de f :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} H(n, 1/p) = h(f).$$

Finalmente, usando el resultado probado en la parte C) calcular dicho límite. (Debería quedar $h(f) = \log 6$).

Ejercicio (generalizaciones del ejercicio 3.16 de [1])

1. Sean a_1 y a_2 dos números naturales positivos. Sea en el toro $\mathbb{T}^2$, el endomorfismo inducido por la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. Probar que

$$h(f) = \log a_1 + \log a_2 = \sum_{i \in \{1, 2\}, \log a_i > 0} \log a_i .$$

Sugerencia: argumentar como se sugiere para el ejercicio 3.16 cubriendo el toro con rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados y longitudes adecuadas.

2. Sea A una matriz 2×2 con entradas enteras, diagonalizable con valores propios λ_1 y λ_2 reales no negativos. Es decir: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ y hay dos vectores propios L.I.. Sea en el toro $\mathbb{T}^2$ el endomorfismo inducido por la matriz A . Probar que

$$h(f) = \sum_{i \in \{1, 2\}, \log \lambda_i > 0} \log \lambda_i .$$

Sugerencia: argumentar como en la parte 1, pero en vez de cubrir el toro con rectángulos de lados paralelos a los ejes, cubrirlo con paralelogramos de lados paralelos a las direcciones propias, y longitudes adecuadas, en forma similar a la figura 3.5 del libro [1], página 49.

Referencias

- [1] L. Barreira, C. Valls, *Dynamical Systems. An Introduction*. Springer Universitext, Springer-Verlag, London, 2013

6

On $C0$ Expanding Maps.

Comments about the questions and ideas of the Graduate Student Quan Jie Han.

Communication to Quan Jie Han y his advisor Prof. Lanyu Wang,
Academy of Math. and Systems Science of the Chinese Academy of Science
(<http://english.amss.cas.cn>), Beijing, China,

Eleonora Catsigeras

2013

On C^0 expanding maps - Comments¹

About the questions and ideas of the Graduate Student Quan Jie Han²

Eleonora Catsigeras³

DRAFT: July 29th., 2013.

1 On the definition of C^0 -expanding map

According, for instance, to [Ka-Ha 99, Definition 2.4.1], and using your notation:

Definition 1.1 The map $f : M \mapsto M$ is C^0 -*expanding* if it is continuous and there are constants $r_0 > 0$ and $b > 1$ such that

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \geq b \text{dist}(x, y) \quad (1)$$

for all $x, y \in M$ such that $\text{dist}(x, y) \leq r_0$.

Let us denote by $\mathcal{E}^0$ the space of all the C^0 -expanding maps on a fixed compact manifold M endowed with the C^0 topology.

Definition 1.2 (Ball, dynamical ball and distance expansion quotient)

For any point $x \in M$ and any $r > 0$ define

$$B(x, r) := \{y \in M : \text{dist}(x, y) \leq r\},$$

which is called *the compact ball of centre x and radius $r > 0$* .

For any point $x \in M$, any $n \in \mathbb{N}$ and any $r > 0$ define

$$B_n(x, r) := \left\{ y \in M : \text{dist}(f^j(x), f^j(y)) \leq r \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\},$$

which is called *the compact dynamical ball of centre x and radius $r > 0$ up to time n* .

For all $x \in M$, for all $0 < \epsilon$ and for all $n \in \mathbb{N}$, define:

$$A_n(x, \epsilon) := \sup_{y \in B_n(x, \epsilon), y \neq x} \frac{\text{dist}(f^n(x), f^n(y))}{\text{dist}(x, y)} \in [0, +\infty], \quad (2)$$

which we call the *distance expansion quotient* in the dynamical ball of centre x and radius ϵ , up to time n .

¹Work included in the academic activity “Formación de Investigadores - Introducción a la Investigación”, of researchers of Universidad de la República (Uruguay) in mutual collaboration with researchers of scientific institutions abroad Uruguay.

²The Advisor of QuanJie Han in the program of Graduate Studies at the Academy of Math. and Systems Science (Beijing - China) is Prof. Lanyu Wang

³Profesor Agregado del Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. E-mail: eleonora@fing.edu.uy

We notice that $B(x, r)$, $B_n(x, r)$ and $A_n(x, \epsilon) \in [0, +\infty]$ are well defined for any map f (also if f is not continuous) acting on a compact metric space M . We ask M to be compact only to get the ball $B(x, r)$ compact. If besides f is continuous, then the dynamical ball $B_n(x, r)$ is compact because:

$$B_n(x, r) = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(B(f^j(x), r)).$$

It is standard to check the following properties of C^0 expanding maps, if they are defined according to Definition 1.1:

Proposition 1.3 *If $f \in \mathcal{E}^0$ and if $r_0 > 0$ and $b > 1$ are the constants that exist due to Definition 1.1, then:*

A)

$$f|_{B(x, r)} : B(x, r) \mapsto f(B(x, r)) \text{ is an homeomorphism } \quad \forall x \in M, \quad \forall 0 < r \leq r_0. \quad (3)$$

(Property A) is usually recalled, in brief, by the following sentence: “ f is a local homeomorphism”.)

B)

$$B(f(x), br) \subset f(B(x, r)) \quad \forall 0 < r \leq r_0 \quad \forall x \in M. \quad (4)$$

C)

$$A_n(x, \epsilon) \geq b^n \quad \forall x \in M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 < \epsilon < r_0. \quad (5)$$

Nevertheless, one must be aware of the following:

Assertion B) DOES NOT IMPLY Definition 1.1

Assertion B) DOES NOT IMPLY Assertion A)

Assertion B) DOES NOT IMPLY Assertion C).

