Dinámica de redes de unidades acopladas

Proyecto de Introducción a la Investigación de Mario Shannon y otros ayudantes del equipo de trabajo

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática y Estadística
“Prof. Ing. Rafael Laguardia”
(IMERL)
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

2011

www.fing.edu.uy/~eleonora/files/DinamicaRedes.pdf

Dinámica de redes de unidades acopladas

E. Catsigeras

Proyecto de introducción a la investigación de
Mario Shannon (Docentes Ay. del IMERL) y otros ayudantes del equipo de trabajo,
bajo la orientación de Eleonora Catsigeras (Prof. Agr. del IMERL).
Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL),
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
eleonora@fing.edu.uy, marioshannon@gmail.com

Versión preliminar: 16 de mayo de 2011.

1. Resumen y objetivo general. Se aspira, mediante (y como objetivo de) la introducción a la investigación de los candidatos, responder alguna de las preguntas abiertas planteadas en el item 4.2, relativas a la dinámica asintótica de sistemas determinísticos con discontinuidades. Estos sistemas provienen del modelado de redes complejas de unidades simples acopladas, incluyendo entre ellos, por ejemplo, algunos modelos matemáticos de redes neuronales y de redes de osciladores.

2. Marco del proyecto y participantes.

ÁREA: Ciencias Básicas. Matemática
SUBÁREA: Sistemas dinámicos.
GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN DONDE SE ENMARCA ESTE PROYECTO:
Equipo de Investigación registrado en la CSIC (Comisión Sectorial de Investigación Científica) de la Univ. de la República, en marzo de 2010, con el número 527. Docente responsable del equipo: Eleonora Catsigeras Nombre del equipo de investigación: "Una rama del grupo de Sistemas Dinámicos de Jorge Lewowicz: Estabilidad, caos, bifurcaciones, osciladores y redes neuronales".
Enlace de la CSIC a los datos del grupo de investigación:
http://darwin.csic.edu.uy/grupos/grupos?tipo=unover&id=527
PARTICIPANTES DE ESTE PROYECTO:
CANDIDATOS:
Mario Shannon, estudiante avanzado de la Licenciatura en Matemática en la Facultad de Ciencias, Universidad de la República, realizando la monografía de final de carrera de grado bajo la orientación del Prof. Álvaro Rovella, y Docente Ayudante (grado 1) del IMERL, Facultad de Ingeniería.
Eventualmente otros ayudantes del equipo de investigación referido
TUTORA: Eleonora Catsigeras, doctora en Matemática, Profesora Agregada (grado 4) del IMERL, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.

3. Antecedentes científicos del equipo en el tema de investigación propuesto.

• En [1] hemos fundamentado rigurosa y detalladamente, el modelo matemático abstracto de una red neuronal con interacciones instantáneas inhibitorias, distribuidas en forma discreta en el eje del tiempo, cuando la red responde a un grafo completo. Esto significa que cada una de las unidades dinámicas, que en este caso corresponde a cada una de las neuronas, interactúa con todas las demás. Hemos demostrado que el sistema dinámico global de la red, puede representarse mediante la dinámica por iterados de un mapa con discontinuidades no aisladas, que es contractivo a trozos en una variedad homeomorfa a una bola $n-$dimensional, que cumple además una propiedad que hemos llamado "de separación" (las adherencias de las imágenes de los trozos de continuidad diferentes son disjuntas dos a dos). La dinámica de cada unidad i (siendo $1 \leq i \leq n$, donde n es la cantidad de unidades o neuronas en la red), durante los intervalos de tiempo llamados ISI (inter-spike-intervals: son los intervalos en la recta real del tiempo t comprendidos entre los instantes en que alguna otra neurona $j \neq i$ interactúa con i), es modelada en este ejemplo, por una ecuación diferencial autonóma uni-dimensional del tipo $\dot{x}_i = F_i(x_i)$, donde $x_i(t) \in [0,1] \quad \forall\ t \geq 0$, es la variable que describe el estado en el instante t de la neurona i. No se asume ninguna formulación particular de la función F_i. Solo se asume la siguiente condición, que es abierta con la topología C^1 del espacio funcional infinito dimensional formado por todas las n-uplas de funciones F_i: Cada neurona es disipativa durante los ISI. Más precisamente, para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$ se cumple que $F_i \in C^1([0,1] \mapsto \mathbb{R}), \quad F_i(x) > 0 \forall\ x \in [0,1], \quad F_i'(x) < 0\ \forall x \in [0,1]$.

