Sobre Entropía Topológica

Eleonora Catsigeras[1], en asesoramiento a Kendry Vivas Ferrer[2].

Sea X un espacio métrico compacto. Sea $f : X \mapsto X$ un mapa continuo. Primero tomo algunas definiciones y enunciados del libro [1] y les agrego algunas otras definiciones y propiedades que son usuales cuando se define la entropía topológica. Observar que ninguna de las definiciones y enunciados siguientes requiere que el mapa f sea invertible.

Definition Section 3.4.1 of [1], page 41

For each $n \in \mathbb{N}$ we define the *dynamical distance* d_n (up to time n) as:

$$d_n(x, y) = \text{máx}\{d(f^k(x), f^k(y)) : 0 \le k \le n - 1\}.$$

Definición (bola dinámica)

Sean $n \in \mathbb{N}$, $p \in X$ y $\epsilon > 0$.

Llamamos *bola dinámica de centro p y radio ϵ* hasta tiempo n, al siguiente conjunto:

$$B(n, \epsilon, p) := \{x \in X : d_n(x, p) < \epsilon\} = \{x \in X : d(f^k(x), f^k(p)) < \epsilon \ \forall \ k = 0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Definition 3.8 of [1], page 42

The *topological entropy* of f is defined by

$$h(f) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon), \tag{3.12}$$

where $N(n, \epsilon)$ is the largest number of points $p_1, \dots, p_m$ such that $d_n(p_i, p_j) \ge \epsilon$ for $i \ne j$.

We note that $N(n, \epsilon)$ is always finite.

We also note that the function $\epsilon \mapsto \limsup_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \log N(n, \epsilon)$ is non-increasing and thus, the limit in (3.12) when $\epsilon \to 0$ always exists.

Definición (ϵ, n-separador)

Se llama ϵ, n*-separador* a un conjunto finito de puntos $p_1, \dots, p_m \in X$ tales que $d_n(p_i, p_j) \ge \epsilon$ for $i \ne j$. Un $\epsilon - n$-separador se llama *maximal* si cualquier otro $\epsilon - n$-separador tiene igual cantidad o menos puntos que él. El número $N(n, \epsilon)$ en la definición de entropía topológica es la cantidad de puntos de un ϵ, n-separador maximal. Se observa que las órbitas (hasta

[1]Instituto de Matemática y Estadística "Rafael Laguardia" (IMERL), Universidad de la República, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

[2]Postgraduando en Matemática en el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Venezuela. Correo electrónico: kvivas.ferrer@gmail.com

tiempo n) de una pareja cualquiera de puntos de un ϵ, n separador se separan por lo menos ϵ en algún instante entre 0 y $n-1$.

Definitions 3.10 and 3.11 of [1], page 45

Given $n \in \mathbb{N}$ and $\epsilon > 0$, we denote by $M(n, \epsilon)$ the least number of points $p_1, \ldots, p_m \in X$ such that each $x \in X$ satisfies $d_n(x, p_i) < \epsilon$ for some i.

We denote by $C(n, \epsilon)$ the least number of elements of a cover of X by sets $U_1, \ldots U_m$ with $\sup\{d_n(x, y) : x, y \in U_i\} < \epsilon$ for $i = 1, \ldots, m$.

Definición (ϵ, n-generador):

Se llama ϵ, n-*generador* a un conjunto finito de puntos $p_1, \ldots, p_m \in X$ tales que para todo $x \in X$ existe p_i tal que $d_n(x, p_i) < \epsilon$. Un ϵ, n-generador se llama *minimal* si cualquier otro ϵ, n-generador tiene igual cantidad o más puntos que él. El número $M(n, \epsilon)$ es la cantidad de puntos de un ϵ, n-generador minimal. Se observa que la órbita (hasta tiempo n) de un punto cualquiera $x \in X$ está ϵ-acompañada siempre por la órbita (hasta tiempo n) de algún punto p_i de un ϵ, n generador. (Estar ϵ-*acompañada* hasta tiempo n significa, por definición, que $d(f^k(x), f^k(p_i)) < \epsilon$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.)

Observación importante: *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\epsilon > 0$, el número $M(n, \epsilon)$ es igual a la cantidad mínima de bolas dinámicas $B(n, \epsilon, p)$ necesarias para cubrir X.*

Demostración. Sea un cubrimiento $\{B(n, \epsilon, p_1), \ldots, B(n, \epsilon, p_m)\}$ con una cantidad mínima m de bolas dinámicas de radio ϵ y centros $p_1, \ldots, p_m$ respectivamente. Por ser un cubrimiento, dado cualquier punto $x \in X$, existe p_i tal que $x \in B(n, \epsilon, p_i)$. Luego, por definición de bola dinámica: $d_n(x, p_i) < \epsilon$. Deducimos que $\{p_1, \ldots, p_m\}$ es un ϵ, n-generador. Entonces la cantidad de puntos $M(n, \epsilon)$ de un ϵ, n-generador minimal es menor o igual que m. Hemos probado que

$$M(n, \epsilon) \leq m.$$

Ahora probemos la desigualdad opuesta. Sea $p_1, \ldots, p_k$ un $\epsilon - n$-generador minimal. Entonces,

$$M(n, \epsilon) = k.$$

Consideremos las bolas dinámicas $B(n, \epsilon, p_1), \ldots, B(n, \epsilon, p_k)$. Como cualquier punto $x \in X$ está a distancia d_n menor que ϵ de algún p_i (esto es por la definición de $\epsilon - n$-generador), resulta $x \in B(n, \epsilon, p_i)$ para algún i. Deducimos que $X = \bigcup_{i=1}^{k} B(n, \epsilon, p_i)$. Dicho de otra forma,

$$\{B(n, \epsilon, p_1), \ldots, B(n, \epsilon, p_k)\}$$

es un cubrimiento del espacio X con bolas dinámicas de radio ϵ. Por lo tanto k es mayor o igual que la cantidad mínima m de bolas dinámicas de radio ϵ necesarias para cubrir X. Hemos probado que

$$m \leq k = M(n, \epsilon).$$

Concluimos que $m = M(n, \epsilon)$, como queríamos demostrar. □

Proposition 3.9 of [1], page 45

For each $n \in \mathbb{N}$ and $\epsilon > 0$, we have

$$C(n, 2\epsilon) \leq M(n, \epsilon) \leq N(n, \epsilon) \leq M(n, \epsilon/2) \leq C(n, \epsilon/2).$$