So, if one took Assertion B), which is in my opinion a very inadequate definition for C^0 -expanding, instead of using Definition 1.1, one would have all the continuous maps that satisfy just Assertion B) for some constants $b > 1$ and $r_0 > 0$. But I believe (I am not completely certain) that many of those maps will not satisfy Assertion C). Hence, with Assertion B) as definition of C^0 -expanding, one would not be legitimately use Assertion C) as true to prove theorems and obtain further results (unless one could prove before that Assertion B) implies C), which I believe is false).

Definition 1.4 Let $f \in \mathcal{E}^0$. We say that f is *Lypschitz- expanding* if there exists $a > b > 1$ such that

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \leq a \text{dist}(x, y), \quad (6)$$

for all $x, y \in M$ such that $\text{dist}(x, y) \leq r_0$, where $b > 1$ and $r_0 > 0$ are the constants of Definition 1.1.

We denote by $\mathcal{E}_*^0$ the set of Lypschitz expanding maps. Notice that, the prerequested condition for a map f belong to $\mathcal{E}^0$ is that it is continuous and expanding according to Definition 1.1. In brief, by Definition $\mathcal{E}_*^0 \subset \mathcal{E}^0$.

I suggest (but I am not completely certain since I had not tried to prove it) that may be it is possible to prove that C^0 -generically (i.e. for the intersection of a countable family of dense and open subsets of $\mathcal{E}^0$), the C^0 -expanding maps *are not* Lypschitz- expanding. I mean that $\mathcal{E}^0 \setminus \mathcal{E}_*^0$ is generic.

Nevertheless, we are interested to focuss on the (maybe meager) set $\mathcal{E}_*^0$ of C^0 Lypschitz- expanding maps.

It is standard to check the following properties of C^0 Lypschitz expanding maps, provided that they are defined according to Definition 1.4:

Proposition 1.5 *If $f \in \mathcal{E}_*^0$ and if $r_0 > 0$ and $a > b > 1$ are the constants that exist due to Definitions 1.1 and 1.4, then:*

A)

$$f|_{B(x,r)} : B(x,r) \mapsto f(B(x,r)) \text{ is an homeomorphism } \quad \forall x \in M, \quad \forall 0 < r \leq r_0. \quad (7)$$

(Property A) is usually recalled, in brief, by the following sentence: “ f is a local homeomorphism”.)

B')

$$B(f(x), br) \subset f(B(x, r)) \subset B(f(x), ar) \quad \forall 0 < r \leq r_0 \quad \forall x \in M. \quad (8)$$

C')

$$b^n \leq A_n(x, \epsilon) \leq a^n \quad \forall x \in M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 < \epsilon < r_0. \quad (9)$$

Nevertheless, one must be aware of the following:

Assertion B') DOES NOT IMPLY Definition 1.4

Assertion B') DOES NOT IMPLY Assertion A')

Assertion B') DOES NOT IMPLY Assertion C').

So, if one took Assertion B'), which is in my opinion a very inadequate definition for C^0 -expanding, instead of using Definitions 1.1 and 1.4, one would have all the continuous maps that satisfy just Assertion B') for some constants $a > b > 1$ and $r_0 > 0$. But I believe (I am not completely certain) that many of those maps will not satisfy Assertion C'). Hence, with Assertion B') as definition of C^0 -expanding, one would neither be legitimately use Assertion C') nor C) as true to prove further theorems and obtain results (unless one could prove before that Assertion B') implies C'), which I believe is false).

Remark: if one adopts as definition of the set $\mathcal{E}_*^0$ (of all the maps that one aims to study), the class of all the continuous mappings that simultaneously satisfy Conditions A) and B'), maybe one can deduce the truth of Assertion C'). I notice that Assertion C') will finally be the key property that one needs to obtain the further results you suggest in your manuscript.

2 Definition of the characteristic exponent a.e. for C^0 -Lypschitz expanding maps

Assume that $f \in \mathcal{E}_*^0$ according to Definition 1.4.

In your notes you assert that by definition of expanding map one gets

$$A_1^\epsilon \leq a \quad \forall x \in M. \quad (10)$$

I believe that Assertion (10) is false if definition of expanding maps were just Property B') of Proposition 1.5. But it is certainly true for all $f \in \mathcal{E}_*^0$, if one adopts Definitions 1.1 and 1.4.

Now, I take from your manuscript, which in my opinion is an amazing very good idea! to reformulate the following definition (which justifies the name of characteristic exponents in the case that $\dim(M) = 1$):

Definition 2.1 (Characteristic exponent)

The *characteristic exponent* of the orbit of a point $x \in M$ is, when it exists, the following limit:

$$\Lambda(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon).$$

(For the points $x \in M$ where the above limit does not exist, we do not define the characteristic exponent).

In your manuscript you have proved, using the Subadditive Ergodic Theorem, the following nice and well posed property:

Proposition 2.2 *If $f \in \mathcal{E}_*^0$ (according to Definition 1.4) and if μ is an f -invariant probability measure, then, for μ -a.e. $x \in M$ there exists the characteristic exponent $\Lambda(x)$. Besides Λ is a measurable function, it is invariant by f , and*

$$\log b \leq \Lambda \leq \log a.$$

Therefore, $\Lambda \in L^1(\mu)$ for any f -invariant measure μ .