• En [2] definimos órbitas estables e inestables (en ese paper se le llama caóticas a las inestables) en los modelos abstractos matemáticos abstractos con discontinuidades no aisladas provenientes de [1]. Probamos que el conjunto de las órbitas caóticas nunca es vacío, pero que las órbitas estables siempre convergen a una cantidad finita o infinita numerable, de órbitas periódicas atractoras (ciclos límites).

• En [3] demostramos que en el modelo de [1], el sistema es C^0-genéricamente periódico. Esto significa que toda órbita es genéricamente atraída por uno, de a lo sumo una cantidad finita, de ciclos límites (atractores periódicos). La tesis referida como "C^0-genéricamente periódico"significa que, en el espacio $\mathcal{S}$ de todas los modelos del tipo [1], provisto de una topología que considera solo las distancias de las funciones continuas involucradas (y no sus derivadas), el conjunto de los sistemas que son periódicos, forman un abierto denso en el espacio topológico $\mathcal{S}$. Este espacio, es en realidad el espacio de parámetros funcionales, y es una variedad C^0 infinito dimensional. Se observa que la existencia de órbitas inestables (o caóticas), en el caso de mapas con discontinuidades no aisladas, no es incompatible con que asintóticamente todas las órbitas sean atraídas por ciclos límites. En efecto, debido a las discontinuidades, la inestabilidad de una órbita puede darse a tiempo finito, pero a partir de allí, la misma órbita puede transformarse en estable. Esto sucede porque a tiempo finito, la órbita intersecta al conjunto de discontinuidades, y en él, debido a los saltos positivos de discontinuidad del mapa, el mapa presenta una dilatación de tasa infinita. (Recordamos que la tasa de dilatación es el cociente entre la distancia de las imágenes, y la distancia entre los puntos antes de aplicar el mapa, cuando ese cociente es mayor que 1.)

Todos los resultados en [1], [2] y [3] se refieren a redes con interacciones de grafo completo e inhibitorias (de signo negativo), pero en ellas, las neuronas, o unidades dinámicas que forman el sistema, pueden ser todas distintas entre sí.

• En [4] estudiamos redes con interacciones de grafo completo pero con cualquier signo de interacción: excitatorias o de signo positivo, inhibitorias o de signo negativo, o combinadas, es decir algunas positivas y otras negativas. En este caso, la hipótesis de que el grafo de interacciones es completo, significa que ninguna interacción es nula. Sin embargo, el resultado en [4] no es más general que los obtenidos en [1], [2] y [3], sino simplemente diferente. En efecto, en [4] nos restringimos a redes en que todas las neuronas son idénticas y evolucionan en forma parabólica como función del tiempo durante los ISI. Más precisamente las funciones F_i que regula la dinámica en los ISI de cada neurona i, son todas iguales a una misma función F que es lineal, es decir $F(x) = \alpha(-x+\beta)$, para constantes fijas $\alpha > 0, \quad \beta > 1$. En particular, en la sección 4 de [4] obtenemos condiciones suficientes de sincronización en fase de todas las neuronas, en el caso que alguna de ellas sea excitatoria.

