Sobre Transitividad Topológica

Eleonora Catsigeras[1], en asesoramiento a Kendry Vivas Ferrer[2].

Sea X un espacio topológico. Sea $f : X \mapsto X$ un mapa continuo.

Definition 3.6 de [1], page 37

The map $f : X \mapsto X$ is called *topologically transitive* if for any given nonempty open sets $U, V \subset X$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Exercise 3.7 de [1], page 56

Let $f : I \mapsto I$ be a continuous onto map, where $I \subset \mathbb{R}$ is an interval. Show that the following properties are equivalent:
1. f is topologically transitive;
2. for any open interval $J \subset I$, the set $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(J)$ is dense in I;
3. for any open interval $J \subset I$, the set $\bigcup_{n\geq 0} f^{n}(J)$ is dense in I.

Pregunta (de Kendry Vivas, 02 Nov 2015):

El ejercicio es mostrar que las 3 proposiciones son equivalentes. Ya hice 1) implica 2) y 3) implica 1). Sólo resta ver que 2) implica 3), y esa es la parte que no he hecho. Le escribo para pedirle una sugerencia al respecto para poder resolver este problema en particular.

Sugerencias:

Probar las siguientes afirmaciones intermedias (ver comentario abajo de estas sugerencias).

A) Si para todo abierto $U \subset X$ el conjunto $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$ es denso en el espacio X, entonces para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 0$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Dicho de otra forma, la propiedad 2 del ejercicio 3.7 implica la 1.

B) Si para *una* pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 0$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ entonces, $U \cap f^n(V) \neq \emptyset$ para esa pareja de abiertos.

C) Si *para toda* pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 0$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces aplicar la propiedad B) a (V, U) en lugar de (U, V), y deducir que *para toda* pareja de abiertos (U, V) existe $m \geq 0$ tal que $V \cap f^m(U) \neq \emptyset$.

D) Si para toda pareja de abiertos (U, V) existe $m \geq 0$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces para todo abierto U el conjunto $\bigcup_{m\geq 0} f^m(U)$ es denso en X.

[1]Instituto de Matemática y Estadística "Rafael Laguardia" (IMERL), Universidad de la República, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

[2]Postgraduando en Matemática en el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Venezuela. Correo electrónico: kvivas.ferrer@gmail.com

Comentario:

Las afirmaciones de las sugerencias anteriores son válidas en un contexto más general que el del Ejercicio 3.7 del libro [1]. Aquí el mapa $f : X \mapsto X$ es continuo, pero no necesariamente sobreyectivo, y el espacio topológico X no es necesariamente el intervalo I. La continuidad no se necesita explícitamente en las demostraciones de esas afirmaciones, pero se acostumbra aplicar la Definición 3.6 solo cuando f es continua, nada más que por una cuestión de convención.

Ejercicio (más general que el ejercicio 3.7):

Sea X un espacio topológico y sea $f : X \mapsto X$ un mapa continuo (no necesariamente inyectivo y no necesariamente sobreyectivo). Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes entre sí:

1. f es topológicamente transitivo.
2. Para todo abierto $U \subset X$ el conjunto $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$ es denso en X.
3. Para todo abierto $U \subset X$ el conjunto $\bigcup_{n \geq 0} f^{n}(U)$ es denso en X.
4. Para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 1$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$
5. Para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe una sucesión estrictamente creciente de naturales positivos n_j tales que $f^{-n_j}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo j.
6. Para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe $n \geq 1$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$
7. Para toda pareja de abiertos (U, V) de X existe una sucesión estrictamente creciente de naturales positivos n_j tales que $f^{n_j}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo j.

Comentarios sobre el ejercicio anterior:

No creo que lo mejor sea probar las implicaciones de las proposiciones en el orden en que están enunciadas.

Para que sean ciertas algunas de las equivalencias (por ejemplo para que 1 y 4 sean equivalentes) es necesaria la hipótesis de continuidad de f.

Referencias

[1] L. Barreira, C. Valls, *Dynamical Systems. An Introduction.* Springer Universitext, Springer-Verlag, London, 2013