Note on the proof: To be able to apply the subadditive ergodic theorem to the sequence $\{\log A_n(x, \epsilon)\}_{n \geq 1}$, a key ingredient is that $\log A_1(\cdot, \epsilon) \in L^1(\mu)$. This is achieved due to Property C') of Proposition 1.5, because $b \leq A_1(x, \epsilon) \leq a$, where $a > b > 1$ are constants. In brief, Proposition 2.2 would not work, in general, for $f \in \mathcal{E}^0$, but for $f \in \mathcal{E}_*^0$.

3 On Ruelle-like Inequality

Let $M = S^1$, be the circle. Let $f \in \mathcal{E}_*^0$ a Lipschitz expanding map from S^1 to S^1 , according to Definition 1.4. Let μ an f -invariant probability measure. We denote by $h_\mu(f)$ the metric entropy of f with respect to μ , which is defined by

$$h_\mu(f) := \sup_{\xi \text{ finite partition}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\xi, \mu\right), \quad (11)$$

where, for any finite partition α and any probability measure μ it is defined

$$H(\alpha, \mu) := - \sum_{A \in \alpha} \mu(A) \log \mu(A), \quad (12)$$

with the agreement $0 \log 0 = 0$.

I take from your manuscript “Question 1”:

Conjecture 3.1 (Ruelle-like inequality)

If $f \in \mathcal{E}_^0$ in the circle S^1 , then for any f -invariant probability μ the following inequality holds:*

$$h_\mu(f) \leq \int \Lambda d\mu,$$

where Λ is the function defined μ -a.e. $x \in S^1$ which assigns to x the characteristic exponent $\Lambda(x)$ according to Definition 2.1.

Comments on your attempt of proof of Conjecture 3.1:

From Formula (11), from Definition 2.1 and from Proposition 2.2, and from the Ergodic Decomposition Theorem, it is enough to prove the following inequality for any ergodic measure μ and for any partition ξ with sufficiently small diameter:

$$\text{To be proved: } \lim_n \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\xi, \mu\right) \leq \lim_n \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon) \quad \mu - \text{a.e.} \quad (13)$$

You write that since H is computed on the pieces $A \in \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\xi$ such that $\mu(A) > 0$ (this assertion is correct), and since the constant b is $b > 1$, one can find n large enough so $\mu(A) \geq 1/b^n$ (this assertion is incorrect), and therefore $H \leq - \sum_{A: \mu(A) > 0} \mu(A) \log(1/b_n) = n \log b$, from which you conclude Inequality (13). This argument is incorrect because to choose n large enough, you have first fixed $A \in \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\xi$ (with $\mu(A) > 0$), but to have fixed such a set A , you have first fixed the partition

$$\xi^{(n)} := \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\xi,$$

and to so do, you have first fixed n . So, what you are arguing indeed is that for any fixed $n \geq 1$, and for any fixed $A^{(n)} \in \xi^{(n)}$ such that $\mu(A) > 0$, there exists $m_0 = m_0(n)$ such that

$$\mu(A^{(n)}) \geq \frac{1}{b}^m \quad \forall A \in \xi^{(n)} \text{ such that } \mu(A) > 0, \quad \forall m \geq m_0(n).$$

This latter inequality is true. But $m_0(n)$ is not n , and so m may be much larger than n . So, one could continue as follows:

$$\lim_n \frac{1}{n} H(\xi^{(n)}, \mu) \leq \lim_n \frac{m_0(n)}{n} \log b.$$

But since $\lim_n m_0(n)/n$ is (in general) $+\infty$, then you can not conclude that $\lim_n H/n \leq \log b$.

Besides, note that the constant $b > 1$ that satisfies Inequality (1) (and consequently it also satisfies Assertions B') and C') of Proposition 1.5), can be substituted by any real number $b = 1 + \delta$ with arbitrarily small positive δ . So, as you do not impose any condition to b besides being larger than 1 (and smaller than $A_n(x, \epsilon)$), you could work with $1 + \delta$ in the same way. So, if your argument were correct, you would have proved that $\lim_n H/n \leq \log b = \log(1 + \delta)$ for any arbitrarily small positive δ . So, in fact, this would imply that $h_\mu(f) = 0$ for any ergodic measure μ , which is obviously false (any C^0 -expanding map f in the circle is topologically conjugate to a linear map $z \mapsto z^d$ in the circle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, where d , which is called the degree of f , is a natural number greater or equal than 2. So, its topological entropy, which is the maximum of the metric entropies, is positive - equal to $\log d$).

So, the argument to prove Inequality of Conjecture 3.1, if this conjecture were true, must be much more subtle than the one above. I suggest to read carefully all the details in the proof of Ruelle [Ru 78] of the analogous Inequality for C^1 maps, and: First try to discover in that proof, *why* each argument can not be omitted, and which is the role of each step in that proof. Second, try to search for those adaptations in the proof of Ruelle, if there are some, which may allow to prove Conjecture 3.1, for C^0 Lipschitz expanding maps on the circle S^1 . (I am not sure if Conjecture 3.1 is true, even in that restricted case.)