• En [5] estamos estudiando en forma abstracta, la dinámica asintótica (atractores) definida por iterados de mapas con discontinuidades aisladas y contractivos a trozos, en cualquier dimensión (incluso infinita). Estos mapas, según lo que se desprende en [1], y de artículos recientes de otros autores, (referidos a redes de otro tipo de unidades dinámicas interactivas), modelan ese tipo de redes complejas, entre otros sistemas dinámicos. Además tienen interés en sí mismos, para la matemática pura, pues presentan desafíos importantes para generalizar la teoría abstracta, topológica o diferenciable, de sistemas dinámicos. En efecto, esta teoría está desarrollada hasta ahora, esencialmente para mapas sin discontinuidades, o a lo sumo, con discontinuidades aisladas. E incluso en esos casos, los resultados que se conocen hasta el presente, se refieren solo a dimensión uno, o a dimensiones bajas. La teoría de los sistemas dinámicos abstractos, para mapas con discontinuidades no aisladas, y de dimensiones finitas altas o de dimensión infinita, está prácticamente totalmente abierta.

4. Objetivos particulares.

• **4.1** Introducir a los candidatos, en un plazo de 8 meses, en un trabajo de investigación científica en equipo con el grupo en el que se enmarca este proyecto, y mediante el estudio de los problemas matemáticos abiertos que se detallan en item 4.2. La comunicación de los resultados en avance y finales que se obtengan, se realizará mediante exposiciones en seminarios, coloquios, y/o congresos, y mediante la redacción de un artículo científico coautorado con el candidato, al final del proyecto.

• **4.2** Responder, aunque sea parcialmente a alguna de las siguientes preguntas abiertas, que se ordenan en dificultad (supuestamente) creciente:

4.2.1 ¿Son aplicables los mismos o similares argumentos a los utilizados en [1], para reducir la dinámica de una red de $n \geq 2$ neuronas inhibitorias, con grafo no completo, al sistema por iterados de un mapa contractivo a trozos? ¿Con o sin la propiedad de separación? En caso afirmativo ¿bajo qué hipótesis sobre la estructura del grafo no completo?

4.2.2 ¿Son aplicables los mismos o similares argumentos a los utilizados en [2], para definir estabilidad y caos, y demostrar periodicidad asintótica de las órbitas estables, en redes de osciladores de grafo completo con interacciones no inhibitorias? En caso afirmativo ¿bajo qué hipótesis sobre la estructura de signos del grafo completo? ¿Y si el grafo no es completo?

4.2.3 ¿Qué ejemplos matemáticos (o contraejemplos) a los resultados del artículo [5], se pueden encontrar en espacios métricos abstractos que sean variedades compactas (con o sin borde) de dimensión infinita, o en variedades de dimensión finita mayor que 2, pero que sean topológicamente más complicadas que un compacto $X \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a una bola cerrada? (Y que presenten características, no trivialmente reducibles a los ejemplos que ya están en el artículo [5].)

4.2.4 ¿Se pueden extender los resultados de sincronización de la sección 4 del artículo [4] a modelos en que las neuronas sean idénticas pero no respondan a una ecuación lineal del tipo $\dot{x}_i = \alpha(x_i - \beta)$, sino una del tipo disipativo más general: $\dot{x}_i = F(x_i), \quad F(x_i) > 0, \quad F'(x_i) < 0 \quad \forall\ x_i \in [0,1]$. En caso afirmativo, bajo ¿qué hipótesis adicionales? ¿Y si el grafo no es completo?

4.2.5 Idem a la pregunta 4.2.4 pero para neuronas no idénticas.

4.2.6 ¿Es cierta la periodicidad asintótica C^1-genérica de la dinámica definida en los sistemas del artículo [3]?

4.2.6 ¿Cómo es la dinámica asintótica (¿siempre, o C^0-genérica, o a veces, o bajo qué hipótesis particulares, o en qué casos puntuales específicos?) de sistemas definidos como en el artículo [3], pero que no sean contractivos en todos los trozos de continuidad? (Por ejemplo si es contractivo en todos los pedazos excepto en uno, y en este es expansor, o en este hay direcciones expansoras y direcciones contractivas).