Theorem 3.4 of [1], page 46

If $f : X \mapsto X$ is a continuous map on a compact metric space X, then

$$\begin{aligned} h(f) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log M(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log M(n, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log C(n, \epsilon). \end{aligned}$$

Exercise 3.16 of [1], page 55

Compute the topological entropy of the endomorphism of the torus $\mathbb{T}^2$ induced by the matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pregunta (de Kendry Vivas, 04 Nov 2015):

En el texto encuentro el cálculo de la entropía topológica para el caso de automorfismos en particular, pero no hay nada referente al cálculo para un endomorfismo en general.

Sugerencias:

A) Dibujar la superficie del toro $\mathbb{T}^2$ como un cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el que se identifican los puntos $(x, 1) \sim (x, 0)$ e $(y, 1) \sim (y, 0)$ (ver la figura 3.5 de [1], página 49).

Tomar un número natural $q \geq 1$. Denotemos $\epsilon := 1/q$. Probar que para cualquier punto $p \in \mathbb{T}^2$ el cuadrado Q con centro en p y lados paralelos a los ejes con longitud ϵ, contiene la bola (con la distancia $d = d_1$) de centro p y radio ϵ. Y además Q está contenido en la bola de centro p y radio $2 \cdot \epsilon$.

B) Aplicando la transformación lineal con la matriz dada al cuadrado Q de lados paralelos a los ejes con longitud ϵ, y centro p (cualquier punto del toro) probar que para todo $n \geq 1$, la bola dinámica $B(n, \epsilon, p)$ de centro p y radio ϵ está contenida en el rectangulito $R_n(p, \epsilon)$ de centro p, lados paralelos a los ejes, altura $\epsilon/3^n$ y ancho $\epsilon/2^n$. Análogamente, probar que la bola dinámica $B(n, 2 \cdot \epsilon, p)$ contiene al rectangulito $R_n(p, \epsilon)$.

C) Contar la cantidad mínima $H(n, \epsilon)$ de rectangulitos *compactos* $R_n(p, \epsilon)$ como los de la parte B), necesarios para cubrir el toro. (Recordar que $\epsilon = 1/q$ donde q es un natural positivo).

D) Probar que $H(n,\epsilon) \leq M(n,\epsilon)$ y que $M(n,2\epsilon) \leq H(n,\epsilon)$. Para ello se sugiere:

Recordar la “observación importante”, probada anteriormente, que dice que el número $M(n,\epsilon)$ es igual a la cantidad mínima de bolas dinámicas necesarias para cubrir X.

Usar las propiedades de la parte B) que relaciona los rectangulitos $R_n(p,\epsilon)$ con las bolas dinámicas de radio ϵ y 2ϵ.

Usar que los números $M(n,\epsilon$, $M(n,2\epsilon)$ y $H(n,\epsilon)$ son mínimas cantidades de bolas dinámicas $B(n,\epsilon,p)$, o $B(n,2\epsilon,p)$, o de rectangulitos $R_n(p,\epsilon)$ respectivamente, necesarios para cubrir X.

E) Aplicar la igualdad $h(f) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log M(n,\epsilon)$ (Teorema 3.4 del libro [1]), y las desigualdades de la parte D) de estas sugerencias, para deducir que existe el siguiente límite y es igual a la entropía topológica de f:

$$\lim_{p\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} H(n,1/p) = h(f).$$

Finalmente, usando el resultado probado en la parte C) calcular dicho límite. (Debería quedar $h(f) = \log 6$).

Ejercicio (generalizaciones del ejercicio 3.16 de [1])

1. Sean a_1 y a_2 dos números naturales positivos. Sea en el toro $\mathbb{T}^2$, el endomorfismo inducido por la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. Probar que

$$h(f) = \log a_1 + \log a_2 = \sum_{i\in\{1,2\},\, \log a_i > 0} \log a_i\ .$$

Sugerencia: argumentar como se sugiere para el ejercicio 3.16 cubriendo el toro con rectangulitos de lados paralelos a los ejes coordenados y longitudes adecuadas.

2. Sea A una matriz 2×2 con entradas enteras, diagonalizable con valores propios λ_1 y λ_2 reales no negativos. Es decir: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ y hay dos vectores propios L.I.. Sea en el toro $\mathbb{T}^2$ el endomorfismo inducido por la matriz A. Probar que

$$h(f) = \sum_{i\in\{1,2\},\, \log \lambda_i > 0} \log \lambda_i\ .$$

Sugerencia: argumentar como en la parte 1, pero en vez de cubrir el toro con rectangulitos de lados paralelos a los ejes, cubrirlo con paralelogramos de lados paralelos a las direcciones propias, y longitudes adecuadas, en forma similar a la figura 3.5 del libro [1], página 49.

Referencias

[1] L. Barreira, C. Valls, *Dynamical Systems. An Introduction.* Springer Universitext, Springer-Verlag, London, 2013