4 Does the “pressure” equal zero?

Consider $f \in \mathcal{E}_*^0$, according to Definition 1.4 and acting on the circle S^1 , in the role of the compact manifold M . Let us define:

$$P(f) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} h_\mu(f) - \int \Lambda d\mu$$

where $\mathcal{M}_f$ is the space of f -invariant probability measures on S^1 , $h_\mu(f)$ is the metric entropy of f with respect to $\mu \in \mathcal{M}_f$, and Λ is the function, defined μ -a.e. which assigns to x the characteristic exponent $\Lambda(x)$ according to Definition 2.1 and Proposition 2.2.

Let us say that $P(f)$ is the *pressure*, when the potential is Λ . This name “pressure” is not strictly correct according to the thermodynamic formalism, since the potential Λ (except for instance if $f \in C^1$) is not necessarily a continuous function.

You pose the interesting following question:

Question 4.1 *Is $P(f) = 0$?*

First, if $f \in C^1 \cap \mathcal{E}^0$, then the answer is known to be Yes. A proof can be founded in [Ca-Qu 01, Lemma 2]. This proof for the C^1 -case is based in the following ingredients:

Campbell and Quas’ proof is based on the following components:

1) Ledrappier-Young-Theorem [Le-Yo 85] characterizes the invariant measures that are absolutely continuous with respect to Lebesgue for C^2 maps (so, also in

the particular case of C^2 expanding maps on the circle). Take into account that for C^2 expanding maps on the circle, the equality $P_f = 0$ is a direct consequence of Ledrappier-Young-Theorem. In fact, on the one hand, in the C^2 -expanding case there exists an f -invariant probability measure which is absolutely continuous with respect to Lebesgue. On the other hand, Ledrappier and Young Theorem states (when applied to the one dimensional setting) that any f -invariant probability measure μ is absolutely continuous with respect to Lebesgue if and only if it satisfies Pesin's Entropy Formula, which is $h_\mu(f) = \int \Lambda d\mu$. This Formula, joint with Ruelle's Inequality $h_\nu(f) \leq \int \Lambda d\nu$ for all $\nu \in \mathcal{M}_f$, implies that, for that measure μ , the supremum P_f is obtained as a maximum, and so it is zero (for C^2 -expanding maps in the circle).

2) The density of C^2 expanding maps in the space of C^1 expanding maps. This density is also true in the space of C^0 -expanding maps.

3) The mutual conjugacy among nearby C^1 expanding maps of the circle. This mutual conjugacy also holds for C^0 -expanding maps, because all nearby such maps f are conjugate to the linear map $z \mapsto z^d$, where d is the degree of f .

4) The existence of a continuous choice of the conjugacy of point 3), which Campbell and Quas prove in [Ca-Qu 01] before their Lemma 2. I do not know if the continuous choice of the conjugacy holds or does not for C^0 -expanding maps instead of C^1 . It would take a non trivial adaptation to prove it, if it were true.

5) The continuous dependence of $\int \Lambda d\mu$ on the probability measure $\mu \in \mathcal{M}_f$, where Λ is the Lyapunov exponent. In the C^1 -expanding case, this continuous dependence is trivially obtained, because of the following causes:

In the one dimensional C^1 -case, and due to the chain rule,

$$\Lambda(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |Df(f^j(x))| \quad \mu - \text{a.e. } x \in S^1.$$

Due to Birkhoff Ergodic Theorem

$$\int \Lambda d\mu = \int \log |Df(x)| d\mu$$

where $|Df|$ is a continuous function, because $f \in C^1$. Finally, by the definition of the weak*-topology in the space $\mathcal{M}$ of probability measures, one deduces that the integral with respect to μ of a continuous function, depends continuously on μ .

This argument of point 5) does not work in the C^0 -expanding case. Maybe, one can manage to prove a positive answer to Question 4.1 without using property 5) and adequately adapting the proof of Campbell and Quass. Besides, in the C^0 -Lipschitz expanding case, although the characteristic exponents $\Lambda(x)$ is not necessarily continuous on x , the mapping $\mu \mapsto \int \Lambda d\mu$ is upper semi-continuous as a function of $\mu \in \mathcal{M}_f$ (I treat this point in the next section).

Remark 4.2 Alternative route

Assume two facts (I still do not know if possible):

(I) One manages to prove the truth of Conjecture 3.1.

(II) One manages to prove that $h_\mu(f) = \int \Lambda d\mu$ for all the SRB-like measures μ of $f \in \mathcal{E}_*^0$ on the circle (see comments at the ending section of this report).

Then, one would immediately deduce that the answer to Question 4.1 is Yes. Of course, one should try to prove (I) and (II) without using that $P_f = 0$.

5 Semi-continuity

According to your considerations, for any $\mu \in \mathcal{M}_f$ we denote:

$$V(\mu) := h_\mu(f) - \int \Lambda d\mu.$$

For any fixed $r > 0$, define the set

$$K_r := \{\mu \in \mathcal{M}_f : V(\mu) \geq -r\}.$$

Question 5.1 (a) For fixed $f \in \mathcal{E}^0$, is $h_\mu(f)$ upper semicontinuous as a real function of $\mu \in \mathcal{M}_f$?

(b) Is $V(\mu)$ upper semi-continuous as a real function of $\mu \in \mathcal{M}_f$?

(c) Is K_r weak*-compact?

First, the answer to Question 5.1 (a) is yes. Let us see why. Define

Definition 5.2 (Expansive maps)

Let M be a compact metric space and $f : M \mapsto M$ be continuous. The mapping f is called *expansive* (in the future) if there exists a constant $\alpha > 0$ (which is called *expansivity constant*) such that

$$x, y \in M, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \exists n \geq 0 \text{ such that } \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \geq \alpha.$$

The definition of expansivity, but in a rather more general context referred to the dynamical system obtained by general group actions on M , and not only to the dynamics obtained by iteration of a fixed map $f : M \mapsto M$, can be found for instance in [Ke 98, Definition 4.5.1].