• **4.3** Escribir y someter a publicación en revista arbitrada internacional, un artículo científico de investigación en coautoría, con los resultados obtenidos de la investigación en por lo menos una de las preguntas del item 4.2, o en una reformulación de ellas.

5. Actividades y cronograma propuesto.

De mayo a setiembre de 2011: Recopilación y estudio de bibliografía. Estudio y análisis de resultados previos. Reuniones semanales o quincenales para la discusión de posibles conjeturas a ser probadas, de rutas eventuales de prueba y/o de construcción de contraejemplos. Exposiciones en coloquios, seminarios, etc de resultados en avance y de preguntas abiertas relacionadas.

De julio a noviembre de 2011: Formulación de conjeturas. Formulación de rutas de prueba. Concreción de eventuales pruebas y/o de construcción de contraejemplos.

De agosto a diciembre de 2011: Presentar resultados en algún congreso internacional, escribir el paper referido como objetivo particular 4.3 y someterlo a arbitraje para su publicación.

6. Resultados e impacto esperados.

Investigación científica, propiamente dicha: Se aspira responder, obteniendo pruebas matemáticas exactas, a por lo menos una de las preguntas abiertas detalladas en los objetivos específicos del item 4.2, incluidas dentro del sub-área de Sistemas Dinámicos (puros y aplicados) del área de la Matemática.

Formación de investigadores: Se aspira la continuación y especialización de la formación científica de M. Shannon, y eventualmente otros de los ayudantes del equipo de trabajo mencionado en el texto de este proyecto, como candidatos a investigador.

Referencias

[1] CATSIGERAS, E; BUDELLI, R; ROVELLA, A Contractive piecewise continuous maps modeling networks of inhibitory networks. . International Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 61 4 , p. 381-408, 2010. Áreas del conocimiento: Ciencias Naturales/Matemáticas/Matemática Aplicada/Sistemas dinámicos aplicados. Medio de divulgación: Papel; ISSN: 1311-8080

[2] CATSIGERAS, E Chaos and stability in a model of inhibitory neuronal network. . International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 20 2 , p. 349-360, 2010. Áreas del conocimiento: Ciencias Naturales/Matemáticas/Matemática Aplicada/Redes neuronales.. Medio de divulgación: Papel; ISSN: 0218-1274

[3] CATSIGERAS, E; BUDELLI, R: Topological dynamics of generic piecewise continuous contractive maps in n dimensions. International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 68 n. 1 , p. 61-83, 2011. Áreas del conocimiento: Ciencias Naturales/Matemáticas/Matemática Pura/Sistemas Dinámicos. Medio de divulgación: Papel; ISSN: 1311-8080

[4] CATSIGERAS, E; GUIRAUD, P: Integrate and Fire Neural Networks, Piecewise Contractive Maps and Limit Cycles.(Sometido. En Arbitraje.) Preprint publicado en ArXiV 1011.1525v1 , 2010 y en PREMAT 2011/129 Áreas del conocimiento: Ciencias Naturales/Matemáticas/Matemática Aplicada/Sistemas dinámicos. Medio de divulgación: Internet; ISSN: 1688-518X Dirección url del preprint a texto completo:

http://arxiv.org/PS__cache/arxiv/pdf/1011/1011.1525v1.pdf

[5] CATSIGERAS, E; GUIRAUD, P; MEYRONEINC, A; UGALDE, E: On The Attractors of Piecewise Contracting Maps. (Trabajo de investigación en avance) IVIC, Caracas, Venezuela. Publicado en dropbox.com con acceso restringido por ameyrone@ivic.gob.ve , 2011. Áreas del conocimiento: Ciencias Naturales/Matemáticas/ Matemática Pura/Sistemas Dinámicos. Medio de divulgación: Internet (c/acc.lim.)