Proposition 5.3 Any $f \in \mathcal{E}^0$ is expansive.

Proof: Fix, as a candidate to be the expansivity constant, $\alpha := r_0 > 0$, where r_0 is the constant of Definition 1.1. Take points $x, y \in M$. Assume that for all $n \geq 0$

$$\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) < r_0.$$

Then, applying Inequality (1) and by induction on n , we obtain

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, y) &\leq \frac{\text{dist}(f(x), f(y))}{b} \leq \frac{\text{dist}(f^2(x), f^2(y))}{b^2} \leq \frac{\text{dist}(f^n(x), f^n(y))}{b^n} \leq \\ &\leq \frac{r_0}{b^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Since $\text{dist}(x, y)$ is independent of n and $r_0/b^n \rightarrow 0$, when $n \rightarrow +\infty$ (because $b > 1$), we conclude that $\text{dist}(x, y) = 0$, i.e. $x = y$. $\square$

Theorem 5.4 *For any fixed expansive map f , the metric entropy $h_\mu(f)$ as a function of $\mu \in \mathcal{M}_f$ is upper semicontinuous.*

Proof: See for instance [Ke 98, Theorem 4.5.6].

Now let us consider Question 5.1 (b). Note that the positive answer to Question 5.1 (a) does not automatically imply a positive answer to Question (b), because the term $-\int \Lambda d\mu$ may not depend continuously on $\mu \in \mathcal{M}_f$ (since $\Lambda(x)$ is not necessarily a continuous function of x , but just a bounded measurable function). This is an enormous difference with the standard proofs and theorems of the thermodynamic formalism, which always use, by definition, continuous functions as potentials. The reason for which the potentials must be continuous, is that, if not, the theory does not fit with the definition of the weak* topology in the space $\mathcal{M}$ of all the probability measures. In the C^1 case, also the Lyapunov exponent is in general a non continuous function of the point. But the integral of the Lyapunov exponent does depend continuously on the measure μ , because, due to Birkhoff Ergodic Theorem, that integral equals the integral of $\log |Df|$, which is continuous (and $f \in C^1$). So, the potential is taken as $-\log |Df|$ and the whole theory of thermodynamic formalism works well. But in our case, $\int \Lambda d\mu$ does not equal the integral of a continuous function.

So, let us try to look different arguments to treat Question 5.1 (b). Let us first try to search about this question:

Proposition 5.5 Under the hypothesis $f \in \mathcal{E}_*^0$ of Lipschitz expanding map according to Definition 1.4, and in spite that the characteristic exponent $\Lambda(x)$ may not depend continuously on the point x :

$\int \Lambda d\mu$ is upper semi-continuous as a real function of $\mu \in \mathcal{M}_f$ with the weak-topology.*

One should try to prove that for any fixed $k \in \mathbb{R}$ the set

$$\{\mu \in \mathcal{M}_f: \int \Lambda d\mu < k\}$$

is weak* open. Or equivalently, one has to prove that its complement is weak* closed. So, to prove Proposition 5.5, let us prove the following:

Lemma 5.6 *Assume $f: S^1 \mapsto S^1$, $f \in \mathcal{E}_*^0$. If $\lim^* \mu_i = \mu$ in the space $\mathcal{M}_f$ with the weak*-topology, and if $\int \Lambda d\mu_i \geq k$, then:*

$$\int \Lambda d\mu \geq k \tag{14}$$

Proof: By Definition 2.1 and Proposition 2.2, for any $\nu \in \mathcal{M}_f$ and for ν -a.e. x :

$$\Lambda(x) = \lim_{\epsilon} \lim_n \frac{\log A_n(x, \epsilon)}{n}.$$

Since $A_n(x, \epsilon)$ decreases when ϵ decreases, we have

$$\Lambda(x) = \inf_{\epsilon} \lim_n \frac{\log A_n(x, \epsilon)}{n}.$$

Thus for any measurable choice of $\delta(x) > 0$ we have

$$\Lambda(x) \leq \lim_n \frac{\log A_n(x, \delta(x))}{n} \quad \nu - a.e.$$

where the limit at right exists ν -a.e. due to the subadditive ergodic theorem. So, applying dominated convergence (because $(\log A_n(x, \delta(x)))/n \in [\log b, \log a]$), and recalling that the integral of a subadditive sequence converges to the infimum of the integral (this is part of the subadditive ergodic theorem), we deduce:

$$\begin{aligned} \int \Lambda d\nu &\leq \int \lim_n \frac{\log A_n(x, \delta(x))}{n} d\nu = \lim_n \int \frac{\log A_n(x, \delta(x))}{n} d\nu = \\ &= \inf_n \int \frac{\log A_n(x, \delta(x))}{n} d\nu \end{aligned}$$

Thus, for any $\nu \in \mathcal{M}_f$ and for any measurable choice of $\delta = \delta(x)$ we obtain:

$$\int \Lambda d\nu \leq \int \frac{\log A_n(x, \delta(x))}{n} d\nu \quad \forall n \geq 1.$$

In particular for the invariant measures μ_i in the hypothesis of Lemma 5.6, we conclude:

$$k \leq \int \Lambda d\mu_i \leq \int \frac{\log A_n(x, \delta(x))}{n} d\mu_i \quad \forall n \geq 1 \quad \forall i. \quad (15)$$

Fix $\epsilon > 0$ (small enough). Choose a finite partition $\xi = \{I_1, I_2, \dots, I_h\}$ of S^1 into a finite number of *intervals* I_j , with diameter smaller than ϵ , and such that

$$\nu(\partial I_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, h\} \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_f,$$

where ∂I_j denotes the topological boundary of I_j . Such a partition ξ exists because we are working in the one-dimensional setting. In fact, the boundary of the intervals of a finite partition is a finite number of points. A point $x \in S^1$ has positive ν -measure for some $\nu \in \mathcal{M}_f$ (i.e. $\nu(\{x\}) = a > 0$) only if x is periodic: $\nu(f^{-n}(\{x\})) = \nu(\{x\}) = a > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, so the family of finite sets $\{f^{-n}(\{x\})\}_{n \in \mathbb{N}}$ can not be composed by pairwise disjoint sets. After a standard argument this latter assertion implies that x is periodic. Hence, to find a finite partition into intervals all having boundary with zero ν -measure for all $\nu \in \mathcal{M}_f$, it is enough to choose the intervals such that their boundary points are not periodic points. Since the set of periodic points of $f \in \mathcal{E}^0$ is countable, if an interval I_j with length strictly smaller than ϵ has an extreme point which is periodic, we can replace this interval by a slightly larger or shorter interval I'_j (still with length strictly smaller than ϵ) such that both extreme points of I'_j are non periodic. In such a way we can construct a finite partition

$$\xi = \{I_1, I_2, \dots, I_h\}$$

of S^1 such that $\text{diam } \xi = \max_{0 \leq j \leq h} \text{diam } I_j < \epsilon$ and

$$\nu(\partial I_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, h\}, \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_f.$$

Note: The above argument does not work in dimension larger than one. In larger dimensions, for each previously fixed measure $\nu \in \mathcal{M}_f$ there exists a finite partition with diameter as small as wanted such that the boundaries of the pieces have zero ν -measure. But in spite of that, there may not exist a finite partition whose pieces have boundaries with zero ν -measure simultaneously for all $\nu \in \mathcal{M}_f$.

For each fixed $n \in \mathbb{N}$ choose a piece $X \in \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi$. Define

$$S_n(X) := \sup \left\{ \frac{\text{dist}(f^n(x), f^n(y))}{\text{dist}(x, y)} : x, y \in X \text{ } x \neq y \right\} \in (b, a)$$

Then, recalling Equality (2), for all $x \in X$ we have $X \in B_n(x, \epsilon)$ and so

$$S_n(X) \leq A_n(x, \epsilon) \quad \forall x \in X.$$

Therefore, for any probability measure ν

$$\sum_{X \in \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi} \frac{1}{n} \log S_n(X) \nu(X) \leq \int \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon) d\nu. \quad (16)$$

Besides, if $\nu \in \mathcal{M}_f$ then $\nu(\partial X) = 0$. This is because, due that f is a local homeomorphism, each point in the topological boundary of X is obtained as the preimage by f^i for some $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ of a point in the topological boundary of a piece of ξ . So, by construction of the partition ξ , and due to the f -invariance of ν , $\nu(\partial X) = 0$.

We deduce that, for fixed n , ν -a.e. x is in the interior of a piece $X \in \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi$. Therefore, there exists $\delta = \delta(x)$ such that

$$B_n(x, \delta(x)) \subset X \quad \mu - \text{a.e. } x$$

So

$$S_n(X) \geq A_n(x, \delta(x))$$

Therefore, for any $\nu \in \mathcal{M}_f$ we have:

$$\int \frac{1}{n} \log A_n(x, \delta(x)) d\nu \leq \sum_{X \in \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi} \frac{1}{n} \log S_n(X) \nu(X). \quad (17)$$

Now, we apply Inequality (15) and (17) to the probability measures μ_i of the hypothesis:

$$k \leq \int \frac{1}{n} \log A_n(x, \delta(x)) d\mu_i \leq \sum_{X \in \bigvee_{s=0}^{n-1} f^{-s}\xi} \frac{1}{n} \log S_n(X) \mu_i(X) \quad \forall n \geq 1, \quad \forall i. \quad (18)$$

On the other hand, we apply Inequality (16) to the measure μ of the hypothesis:

$$\sum_{X \in \bigvee_{s=0}^{n-1} f^{-s}\xi} \frac{1}{n} \log S_n(X) \mu(X) \leq \int \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon) d\mu. \quad (19)$$

Now, for fixed n and fixed ϵ , let us compare the terms at right in Inequality (18) and at left in Inequality (19). They are different because one computes the sum with $\mu_i(X)$ and the other one computes the sum with $\mu(X)$. But, since $\mu(\partial X) = 0$ we can apply the following result, which is well known from the Abstract Measure Theory:

Exercise: If $\{\mu_i\}_{i \geq 1}$ is a sequence of probability measures that is convergent, in the weak* topology to a probability measure μ , and if X is a measurable set such that $\mu(X) = 0$, then $\lim_i \mu_i(X) = \mu(X)$.

Thus, for any $\epsilon' > 0$ there exists i_0 such that

$$\left| \sum_{X \in \bigvee_{s=0}^{n-1} f^{-s} \xi} \frac{1}{n} \log S_n(X) \mu_i(X) - \sum_{X \in \bigvee_{s=0}^{n-1} f^{-s} \xi} \frac{1}{n} \log S_n(X) \mu(X) \right| < \epsilon'$$

$$\forall i \geq i_0,$$

which implies

$$\sum_{X \in \bigvee_{s=0}^{n-1} f^{-s} \xi} \frac{1}{n} \log S_n(X) \mu(X) > \sum_{X \in \bigvee_{s=0}^{n-1} f^{-s} \xi} \frac{1}{n} \log S_n(X) \mu_i(X) - \epsilon'. \quad (20)$$

Joining Inequalities (18), (19) and (20) we conclude, for any fixed n and any fixed ϵ :

$$\int \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon) d\mu > k - \epsilon' \quad \forall \epsilon' > 0.$$

Thus,

$$\int \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon) d\mu \geq k \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \epsilon > 0, \quad (21)$$

and so

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon) d\mu \geq k.$$

By Definition 2.1 and by Dominated Convergence Theorem:

$$\int \Lambda d\mu = \int \lim_{\epsilon} \lim_n \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon) d\mu = \lim_{\epsilon} \lim_n \int \frac{1}{n} \log A_n(x, \epsilon) d\mu \geq k,$$

ending the proof of Lemma 5.6, and thus of Proposition 5.5. $\square$

Trying Questions 5.1 (b) and (c): $V(\mu) = h_\mu(f) - \int \Lambda d\mu$. Due to Theorem 5.4 $h_\mu(f)$ is an upper semi-continuous function of $\mu \in \mathcal{M}_f$. Due to Proposition 5.5 $\int \Lambda d\mu$ is also upper semi-continuous as a function of μ . So $V(\mu)$ is the difference of two upper semi-continuous functions. Such a difference may be not semi-continuous. So, sorry, I could not find the answers to Questions 5.1 (b) and (c). My intuition says that the answer is “Not necessarily”. But maybe it is useful to know that

$V(\mu)$ is the difference of two upper semi-continuous functions

and try to apply some non standard arguments to continue the proofs of the conjecture 6.2 in the next section.

Remark 5.7 Alternative route:

Define

$$\begin{aligned} U_n(x, \epsilon) &:= \sup_{y \in B_n(x, \epsilon), y \neq x} \frac{\text{dist}(x, y)}{\text{dist}(f^n(x), f^n(y))} = \\ &= \left(\inf_{y \in B_n(x, \epsilon), y \neq x} \frac{\text{dist}(f^n(x), f^n(y))}{\text{dist}(x, y)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Observe that $a^{-n} \leq U_n(x, \epsilon) \leq b^{-n}$. So

$$-\log a \leq \frac{\log U_n}{n} \leq -\log b.$$

Prove, using the Subadditive Ergodic Theorem (I am not sure if it works), that for any $\mu \in \mathcal{M}_f$ and for μ -a.e. x there exists

$$\lambda(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log U_n(x, \epsilon)}{n}.$$

Observe that λ is negative:

$$-\log a \leq \lambda(x) \leq -\log b.$$

Prove, similarly to Lemma 5.6, that the mapping

$$\mu \mapsto \int \lambda d\mu$$

is upper semi-continuous as a real function of $\mu \in \mathcal{M}_f$. Conclude that

$$W(\mu) := h_\mu(f) + \int \lambda d\mu \quad (23)$$

is upper semi-continuous as a real function of $\mu \in \mathcal{M}_f$, and so

$$\{\mu \in \mathcal{M}_f : W(\mu) \geq -r\}$$

is weak*-compact for any fixed $r > 0$.

Other alternative route:

Substitute Conjecture 3.1 by the following one, which maybe is more adequate, and research if one can prove it as true:

Conjecture 5.8 Other attempt of Ruelle-like Inequality *If $f \in \mathcal{E}_*^0$ and if $\mu \in \mathcal{M}_f$ then*

$$h_\mu(f) \leq \int -\psi d\mu,$$

where

$$\psi(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \log U_1(x, \epsilon) \quad (24)$$

and U_1 is defined in Equality (22). The limit in Equality (24) exists because, for fixed $x \in S^1$ the real value of $U_1(x, \epsilon)$ is strictly decreasing when $\epsilon > 0$ decreases to zero, and lower bounded by a^{-1} . Note that ψ is negative, and bounded by $-\log a \leq \psi \leq -\log b$.

Analogously to Lemma 5.6, one should try to prove that the mapping $\mu \mapsto \int \psi d\mu$ is upper semi-continuous as a function of $\mu \in \mathcal{M}_f$ (indeed, I have not checked if this assertion works). So, the function

$$W(\mu) := h_\mu(f) + \int \psi d\mu \quad (25)$$

would also be upper semicontinuous and the set

$$\mathcal{K}_r := \{\mu \in \mathcal{M}_f : W(\mu) \geq -r\}$$

would be weak*-compact.

6 Entropy Formula for SRB-like measures

Definition 6.1 Let $f : S^1 \mapsto S^1$, $f \in \mathcal{E}_*^0$. Let $\mu \in \mathcal{M}_f$. Let us provisionally say that μ satisfies *Pesin-like Entropy Formula* if

$$h_\mu(f) = \int -\psi d\mu,$$

where ψ is defined in Equality (24) (Recall that ψ is negative).

Note that if Conjecture 5.8 is previously proved as true, then μ satisfies *Pesin-like Entropy Formula if and only if*

$$h_\mu(f) \geq \int -\psi d\mu. \quad (26)$$

Alternatively, one can define other Pesin-like Entropy Formulae, using the characteristic exponent Λ (or maybe $-\lambda$ instead of Λ), in the role of $-\psi$.

Conjecture 6.2 *If $f \in \mathcal{E}_*^0$ on the circle and if μ is an SRB-like measure for f , then μ satisfies Pesin-like Entropy Formula.*

I have an intuition that this conjecture may be true, but I have not tried to prove it. It is just an intuition because it recalls me [Ca-En 12, Theorem 2.3] and its proof in [Ca-En 12, Section 4]. But of course, the proof in that paper does not work without non trivial adaptations to prove that Conjecture 6.2 is true, since now ψ , which is defined by Equality (24), may be discontinuous, while in [Ca-En 12] the proof is strongly based on the continuity of a function $\psi = -\log |df|$ because $f \in C^1$ -expanding.

Similarly to what I wrote in the previous sections, if one managed to prove that Conjectures 5.8 and 6.2 are true, then one would deduce that

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_f} \left(h_\mu(f) + \int \psi d\mu \right) = 0,$$

(besides, this supremum would be indeed a maximum that is achieved at all the SRB-like measures of f).

Now, let me include some general comments about Conjecture 6.2, (or similar conjectures using maybe the characteristic exponent Λ or $-\lambda$ in the place of $-\psi$), and how it would be certainly false if the hypothesis were weakened:

Comments: Note that that if Conjecture 6.2 were true, then any SRB-like measure should satisfy $h_\mu(f) > 0$ (because $\int -\psi d\mu > \log b > 0$). So, there would not be chance that Conjecture 6.2 were true, if one founded some SRB-like measure for which the entropy were null. Precisely, if one weakens the hypothesis and assumes just $f \in \mathcal{E}^0$ (according to Definition 1.1), then there are many examples for which there are SRB-like measures μ satisfying $h_\mu(f) = 0$. So, Conjecture 6.2 is certainly false if $f \in \mathcal{E}^0$ is not Lipschitz expanding.

In fact, Misiurewicz Example in [Mi 05, Theorem 3.4]. It is an example $f \in \mathcal{E}^0$ on the circle S^1 such that all the invariant measures are SRB-like, including the invariant measures that are supported on the periodic orbits. What Misiurewicz indeed proves is that for Lebesgue almost all the points $x \in S^1$ the sequence of empirical probabilities $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$ is non convergent and has a convergent subsequence to each f -invariant measure. This result implies (from the Definition of SRB-like measure) that any f invariant measure is SRB-like in this example. So, in the Misiurewicz Example, for the invariant measures supported on the periodic orbits of f (which are SRB-like because in this example any invariant measure is SRB-like), the entropy is zero. Thus, this example shows that Conjecture 6.2 is false, in general, if the hypothesis were just $f \in \mathcal{E}^0$.

Moreover, in [Ab-An 13, Definition 3.4 w5 and Theorem 3.10] Abdenur and Andersson have recently proved that generically in $\mathcal{E}^0$ (i.e. for a countable intersection of open and dense subsets of $\mathcal{E}^0$), all the invariant measures are SRB-like (Precisely, they proved that the Misiurewicz example occurs generically in $\mathcal{E}^0$). So, Conjecture 6.2 is false for generic C^0 -expanding maps (generic maps satisfying Definition 1.1). We conclude that to have some chance that Conjecture 6.2 were true, *it is needed to impose hypothesis that restrict the space $\mathcal{E}^0$ of all C^0 -expanding maps to a meager subset.*

So, in spite that at the beginning the hypothesis $f \in \mathcal{E}_*^0$ seemed to be too restrictive, it is a good signal (if the purpose is to research on Conjecture 6.2 or some similar one) because it narrows the scenario to a meager family of C^0 -expanding maps.

References

- [Ab-An 13] F. Abdenur and M. Andersson: *Ergodic Theory of Generic Continuous Maps* Commun. Math. Phys. **318** , 2013, pp.831–855
- [Ca-Qu 01] J. T. Campbell and A. N. Quas: *A generic C^1 expanding map has a singular S-R-B measure* Comm. Math. Phys. **221** , 2001, pp. 335–349.
- [Ca-En 12] E. Catsigeras and H. Enrich: *Equilibrium states and SRB-like measures for C^1 -expanding maps of the circle* Portugaliae Math. (N.S.) **69** (3), 2012, pp. 193-212, doi: 10.4171/PM/1913

- [Ka-Ha 99] A. Katok, B. Hasselblatt *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* ISBN 0-521-57557-5, Cambridge University Press, New York, 1999
- [Ke 98] G. Keller: *Equilibrium states in ergodic theory* London Math. Soc. Stud. Texts **42**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998
- [Le-Yo 85] F. Ledrappier and L.-S. Young: *The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesins entropy formula* Ann. of Math. **122** (2), 1985, pp. 509–539
- [Mi 05] M. Misiurewicz. *Ergodic natural measures*. In the book “Algebraic and topological dynamics”, S. Kolyada, Y. Manin, T. Ward (Editors) Contemp. Math. **385** , pp. 1–6, Amer. Math. Soc., Providence, 2005.
- [Ru 78] D. Ruelle: *An inequality for the entropy of differentiable maps* Boletim Soc. Brasileira Matemática **9** (1), 1978, pp. 83–87